目　　录

译者的话 ………………………………………………… i

第五版序言 ………………………………………………… ii

第二版序言 ………………………………………………… iii

初版序言 ………………………………………………… iv

历史引言 ………………………………………………… 1

第一章　电磁场的基本性质 ………………………………… 13

§ 1.1　电磁场 ………………………………………………… 13

§ 1.1.1　麦克斯韦方程 ………………………………………… 13

§ 1.1.2　物质方程 ………………………………………… 15

§ 1.1.3　突变面处的边界条件 ………………………………… 17

§ 1.1.4　电磁场的能量定律 ………………………………… 20

§ 1.2　波动方程和光速 ………………………………………… 24

§ 1.3　标量波 ………………………………………………… 29

§ 1.3.1　平面波 ………………………………………… 30

§ 1.3.2　球面波 ………………………………………… 31

§ 1.3.3　谐波　相速 ………………………………………… 32

§ 1.3.4　波包　群速 ………………………………………… 35

§ 1.4　矢量波 ………………………………………………… 41

§ 1.4.1　一般的电磁平面波 ………………………………… 41

§ 1.4.2　谐电磁平面波 ………………………………………… 43

(a) 椭圆偏振 ………………………………………… 43

(b) 线偏振和圆偏振 ………………………………… 48

(c) 偏振态的表征——斯托克斯参量 ………………… 50

§ 1.4.3　任意形式的谐矢量波 ………………………………… 52

§ 1.5　平面波的反射和折射 ………………………………… 58

§ 1.5.1　反射定律和折射定律 ………………………………… 58

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

§1.5.2 菲涅耳公式 …… 61
§1.5.3 反射率和透射率;反射和折射产生的偏振 …… 64
§1.5.4 全反射 …… 71
§1.6 波在分层媒质中的传播 介质膜理论 …… 77
§1.6.1 基本微分方程 …… 78
§1.6.2 分层媒质的特性矩阵 …… 82
(a) 均匀介质膜 …… 85
(b) 分层媒质作为均匀薄膜的膜堆 …… 86
§1.6.3 反射系数和透射系数 …… 88
§1.6.4 均匀介质膜 …… 89
§1.6.5 周期性分层媒质 …… 96
第二章 电磁势和电磁极化 …… 102
§2.1 真空中的电动势 …… 103
§2.1.1 矢势和标势 …… 103
§2.1.2 推迟势 …… 106
§2.2 极化和磁化 …… 108
§2.2.1 用极化强度和磁化强度表示矢势和标势 …… 108
§2.2.2 赫兹矢量 …… 113
§2.2.3 一个线性电偶极子的场 …… 115
§2.3 洛伦兹-洛伦茨公式和初等色散理论 …… 118
§2.3.1 介电极化率和磁极化率 …… 118
§2.3.2 有效场 …… 120
§2.3.3 平均极化率;洛伦兹-洛伦茨公式 …… 122
§2.3.4 初等色散理论 …… 126
§2.4 用积分方程处理电磁波的传播 …… 135
§2.4.1 基本积分方程 …… 136
§2.4.2 厄瓦耳特-欧西恩消光定理和洛伦兹-洛伦茨公式的严格推导 …… 137
§2.4.3 借助厄瓦耳特-欧西恩消光定理处理平面波的折射和反射 …… 143
第三章 几何光学基础 …… 149
§3.1 对于极短波长的近似处理 …… 149

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 3.1.1 程函方程的推导 …………………………………… 150
§ 3.1.2 光线和几何光学的强度定律 …………………………… 154
§ 3.1.3 振幅矢量的传播 …………………………………… 160
§ 3.1.4 推广和几何光学的适用范围 …………………………… 162
§ 3.2 光线的一般性质 ……………………………………165
§ 3.2.1 光线的微分方程 …………………………………… 165
§ 3.2.2 折射定律和反射定律 ………………………………… 168
§ 3.2.3 光线汇和它们的焦点特性 …………………………… 170
§ 3.3 几何光学的其它基本定理 ……………………………172
§ 3.3.1 拉格朗日积分不变式 ………………………………… 172
§ 3.3.2 费马原理 ………………………………………… 173
§ 3.3.3 马吕斯和杜平定理和一些有关定理 ……………………… 176
第四章 光学成象的几何理论 ……………………………………179
§ 4.1 哈密顿特征函数 ……………………………………179
§ 4.1.1 点特征函数 ……………………………………… 180
§ 4.1.2 混合特征函数 …………………………………… 182
§ 4.1.3 角特征函数 ……………………………………… 184
§ 4.1.4 旋转折射面的角特征函数近似形式 ……………………… 185
§ 4.1.5 旋转反射面的角特征函数近似形式 ……………………… 189
§ 4.2 理想成象 …………………………………………191
§ 4.2.1 一般定理 ………………………………………… 192
§ 4.2.2 麦克斯韦"鱼眼" …………………………………… 198
§ 4.2.3 面的无象散成象 …………………………………… 200
§ 4.3 具有轴对称的投影变换(共线关系) ………………………202
§ 4.3.1 一般公式 ………………………………………… 202
§ 4.3.2 望远情况 ………………………………………… 206
§ 4.3.3 投影变换的分类 …………………………………… 207
§ 4.3.4 投影变换的组合 …………………………………… 208
§ 4.4 高斯光学 …………………………………………210
§ 4.4.1 旋转折射面 ……………………………………… 210
§ 4.4.2 旋转反射面 ……………………………………… 214
§ 4.4.3 厚透镜 …………………………………………… 215

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 4.4.4 薄透镜 …… 218
§ 4.4.5 一般共轴系统 …… 219
§ 4.5 广角光锥的无象散成象 …… 222
§ 4.5.1 正弦条件 …… 223
§ 4.5.2 赫谢耳条件 …… 225
§ 4.6 象散光锥 …… 226
§ 4.6.1 细光锥的焦点特性 …… 226
§ 4.6.2 细光锥的折射 …… 228
§ 4.7 色差；棱镜的色散 …… 232
§ 4.7.1 色差 …… 232
§ 4.7.2 棱镜的色散 …… 235
§ 4.8 光度学和孔径 …… 240
§ 4.8.1 光度学的基本概念 …… 240
§ 4.8.2 光阑和光瞳 …… 246
§ 4.8.3 象的亮度和照度 …… 248
§ 4.9 光线追迹 …… 251
§ 4.9.1 斜子午光线 …… 251
§ 4.9.2 傍轴光线 …… 254
§ 4.9.3 不交轴光线 …… 256
§ 4.10 非球面的设计 …… 259
§ 4.10.1 轴上无象散的实现 …… 260
§ 4.10.2 不晕的实现 …… 263
第五章 象差的几何理论 …… 267
§ 5.1 波象差和光线象差；象差函数 …… 268
§ 5.2 施瓦茨察耳德微扰程函 …… 273
§ 5.3 初级(赛德耳)象差 …… 277
§ 5.4 初级象差的相加定理 …… 286
§ 5.5 一般的共轴透镜系统的初级象差系数 …… 288
§ 5.5.1 利用两条傍轴光线的赛德耳公式 …… 288
§ 5.5.2 利用一条傍轴光线的赛德耳公式 …… 294
§ 5.5.3 珀兹伐定理 …… 296

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 5.6 例子：一个薄透镜的初级象差 ……297
§ 5.7 一般的共轴透镜系统的色差 ……301
第六章 成象仪器 ……306
§ 6.1 眼睛 ……306
§ 6.2 照相机 ……308
§ 6.3 折射望远镜 ……313
§ 6.4 反射望远镜 ……320
§ 6.5 照明仪器 ……326
§ 6.6 显微镜 ……328
第七章 干涉理论基础和干涉仪 ……334
§ 7.1 引言 ……334
§ 7.2 两个单色波的干涉 ……335
§ 7.3 双光束干涉：波阵面分割 ……339
§ 7.3.1 杨氏实验 ……339
§ 7.3.2 菲涅耳双面镜和类似装置 ……341
§ 7.3.3 准单色光条纹和白光条纹 ……344
§ 7.3.4 使用狭缝光源;条纹的可见度 ……346
§ 7.3.5 应用于测量光程差：瑞利干涉仪 ……350
§ 7.3.6 应用于测量光源的角幅度：迈克耳孙测星干涉仪 ……353
§ 7.4 驻波 ……361
§ 7.5 双光束干涉：振幅分割 ……366
§ 7.5.1 平行平面板产生的条纹 ……366
§ 7.5.2 薄膜产生的条纹；斐索干涉仪 ……372
§ 7.5.3 条纹的定域 ……380
§ 7.5.4 迈克耳孙干涉仪 ……391
§ 7.5.5 特怀曼-格林干涉仪和有关干涉仪 ……394
§ 7.5.6 两块全同板产生的条纹：雅满干涉仪和干涉显微镜 ……399
§ 7.5.7 马赫-泽德干涉仪;贝茨波阵面切变干涉仪 ……407
§ 7.5.8 相干长度;双光束干涉在研究光谱线精细结构中的应用 ……413

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 7.6 多光束干涉 ……421
§ 7.6.1 平行平面板的多光束干涉条纹 ……422
§ 7.6.2 法布里-珀罗干涉仪 ……429
§ 7.6.3 应用法布里-珀罗干涉仪研究光谱线的精细结构 ……434
§ 7.6.4 应用法布里-珀罗干涉仪比较波长 ……441
§ 7.6.5 陆末-盖尔克干涉仪 ……445
§ 7.6.6 干涉滤波器 ……453
§ 7.6.7 薄膜多光束干涉条纹 ……458
§ 7.6.8 两块平行平面板产生的多光束条纹 ……470
(a) 单色光和准单色光生成的条纹 ……470
(b) 叠加条纹 ……475
§ 7.7 波长与标准米的比较 ……480
第八章 衍射理论基础 ……483
§ 8.1 引言 ……483
§ 8.2 惠更斯-菲涅耳原理 ……484
§ 8.3 基尔霍夫衍射理论 ……489
§ 8.3.1 基尔霍夫积分定理 ……489
§ 8.3.2 基尔霍夫衍射理论 ……494
§ 8.3.3 夫琅和费衍射和菲涅耳衍射 ……498
§ 8.4 过渡到标量理论 ……505
§ 8.4.1 单色振子产生的象场 ……506
§ 8.4.2 总象场 ……510
§ 8.5 各种形状光孔上的夫琅和费衍射 ……513
§ 8.5.1 矩孔和狭缝 ……513
§ 8.5.2 圆孔 ……517
§ 8.5.3 其它形状的孔 ……521
§ 8.6 光学仪器中的夫琅和费衍射 ……524
§ 8.6.1 衍射光栅 ……524
(a) 衍射光栅原理 ……524
(b) 光栅的类型 ……532
(c) 光栅摄谱仪 ……538
§ 8.6.2 成象系统的分辨本领 ……541

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 8.6.3 显微镜中的成象 …… 545
(a) 不相干照明 …… 546
(b) 相干照明——阿贝理论 …… 548
(c) 相干照明——泽尼克相衬观察法 …… 554
§ 8.7 直边菲涅耳衍射 …… 559
§ 8.7.1 衍射积分 …… 559
§ 8.7.2 菲涅耳积分 …… 562
§ 8.7.3 直边菲涅耳衍射 …… 566
§ 8.8 焦点附近的三维光分布状态 …… 568
§ 8.8.1 用洛梅耳函数计算衍射积分 …… 569
§ 8.8.2 强度分布 …… 575
(a) 几何焦平面上的强度分布 …… 576
(b) 轴上的强度分布 …… 578
(c) 几何阴影边界上的强度分布 …… 578
§ 8.8.3 积分强度 …… 579
§ 8.8.4 位相特性 …… 582
§ 8.9 边界衍射波 …… 587
§ 8.10 加伯的波前重现成象方法(全息学) …… 592
§ 8.10.1 正全息图的制作 …… 593
§ 8.10.2 重现 …… 595

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

目　录

第九章　象差的衍射理论 …… 603

§ 9.1　有象差存在时的衍射积分 …… 604

§9.1.1　衍射积分 …… 604

§9.1.2　位移定理．参考球的变化 …… 607

§9.1.3　强度与波阵面平均形变之间的关系 …… 609

§ 9.2　象差函数的展开 …… 610

§9.2.1　泽尼克圆多项式 …… 610

§9.2.2　象差函数的展开 …… 613

§ 9.3　初级象差的容限条件 …… 616

§ 9.4　与单一象差相联系的衍射图样 …… 622

§9.4.1　初级球面象差 …… 626

§9.4.2　初级彗差 …… 629

§9.4.3　初级象散 …… 632

§ 9.5　扩展物的成象 …… 634

§9.5.1　相干照明 …… 635

§9.5.2　不相干照明 …… 639

第十章　部分相干光的干涉和衍射 …… 648

§ 10.1　引言 …… 648

§ 10.2　实多色场的复数表示 …… 652

§ 10.3　光束的相关函数 …… 659

§10.3.1　两个部分相干光束的干涉．互相干函数和复相干度 …… 659

§10.3.2　互相干的谱表示 …… 664

§ 10.4　准单色光的干涉和衍射 …… 667

§10.4.1　准单色光的干涉．互强度 …… 667

§10.4.2　扩展不相干准单色光源发出的光的互强度和相干度的计算 …… 671

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(a) 范西特-泽尼克定理 ………… 671
(b) 霍普金斯公式 ………… 677
§10.4.3 一个例子 ………… 679
§10.4.4 互强度的传播 ………… 684
§10.5 某些应用 ………… 686
§10.5.1 扩展的不相干准单色光源象中的相干度 ………… 686
§10.5.2 聚光镜对显微镜分辨率的影响 ………… 691
(a) 临界照明 ………… 691
(b) 柯勒照明 ………… 694
§10.5.3 用部分相干准单色照明成象 ………… 696
(a) 互强度通过光学系统的透射 ………… 696
(b) 透照物的象 ………… 699
§10.6 关于互相干的一些定理 ………… 704
§10.6.1 来自不相干光源光的互相干的计算 ………… 704
§10.6.2 互相干的传播 ………… 707
§10.7 部分相干性的严格理论 ………… 709
§10.7.1 互相干波动方程 ………… 709
§10.7.2 互相干传播定律的严格表述 ………… 711
§10.7.3 相干时间和有效谱宽 ………… 715
§10.8 准单色光的偏振特性 ………… 719
§10.8.1 准单色平面波的相干矩阵 ………… 720
(a) 完全非偏振光(自然光) ………… 725
(b) 完全偏振光 ………… 726
§10.8.2 某些等价表示. 光波的偏振度 ………… 728
§10.8.3 准单色平面波的斯托克斯参量 ………… 732
第十一章 严格的衍射理论 ………… 736
§11.1 引言 ………… 736
§11.2 边界条件与面电流 ………… 738
§11.3 平面屏的衍射：巴俾涅原理的电磁形式 ………… 740
§11.4 平面屏的二维衍射 ………… 742
§11.4.1 二维电磁场的标量性质 ………… 742
§11.4.2 平面波的角谱 ………… 743
§11.4.3 利用对偶积分方程表述 ………… 746

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 11.5 半平面对平面波的二维衍射 …… 748
§ 11.5.1 E 偏振对偶积分方程的解 …… 748
§ 11.5.2 用非涅耳积分表示的解 …… 751
§ 11.5.3 解的性质 …… 755
§ 11.5.4 H 偏振的解 …… 760
§ 11.5.5 某些数值计算 …… 762
§ 11.5.6 与近似理论及实验结果的比较 …… 764
§ 11.6 半平面对平面波的三维衍射 …… 766
§ 11.7 半平面对局域源的衍射 …… 769
§ 11.7.1 平行于衍射棱边的线电流 …… 769
§ 11.7.2 偶极子 …… 775
§ 11.8 其他问题 …… 779
§ 11.8.1 两个平行的半平面 …… 779
§ 11.8.2 平行错开的半平面的无限堆垛 …… 782
§ 11.8.3 窄条 …… 783
§ 11.8.4 某些进一步的问题 …… 785
§ 11.9 解的唯一性 …… 785
第十二章 光被超声波衍射 …… 788
§ 12.1 现象的定性描述和基于麦克斯韦微分方程的理论概要 …… 788
§ 12.1.1 现象的定性描述 …… 788
§ 12.1.2 基于麦克斯韦方程的理论概要 …… 792
§ 12.2 用积分方程法处理光被超声波衍射 …… 796
§ 12.2.1 E 偏振的积分方程 …… 798
§ 12.2.2 积分方程的试探解 …… 799
§ 12.2.3 衍射和反射光谱中光波振幅的表达式 …… 803
§ 12.2.4 方程用逐次逼近法得出的解 …… 803
§ 12.2.5 某些特殊情况下第一序和第二序谱线强度的表达式 …… 808
§ 12.2.6 某些定性的结果 …… 810
§ 12.2.7 喇曼-纳斯近似 …… 812
第十三章 金属光学 …… 815
§ 13.1 波在导体中的传播 …… 816

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 13.2　金属表面的折射和反射 …………………………… 820
§ 13.3　金属光学常数的初等电子理论 …………………… 832
§ 13.4　波在分层导电媒质中的传播．金属膜的理论 … 836
§ 13.4.1　透明衬底上的吸收膜 ……………………………… 836
§ 13.4.2　吸收衬底上的透明膜 ……………………………… 842
§ 13.5　导体球的衍射；米氏理论…………………………… 843
§ 13.5.1　问题的数学解 ……………………………………… 845
(a) 用德拜势表示场 ……………………………………………… 845
(b) 场分量的级数展开 …………………………………………… 851
(c) 关于缔合勒让德函数与柱面函数的公式概述 ……………… 860
§ 13.5.2　米氏公式的某些结果 ……………………………… 862
(a) 分波 …………………………………………………………… 862
(b) 极限情况 ……………………………………………………… 864
(c) 散射光的强度和偏振 ………………………………………… 869
§ 13.5.3　总散射与消光 ……………………………………… 875
(a) 某些一般的考虑 ……………………………………………… 875
(b) 计算结果 ……………………………………………………… 881
第十四章　晶体光学……………………………………………… 887
§ 14.1　各向异性媒质的介电张量 …………………………… 887
§ 14.2　在各向异性媒质中单色平面波的结构 ……………… 890
§ 14.2.1　相速度和光线速度 ………………………………… 890
§ 14.2.2　光在晶体中传播的菲涅耳公式 …………………… 894
§ 14.2.3　确定传播速度和振动方向的几何作图 …………… 898
(a) 波法线椭球 …………………………………………………… 898
(b) 光线椭球 ……………………………………………………… 901
(c) 法线面和光线面 ……………………………………………… 902
§ 14.3　单轴晶体和双轴晶体的光学性质 …………………… 904
§ 14.3.1　晶体的光学分类 …………………………………… 904
§ 14.3.2　光在单轴晶体中的传播 …………………………… 906
§ 14.3.3　光在双轴晶体中的传播 …………………………… 908
§ 14.3.4　晶体中的折射 ……………………………………… 912
(a) 双折射 ………………………………………………………… 912
(b) 锥形折射 ……………………………………………………… 914
§ 14.4　晶体光学测量 ………………………………………… 920

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§14.4.1 尼科耳棱镜 …… 920
§14.4.2 补偿器 …… 921
(a) 四分之一波片 …… 922
(b) 巴俾涅补偿器 …… 923
(c) 索累补偿器 …… 925
(d) 伯列克补偿器 …… 925
§14.4.3 有晶片时的干涉 …… 926
§14.4.4 单轴晶片的干涉图 …… 931
§14.4.5 双轴晶片的干涉图 …… 934
§14.4.6 晶体媒质的光轴定位及其主折射率的测定 …… 936
§14.5 应力双折射和形式双折射 …… 937
§14.5.1 应力双折射 …… 937
§14.5.2 形式双折射 …… 941
§14.6 吸收晶体 …… 944
§14.6.1 光在吸收的各向异性媒质中的传播 …… 944
§14.6.2 吸收晶片的干涉图 …… 951
(a) 单轴晶体 …… 952
(b) 双轴晶体 …… 953
§14.6.3 二向色的起偏振器 …… 955
附录 1 变分法 …… 959
§1 作为极值必要条件的欧勒方程 …… 959
§2 希耳伯特独立积分与哈密顿-雅科毕方程 …… 961
§3 致极曲线场 …… 963
§4 从哈密顿-雅科毕方程的解确定全部致极曲线 …… 965
§5 哈密顿正则方程 …… 967
§6 被积函数中不显含独立变量时的特殊情况 …… 968
§7 不连续性 …… 970
§8 维尔斯特拉斯（Weierstrass）条件和勒让德条件（极值的充分条件） …… 972
§9 一个端点约束在一曲面时变分积分的极小值 …… 975
§10 极小值的雅科毕判据 …… 976
§11 例一：光学 …… 976
§12 例二：质点系力学 …… 979

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录 2　光学，电子光学和波动力学 …… 983
§1　基本形式的哈密顿类似 …… 983
§2　变分形式的哈密顿类似 …… 986
§3　自由电子的波动力学 …… 989
§4　光学原理应用于电子光学 …… 992
附录 3　一些积分的渐近逼近 …… 995
§1　最速下降法 …… 995
§2　稳相法 …… 1002
§3　二重积分 …… 1003
附录 4　狄喇克 δ 函数 …… 1006
附录 5　严格推导洛伦兹-洛伦茨定律用到的一个数学引理 (§ 2.4.2) …… 1012
附录 6　电磁场中不连续性的传播 (§ 3.1.1) …… 1015
§1　联系各个场矢量不连续变化的关系式 …… 1015
§2　运动的不连续曲面上的场 …… 1018
附录 7　泽尼克圆多项式 (§ 9.2.1) …… 1020
§1　某些一般考虑 …… 1020
§2　径向多项式 $R_n^{\pm m}(\rho)$ 的显式 …… 1022
附录 8　一个不等式的证明(§ 10.7.3) …… 1028
附录 9　计算两个积分的值(§ 12.2.2) …… 1030

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

历 史 引 言

光学现象背后的物理原理，就我们这本书中所涉及的那些来说，在 1900 年前已经大体上系统形成了．从那年以后，光学同物理学的其他部门一样，由于能量量子的发现而经历了一场彻底的革命．虽然这个发现曾深深地影响了我们关于光的本性的见解，但是它并没有使早先的理论和技术失去作用；只不过是揭示了它们的能力限度，并确定了它们的有效范围．旧的原理和方法以及它们对许许多多不同情况的应用，一直不断扩大，而且现在还在继续扩大着，势头不减．

要把如此广大领域内几世纪期间所获得的知识，有条理地表述出来，我们不可能去按照历史发展的足迹，而一一介绍它许多错误的起点和弯路．因此我们认为，在这个引言里，必须只分别记叙关于光的本性的观念在其发展过程中的几个主要里程碑[1]．

古代的哲学家已经熟悉火镜，光的直进，光的折射和反射，这

---

1) 关于光学历史的比较广泛的叙述，可参考下列书籍：J. Priestley, *History and Present State of Discoveries relating to Vision, Light and Colours* (2 Vols. London, 1772); Thomas Young, *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts* (London, 1845, Vol. 1, pp. 374—385); E. Wilde, *Geschichte der Optik vom Ursprung dieser Wissenschaft bis auf die gegenwärtige Zeit* (2 Vols., Berlin, 1838, 1843); Ernst Mach, *The Principles of Physical Optics*, A historical and philosophical treatment (First German edition 1913. English translation 1926, reprinted by Dover Publications, New York, 1953); E. Hoppe, *Geschichte der Optik* (Leipzig, Weber, 1926); V. Ronchi, *Storia della Luce* (Bologna: Zanichelli, 2nd. Ed., 1952). 内容广博时及近代的历史叙述是 E. T. Whittaker 所作 *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I (The Classical Theories), revised and enlarged edition 1952; Vol. II (The Modern Theories 1900—1926), 1953, published by T. Nelson and Sons, London and Edinburgh 这个引言主要取材于其中第一册.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

引起他们对于光的本性的深思.就我们所知,头几本关于光学的系统著作是属于希腊的哲学家和数学家的[恩培多克勒(Empedocles, 公元前 490—430 年),欧几里得(Euclid, 公元前 300 年)].

在新哲学的创立者当中,笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)可以提出来说一说,因为他根据他的形而上学观念系统地陈述了关于光的本性的见解[1].笛卡儿认为,光在本质上是一种压力,在一种完全弹性的、充满一切空间的媒质(以太)之中传递,他并且把颜色的差异归因于这个媒质中粒子的不同速度的旋转运动.但是只是在伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)对力学作了发展,从而证明了实验方法的能力之后,光学才奠定了稳固的基础.反射定律已为希腊人所知道;折射定律则是于1621年由斯涅耳(W. Snell, Snellius, 约 1580—1626)[2] 从实验上发现.1657年,费马(P. Fermat, 1601—1665)提出了著名的**最小时间原理**[3],它说:"自然界的行为永远以路程最短为准则".按照这个原理,光永远是选这样一条路走,以使它在最短时间内抵达目的地,而后由这个原理出发,并假设不同媒质中"阻力"不同,即可得到折射定律.这个原理具有重大的哲学意义,由于它似乎包含一种目的论式的解释,与自然科学格格不入,因而引起了很多争论.

第一个干涉现象,即薄膜产生的彩色,而今大家称之为"牛顿环"的,系由玻意耳(R. Boyle, 1627—1691)[4] 和胡克(R. Hooke, 1635—1703)[5] 各自独立发现.胡克还观察到在几何阴影区内有光存在——光的"衍射".但是这个现象以前格里马耳迪(F. M.

---

1) R. Descartes, *Dioptrique, Météores* [于1637年在来顿出版(用假名),有序文"Discours de la méthode"], *Principia Philosophiae* (Amsterdam, 1644).

2) Snell 死于 1626 年,没有把他的发现公诸于世.这个定律首先由笛卡儿发表在他的折射光学(*Dioptrique*)一书中.他没有说明这是得自 Snell,虽然一般相信笛卡儿曾经看过 Snell 关于这个问题的手稿.

3) 在给 Chambre 的一封信中.它发表在 *Oeuvres de Fermat*(费马著作集)(Paris, 1891, **2**, 354).

4) *The Philosophical Works of* Robert Boyle (abridged by P. Shaw), Second Ed. (London, 1738), Vol. II, p. 70.

5) R. Hooke, *Micrographia* (1665), 47.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

Grimaldi, 1618—1663)[1] 曾经报导过. 胡克第一个主张这种看法, 认为光是由快的振动所组成,可于刹那之间,或者说以非常大的速度, 传播过任何距离. 他并且相信, 在均匀媒质中每个振动都将产生一个圆球,这个圆球将恒稳地向外扩大[2]. 胡克试图用这些概念来解释折射现象和说明彩色. 但是, 只是当牛顿 (I. Newton, 1642—1727) 于1666 年发现[3]白光可以用三棱镜分解成各种颜色, 并且确定每一种纯颜色各由一个折射率来标志的时候, 颜色的基本性质才搞清楚.波动理论当时在光的直进和偏振(为惠更斯所发现[4])方面所遇到的困难,似乎对牛顿起了决定作用,使他致力于发展发射理论 (或称微粒理论). 按照这个理论,光是以微小粒子的形式从发光物体传播出来的.

在牛顿颜色理论发表的时候, 人们还不知道光的传播是否是瞬时的. 1675 年, 罗麦 (O. Römer, 1644—1710)从木星卫星蚀的观测,发现光的速度为有限[5].

光的波动理论,如我们所看到的,在为它而战斗的第一批战士当中列有胡克,之后为惠更斯 (C. Huygens, 1629—1695)大大加以改进和扩充[4]. 惠更斯提出了一个原理(随后以他的名字命名),按照这个原理,光扰动所落到的"以太"的每一点,可以看作是一个新扰动的中心,各向外发射一个球面波;这些次级波按这样方式进行组合,使得它们的包络面决定以后任何时刻的波阵面.借助这个原理,惠更斯成功地推导出反射定律和折射定律.此外他还能够说明冰洲石的双折射现象[由巴托莱纳斯 (E. Bartholinus, 1625—1698) 于 1669 年发现],这里他假设在晶体中, 除原球面波以外, 还存在

---

1) F. M. Grimaldi, *Physico-Mathesis de Lumine, Coloribus, et iride* (Bologna, 1665).

2) 早期的胡克和惠更斯的波动理论,说的都是一个一个"脉冲",而不是具有一定波长的波列.

3) I. Newton, *Phil. Trans.* No. 80 (Feb. 1672), 3075.

4) Chr. Huygens, *Traité de la lumiére* (于 1678 年完成, 于 1690 年在来顿出版).

5) Olaf Römer, *Mém. de l'Acad. Sci. Paris*, **10** (1666—1699), 575; *J. de Sav.* (1676), 223.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

另一个椭球面波．在研究这个问题的过程中，惠更斯发现了基本现象——偏振：如果使冰洲石双折射所产生的每一条光线通过另一个材料相同的晶体，并使后一晶体绕光线方向转动，则可使该光线消失不见[1]．然而，对这些现象的解释却留待牛顿来作了；牛顿假设，光线具有"侧边"；的确，这个"横向性"对牛顿接受波动理论，似乎是一个不可克服的障碍，因为那时科学家们只熟知纵波(从声的传播)．

由于牛顿的权威，他对波动理论的摒弃使得这一理论停滞不前近一世纪之久．但是它仍然有个别的支持者，如大数学家欧勒(L. Euler, 1707—1783)[2]．

直到十九世纪初叶，才获得一些决定性的发现，导致人们普遍接受波动理论．向这迈出的第一步，是1801年杨氏(T. Young, 1773—1829)提出干涉原理并对薄膜彩色作出解释[3]．但是，由于杨氏的见解大部是定性表达的，所以没有赢得普遍承认．

大约在这个时候，马吕斯(E. L. Malus, 1775—1812)[4]发现了反射光的偏振．事情显然是这样，1808年，一天傍晚，他通过冰洲石晶体观察落日从窗户玻璃上的反射，发现当把晶体绕视线转动时，双折射所产生的两个像的相对强度在改变．但是，马吕斯没有试图对这个现象进行解释，他认为当时的理论都不能给予说明．

这时，发射理论已由拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749—1827)和毕奥(J. Biot, 1774—1862)进一步加以发展．它的拥护者提出衍射题目，作为1818年巴黎科学院悬奖征文问题，期望对这个题目的论述将使发射理论获得最后胜利．但是他们的希望落空了．因为，尽管

---

1) 关于双折射的偏振效应，原文此句叙述如是，有欠妥当，译文未予改动——译者注．

2) L. Euleri, *Opuscula varii argumenti*, Berlin (1746), 169.

3) Th. Young, *Phil. Trans. Roy. Soc., London* xcii (1802) 12, 387. *Young's Works*, Vol. 1 p. 202.

4) E. L. Malus, *Nouveau Bull. d. Sci., par la Soc. Philomatique*, Vol. 1 (1809), 266. *Mém. de la Soc. d'Arcueil*, Vol. 2 (1809).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

有强烈的反对，奖金还是授给了以波动理论为其论述[1]基础的菲涅耳（A. J. Fresnel, 1788—1827），而且这只不过是接连这样一系列研究的第一篇，这些研究在几年之内就使微粒理论的声誉丧失尽净．菲涅耳这篇论文的主体系由惠更斯包络面作图法同杨氏干涉原理相结合而构成．这一结合，如菲涅耳所证明的，不仅足以解释光的"直进"，而且还能解释对直进的微小偏离——衍射现象．菲涅耳计算了直边、小孔和小屏所产生的衍射．特别令人印象深刻的是，泊松（S. D. Poisson, 1781—1840）从菲涅耳理论推出一个结论，即在小圆盘阴影中心应该出现一个亮的斑点，而阿喇果（D. F Arago, 1786—1853）由实验证明这一论断果真属实．

同年（1818），菲涅耳还研究了地球的运动对光波传播的影响的重要问题，这就是星源来的光和地球上的光究竟有没有什么不同．阿喇果从实验上确定，（除光行差外）它们没有不同．菲涅耳根据这些发现，发展了他的以太被物质部分漂移的理论．这个理论于 1851 年被斐索（A. H. L. Fizeau, 1819—1896）的直接实验所确证．菲涅耳和阿喇果一起研究了偏振光线的干涉，于 1816 年发现偏振方向相互垂直的两条光线从不干涉．这个事实，同一直被认为理所当然的纵波假设是无法调和的．杨氏从阿喇果那里听到了这个发现，他于 1817 年找到了解决疑难的钥匙：假设振动是横的．

菲涅耳立即理解到这个假设的全部意义，他尝试给它设置一个比较牢固的动力学基础[2]，他还从这个假设得到了许多结论．因为在液体中只可能有纵振动，所以以太在行为上必须和固体相似；但是在那个时候，固体弹性波的理论尚未形成．菲涅耳并没有去发展这样的理论以求从它推导出光学结果，而是采取归纳方法，设法从观察去推导以太的性质．光在晶体中传播的独特规律是菲涅耳的出发点；对这些规律的说明，以及把它们归纳到几个简单的关

1) A. Fresnel, *Ann. Chim. et Phys.*, (2), **1** (1816) 239; *Oeuvres*, Vol. 1, 89. 129.

2) A. Fresnel, *Oeuvres*, **2**, 261, 479.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

于元波性质的假设,代表着自然科学的最大成就之一. 1832 年,对光学发展作了重要贡献的哈密顿(W. R. Hamilton, 1805—1865)[1],注意到从菲涅耳作图可得出一个重要结果，从而推断出所谓圆锥折射. 之后不久,洛埃 (H. Lloyd, 1800—1881)[2] 从实验上证实了圆锥折射的存在.

也还是菲涅耳，于 1821 年首先指出了色散的起因，他认为这要考虑物质的分子结构[3]. 这一建议后来由科希 (A. L. Cauchy, 1789—1857) 详加阐述.

菲涅耳从以太振动机构的动力学模型，推导出了反射光线和折射光线的强度和偏振所服从的定律[4],这些定律现在用他的名字命名.

菲涅耳的工作给波动理论奠定了如此牢固的基础，以致傅科 (L. Foucault)[5] 和斐索和布雷格特 (L. Breguet)[6] 在 1850年所进行的一项由阿喇果首先建议的仲裁实验，都显得近乎多余了. 微粒理论用光粒子在界面上受到向光密媒质这边的吸引来解释折射，这就要求光密媒质中的光速比较大;相反,波动理论依据惠更斯作图，要求光密媒质中的光速比较小. 傅科等直接测量了空气和水中的光速,结果毫无疑问,判定波动理论获胜.

随后的数十年,是弹性以太理论的发展时期.第一步是建立一个系统的固体弹性理论.纳维尔 (C. Navier, 1785—1836) 首先提出了这种理论[7],他考虑到,物质由无数粒子(质点,原子)组成,这些粒子沿它们的连线相互有作用力. 现今通行的借助连续体概念推

---

1) W. R. Hamilton, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **17** (1833), 1. 还有 *Hamilton's Mathematical Papers*, *edited by* J. L. Synge and W. Conway (Cambridge University Press, 1931), Vol. 1, p. 285.
2) H. Lloyd, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **17** (1833), 145.
3) A. Fresnel, *Oeuvres*, **2**, 438.
4) A. Fresnel, *Mém. de l'Acad.*, **11** (1832), 393; *Oeuvres*, **1**, 767.
5) L. Foucault, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **30** (1850), 551.
6) H. Fizeau and L. Breguet, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **30** (1850), 562, 771.
7) C. L. M. H. Navier, *Mém. de l'Acad.*, **7**, 375 (于 1821 年送交，于 1827 年发表).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

导弹性方程的方法，系创自科希[1]. 在参与光学理论发展工作的其他科学家当中，必须提到的还有，泊松[2]，格林 (G. Green, 1793—1841)[3]，麦卡拉 (J. MacCullagh, 1809—1847)[4] 和诺埃曼 (F. Neumann, 1798—1895)[5]. 今天，用不着再去钻研这些理论的细节或者去钻研它们所遇到的困难；因为这些困难的发生，完全是由于要求用力学语言去说明光学过程，而这一思想束缚早已被人们打破. 所以，做下面的说明即已足够. 设有两个邻接的弹性媒质，并假定在第一媒质中有一个横波传播到它们共同的边界上. 按照力学定律，在第二媒质中，波将分解成纵波和横波. 但是，按照阿喇果和菲涅耳实验，纵弹性波必须排除在外，因此必须设法把它消除. 然而，这不侵犯胁变和胁强边界条件所表达的力学定律是不可能的. 上面所提到的那些作者，他们所提出的种种理论，其差别就在于所假设的边界条件不同，而这些边界条件和力学定律总有某些抵触.

有人反对把以太看成是弹性固体，这从下列提问可以明显看出：如何想象行星以巨大速度在这种媒质中运行而不受到任何可察觉到的阻力？斯托克斯 (G. G. Stokes, 1819—1903) 认为，这一责难可据如下理由回答，即行星的速度比以太粒子在构成光的振动中的速度要小得多；因为大家知道，黑胶或封蜡一类物体能够作很快的振动，但却完全顺从长期施加的胁强. 这种论战，现今看来是多余的，因为我们不再认为必须用机械模型来描绘一切自然现象.

向摆脱弹性以太观念的方向迈出第一步的是麦卡拉[6]. 他设想一种物质，它具有普通物体所不具备的性质. 普通物体在体积元改变形状时储存能量，但在体积元转动时并不储存能量. 而在

---

1) A. L. Cauchy, *Exercise de Mathématiques*, **3** (1828), 160.
2) S. D. Poisson, *Mém. de l'Acad.*, Vol. 8 (1828), 623.
3) G. Green, *Trans. Camb. Phil. Soc.* (1838); *Math. Papers*, 245.
4) J. MacCullagh, *Phil. Mag.* (3), **10** (1837), 42, 382; *Proc. Roy. Irish Acad.*, **18** (1837).
5) F. Neumann, *Abh. Berl. Akad., Math. Kl.* (1835), 1.
6) J. MacCullagh, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **21**, Coll. Works, Dublin (1880), 145.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

麦卡拉的以太中,情况相反. 波在这种媒质中传播的规律,和作为现代光学基础的麦克斯韦电磁波方程,形式极为相似.

尽管有许多困难,弹性以太理论还是维持了很长时间,并且19世纪的大物理学家大多数都对它有过贡献. 除去前面所列举的以外,还必须提出的有,汤姆逊 (W. Thomson, Lord Kelvin, 1824—1908)[1]. 诺埃曼 (C. Neumann, 1832—1925)[2],斯特拉特 (J. W. Strutt, Lord Rayleigh, 1842—1919)[3] 和基尔霍夫 (G. Kirchhoff, 1832—1887)[4]. 在这个时期,许多光学问题获得了解决,但是光学的基础还停留在不能令人满意的状态.

在这同时,电磁学方面的研究几乎独立于光学而发展着,法拉第 (M. Faraday, 1791—1867)[5] 的发现使它达到最高峰. 麦克斯韦 (J. C. Maxwell, 1831—1879)[6] 成功地把这个领域内所有前人的经验总结成了一组方程,它最重要的一个结果是确定可能存在电磁波,其传播速度能够从纯电学测量的结果计算出来. 当科耳劳什 (R. Kohlraush, 1809—1858) 和韦伯 (W. Weber, 1804—1891)[7]作出了这些测量时,人们看到这速度原来就是光的速度,这使得麦克斯韦推测,光波是电磁波. 这个推测于 1888 年为赫兹 (H. Hertz, 1857—1894)[8]的直接实验所证实. 尽管如此,麦克斯韦的电磁理论还是经历了长期斗争才赢得普遍承认. 人的头脑似

---

1) W. Thomson, *Phil. Mag.*, (5), **26** (1888), 414. Baltimore Lectures (London, 1904).
2) C. Neumann, *Math. Ann.*, **1** (1869), 325; **2** (1870), 182.
3) J. W. Strutt, (Lord Rayleigh), Phil. Mag., (4) **41** (1871), 519; **42** (1871), 81.
4) G. Kirchhoff, *Berl. Abh. Physik.*, *Abteilg.* **2** (1876), 57; *Ges. Abh.* 352; *Berl. Ber.* (1882), 641; *Pogg. Ann. Physik. u. Chem.* (2), **18** (1883), 663; *Ges. Abh. Nachtrag.* 22.
5) M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity* (London, 1839)
6) J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 Vols. (Oxford, 1873)
7) R. Kohlrausch and W. Weber, *Pogg. Ann. Physik u Chem.* (2) **99** (1856), 10.
8) H.Hertz, *Sitzb. Berl. Akad. Wiss.*, Feb. 2, 1888; *Wiedem. Ann.* **34** (1888), 551; 英译见其 *Electric Wave* (电波)一书 (London, Macmillan, 1893), 107.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

乎有一个特点，只有迫不得已才肯放弃所习惯的观念，特别是当必须牺牲现象的一个具体图象时。麦克斯韦本人，以及他的跟随者，就长期试图借助机械模型来描述电磁场。只是当比较习惯了麦克斯韦的观念时，人们才逐渐放弃寻求用机械模型"解释"他的方程。今天，把麦克斯韦的场看作是不能再简化的东西，在概念上是没有困难的了。

但是，即使光的电磁理论，也已达到了它适用能力的极限。这个理论能够解释一切和光的传播有关的现象（就它们的主要特征而言）。然而，它不能说明光的发射过程和吸收过程。在这些过程中，物质和光波场相互作用的精细面貌被显现出来。

支配这些过程的规律，是近代光学，确实说，是近代物理学所探讨的目标。这段历史是从发现光谱中的某些规律开始的。第一步是，夫琅和费(J. Fraunhofer, 1787—1826)于1814—1817年发现了[1]太阳光谱中的暗线(这些暗线后来用他的名字命名)；本生 (R. W. Bunsen, 1811—1899)和基尔霍夫[2]于 1861 年根据他们的实验把这些暗线归属于吸收线。太阳本体的连续光谱的光，通过太阳大气的较冷气体时，由于吸收而失去的各个波长，正好就是这气体所发射的那些波长。这个发现是光谱分析的开端。光谱分析是根据这种认识，即每一种气态化学元素都具有一个特征的线光谱。这些光谱的研究，一直到现在仍然是物理学研究的重要课题，而且因为光是它的主题，并且采用的是光学方法，所以人们常把它看作是光学的一部分。然而，关于光如何在原子中产生或消灭的问题，在性质上并不专门属于光学，因为它同样地涉及原子本身的结构；光谱线的规律对光的本性所揭示的内容，并没有象对发光粒子的构

---

1) J. Fraunhofer, *Gilberts Ann.*, **56** (1817), 264. W. H. Wollaston (1766—1828) 于 1802 年就观察到了这些暗线 (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 1802, 365)，但是他没有认识到这个发现的价值，而对它们作出了不正确的解释。

2) R. Bunsen and G. Kirchhoff, *Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der Chemischen Elemente.*, *Abh. kgl. Akad. Wiss.*, Berlin, 1861, 1863.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

造所揭示的那么多. 因此,光谱学从作为光学的一部分,渐渐发展成为一门单独的学科,作为原子和分子物理学的实验基础. 但这个领域已超出本书的范围.

关于方法方面,人们后来终于搞清楚,经典力学对于正确描写原子内部发生的事件是不适用的,必须用普朗克(M. Planck,1858—1947)[1]于1900年创始的量子理论来代替. 玻尔 (N. Bohr, 1885—1962)[2] 把量子理论应用到原子结构,于 1913 年成功地解释了气体线光谱的简单规律. 从这些开端和越来越多的实验材料,发展出了现代量子力学[海森伯(W. Heisenberg),玻恩 (M. Born),约旦 (P. Jordan),德布罗意 (L. de Broglie), 薛定谔 (E. Schrödinger), 狄喇克 (A. M. Dirac)[3]]. 依靠量子力学,人们对原子和分子的构造获得了重要的认识.

然而,我们关于光的本性的观念也大大受到了量子理论的影响. 即使在最初普朗克的量子理论中,就已出现一个和经典概念直接相反的命题,这就是: 一个电的振荡系统,它给予电磁场的能量并不是连续的,而是以一定的份额给电磁场,即按"量子" $\varepsilon = h\nu$, 和光的频率 ν 成正比, 其中 $h = 6.55 \times 10^{-27}$ 尔格/秒, 是普朗克常数. 我们可以说, 常数 h 的出现是近代物理学区别于旧物理学的标志.

物理学家们只是逐渐才完全搞明白了普朗克方程 $\varepsilon = h\nu$ 奇怪的、近乎不合理的特性. 这主要是归功于爱因斯坦 (A. Einstein, 1879—1955)和玻尔的工作. 爱因斯坦根据普朗克理论, 于 1905

---

1) M. Planck, *Verh. d. deutsch phys. Ges.*, **2**, 1900, 202, 237; *Ann. d. Physik*, (4) **4** (1901), 553.

2) N. Bohr, *Phil. Mag.*, (6), **26** (1913), 1, 476, 857.

3) W. Heisenberg, *Z. f. Phys.*, **33** (1925), 879; M. Born and P. Jordan; *ibid.*, **34** (1925), 858; M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, *ibid.*, **35** (1926), 557; L. de Broglie, *Thèse*, Paris, 1924; *Ann. de Physique* (10), **3** (1925), 22; E. Schrödinger, *Ann. d. Physik*, (4), **79** (1926), 361, 489 and 734; **80** (1926), 437; **81** (1926), 109. 英译:"Collected Papers on Wave Mechanics" by E. Schrödinger (London and Glasgow, Blackie, 1928); P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A**, **109** (1925), 642; *ibid.*, **110** (1926), 561,

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

年使光的微粒理论在一种新形式下复活起来[1]. 他假设,普朗克的能量量子作为实在的光粒子而存在. 这种光粒子叫做"光量子"或"光子". 由此他成功地解释了当时在光-粒子能量转换方面新发现不久的一些现象,它们用波动理论不能够说明. 其中主要是所谓光电效应和光化学基本规律. 在这一类现象中,光不是象波动理论所要求的那样,以正比于其强度的能量给与所释放出的粒子,而是行为颇象弹雨.给与次级粒子的能量和强度无关,而仅依赖于光的频率(按照 $\varepsilon = h\nu$ 定律). 肯定光具有这种特性的观测,一年年多起来,结果出现了这种情况,我们必须承认波动理论和微粒理论二者同时有效,前者有干涉现象作为例证,后者有光电效应为其证明. 事物的这种离奇古怪自相矛盾的状态,只是在近几年由于量子力学的发展才得到部分说明,但是这要抛弃旧物理学的一个基本原理,即决定论因果律原理.

场和物质相互作用的详细理论,需要把量子力学方法的领域加以扩大(场量子化). 对于电磁辐射场,这项工作是首先由狄喇克[2]作出的. 这些研究形成量子光学的基础. 然而,这些课题的讨论已超出本书的范围.

本书中没有谈到的光学的另一支,是运动物体光学. 和量子理论一样,它已经发展成为一个庞大的独立的研究领域. 这个领域内观察到的第一个现象,是布雷德利(J. Bradley, 1692—1762)[3] 1728 年所记载的"恒星"光行差,即星的角位置随地球相对于光线方向的运动而观测结果稍微有所不同. 布雷德利正确地解释了这个现象,认为这是由于光速的有限,因而他能够测定出这个速度. 我们已经提到过其他属于运动媒质光学的现象: 菲涅耳第一个探讨了运动物体造成的光漂移,并且证明它的行为就好像以太只以运动物体的部分速度参与运动. 后来斐索从实验上用流水证明了

---

1) A. Einstein, *Ann. d. Physik*, (4), **17** (1905), 132; **20** (1906), 199.
2) P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A **114** (1927), 243, 710.
3) J. Bradley, *Phil. Trans.* **35** (1728), 637.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这个部分漂移. 多普勒(C. Doppler, 1803—1853)[1]研究了光源运动或观察者运动的影响,他阐述了一个著名的原理,人们叫它多普勒原理. 只要光的弹性以太理论有效,并且测量精度还很有限,菲涅耳的部分漂移观念就足以圆满说明一切现象. 但是光的电磁理论却遇到了根本性困难. 赫兹第一个试图把麦克斯韦的定律推广到运动物体. 然而,他的公式同一些电磁实验和光学实验相抵触. 非常重要的是洛伦兹 (H. A. Lorentz, 1853—1928) 的理论. 他假设一个"处在绝对静止状态的以太"来作为电磁场的载体,并且以电的基本粒子——电子的相互作用推导出物质体的性质. 他能证明,菲涅耳的漂移系数可以从他的理论正确地得到,并且一般地说,所有那时 (1895) 所知道的现象都可以用这个假说加以解释[2]. 但是,由于迈克耳孙 (A. A. Michelson, 1852—1931)干涉仪的使用大大提高了光程测量的精度,结果产生了新的矛盾: "静止以太"理论要求有"以太风",而实验检示证明它并不存在[3]. 这个矛盾由爱因斯坦[4]于 1905 年在他的特殊相对论中加以解决了. 这个理论是在批判时空概念的基础上建立起来的,它使人们放弃了欧几里德几何和直观的同时性概念. 狭义相对论进一步发展成所谓广义相对论[5],通过空间-时间流形的"几何化"给引力现象带来完全新的概念. 这个理论的应用需要使用特殊的数学和物理方法,它们虽然在许多情况都和光学有关,但可以很容易同它分开来考虑. 在光学现象中,物体(例如光源)的运动起着重要作用的,为数颇少.

---

1) Chr. Doppler, *Abh. Köngl. böhm. Geselsch.* **2** (1842), 446; *Pogg. Ann.* **68** (1847), 1.

2) H. A. Lorentz, *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* (Leiden, E. J. Brill 1895; reprinted, by Teubner, Leipzig, 1906).

3) A. A. Michelson, *Amer. Jour. Sci.*, (3), **22** (1881), 20; A. A. Michelson and E. W. Morley, *Amer. Jour. Sci.*, (3), **34** (1887), 333; *Phil. Mag.* **24** (1887), 449.

4) A. Einstein, *Ann. d. Physik* (4), **17** (1905), 891.

5) A. Einstein, *Phys., Berl. Sitz.* (1915), 778, 799, 831, 844. *Ann. d. Physik*, (4) **49** (1916), 769.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第一章　电磁场的基本性质

§1.1　电　磁　场

§1.1.1　麦克斯韦方程

在空间中，由于电荷的存在而建立起的激发状态，谓之构成一电磁场。它由两个矢量，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示，分别叫做电矢量和磁感应强度[1]。

要描写场对物质客体的作用，须引进第二组矢量，这就是电流密度 $\boldsymbol{j}$，电位移 $\boldsymbol{D}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$。

这五个矢量的空间和时间微商是由下列麦克斯韦方程联系起来的：

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},\tag{1}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}=0,\tag{2}$$

点"·"表示对时间取微商。上述方程适用于这样的点，即在其附近

---

1) 由于历史原因，在初等考虑中，通常把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 看作是基本场矢量，而把 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 看作是描写物质的影响。然而在一般理论中，由于和运动媒质电动力学有关的原因，非按本处说明不可。

四个麦克斯韦方程 (1)—(4) 可分成两组：一组包括两个齐次方程(右边为零)，含 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$；另一组包括两个非齐次方程(右边不为零)，含 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$。如果作一个空间和时间的坐标变换(相对论的洛伦兹变换)，则各组方程同时一起变换，而如果 $\boldsymbol{j}/c$ 和 ρ 作为一个 4-矢量，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ 两对矢量各作为一个 6-矢量(二阶反对称张量)进行变换，则各方程在形式上保持不变。因为非齐次方程组包含电荷和电流(它们代表物质的影响)，所以必须把相应的一对矢量($\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$)归属于物质的影响。然而习惯上是把 $\boldsymbol{H}$ 而不是把 $\boldsymbol{B}$ 作为磁场矢量；当无混淆之虑时，我们将按这一术语使用。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

媒质的物理性质是连续的那些点[1]。

它们还要补充两个标量关系式：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{4}$$

方程(3)可以看作是电荷密度 ρ 的定义方程，方程(4)可以说意味着不存在自由磁极。

从(1)式可以得到(因为 $\operatorname{div}\operatorname{curl} \equiv 0$)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{D}},$$

利用(3)式，此即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{5}$$

类比于流体力学中遇到的一个同样关系，(5)式叫做**连续方程式**。它表明在任何点附近电荷都守恒这一事实。因为如果就任一空间区域对(5)式进行积分，则借助高斯定理可以得到

$$\frac{d}{dt}\int \rho dv + \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = 0, \tag{6}$$

式中第二个积分遍及这空间区域的整个界面，第一个积分则遍及它的整个体积，$\boldsymbol{n}$ 代表单位外向法线。这个方程意味着，区域内所包含的总电荷

$$e = \int \rho\, dv \tag{7}$$

的增加，只能是由于电流的净流入

$$\mathscr{J} = \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\, dS. \tag{8}$$

如果所有场量都不随时间改变，而且还没有电流($\boldsymbol{j} = 0$)，则我们说场是**静态的**。如果所有场量都不随时间改变，但存在电流($\boldsymbol{j} \neq 0$)，则我们说场是**稳定的**。在光学场中，场矢量是时间的函

---

1) 这里采用所谓高斯单位制，即电的量($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$, 和 ρ)以静电单位计，磁的量($\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$)以电磁单位计。方程(1)和(2)中的常数 c 是这两个单位制中单位电荷之比；它是真空中的光速，约等于 3×10^{10} 厘米/秒(较准确的数值见§1.2)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数，变化非常之快；但是场源通常是这样，当对任何宏观时间间隔取平均而不是着眼于瞬时值时，可发现场的性质与取平均的时刻无关。"稳定的"这个词常在更广的意义上来使用，以描写这种类型的场。例如，稳恒的辐射通量(譬如说来自遥远的星)通过一个光学系统时所构成的场就是一个稳定场。

§ 1.1.2 物质方程

麦克斯韦方程(1)—(4)描写了五个基本量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 之间的关系。要能从给定的电流和电荷分布唯一地定出场矢量，还必须给这些方程补充这样的关系式，它们描写物质在场影响下的特性。这些关系式称为物质方程[1](或结构关系式)。一般地说，它们颇为复杂。但是如果物体彼此相对静止不动(或者运动非常缓慢)，而且物质是各向同性的(即它每一点的物理性质不随方向改变)，则它们通常呈如下比较简单的形式[2]：

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{11}$$

式中 σ 叫做电导率，ε 称为介电常数(即电容率)，μ 叫做磁导率。

方程(9)是微分形式的欧姆定律。$\sigma \neq 0$(更准确地说，σ 不是小得可以忽略；然而这句话的确切意思这里不能讨论)的物质叫做导体。金属是很好的导体，但还有它种导电良好的材料，如离子溶液和离子固溶体。金属的电导率随温度的增高而减小。然而，另种称为半导体的材料(例如锗)，电导率在很大温度范围内系随温度而增加。

σ 小到可以忽略的材料叫做绝缘体或电介质。它们的电学性

---

1) 还有另一种描写物质特性的方法。它不是采用 $\varepsilon = D/E$ 和 $\mu = B/H$ 这两个量，而是采用差 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{H}$。这些差具有比较简单的物理意义，我们将在第二章中加以讨论。

2) 更普遍的，对运动媒质也适用的关系式，在相对论中研究。后面，我们只需要用到由更普遍理论得到的如下结果：在电荷运动的情况下，除传导电流 $\sigma\boldsymbol{E}$ 外，还存在一个运流电流 $\rho\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 是运动电荷的速度，ρ 是电荷密度(参见第23页)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

质和磁学性质就完全由 ε 和 μ 来决定．大多数物质的磁导率 μ 实际上等于1．μ 和 1 相差可观的物质则叫做磁性物质．其中 $\mu>1$ 的称为顺磁物质(如铂，氧，氮)，而 $\mu<1$ 的称为逆磁物质(如铋，铜，氢，水)．

如果场异常之强，例如象激光器产生的光经聚焦之后所形成的场，则物质方程式右边可能须要再增加一些幂级高于 1 的场矢分量乘积项[1]．

在许多情况下，σ，ε 和 μ 各量将不随场强改变；然而，在其他情况下，材料的特性不能如此简单描写．例如，在自由离子的气体中，在任何时刻，电流(决定于离子的平均速度)都不依赖于当时的 $\boldsymbol{E}$ 值，而是与 $\boldsymbol{E}$ 过去所有的值有关．再如，在所谓铁磁物质(磁性非常强的物质，如铁、钴、镍)中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的值也决定于磁场 $\boldsymbol{H}$ 过去的历史而不是决定于它当时的值．因此人们说这类物质出现滞后现象．在某些介电材料中，电位移也有同样依赖于历史的性质．所幸，对于光学中遇到的高频场来说，滞后效应甚少重要．

有些物质，光可进入其中而不发生可察觉的减弱(例如空气，玻璃)．这种物质叫做透明体，它们在电学上必定是非导体($\sigma=0$)，因为导电要释放焦耳热(参见 § 1.1，4)，因而要损失电磁能．本书的主要部分将研究光在透明物质中的传播．导电媒质的光学性质将在第十三章中讨论．

---

1) 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 的非线性关系首先由下列作者证明如此：P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters and G. Weinrich, *Phys. Rev. Let.*, **7** (1961), 118. 在必须考虑这种非线性效应的情况下，电磁波传播、折射和反射的理论已由下列作者给出：J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan, *Phys. Rev.*, **127** (1962), 1918; N. Bloembergen and P. S. Pershan, *ibid*, **128** (1962), 606.

关于非线性效应的系统论述，可见 N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (New York, W. A. Benjamin, Inc., 1965) 和 P. S. Pershan, *Progress in Optics*, Vol. 5, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 83。又见P. A. Franken and J. F. Ward, *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 23.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 1.1.3　突变面处的边界条件

麦克斯韦方程只是对这种空间区域来说的，即其中媒质的物理性质(由 ε 和 μ 来表征)在各处都是连续的．但是，在光学中，经常要遇到媒质性质在一个或多个面处有突变的情况．这时，可以预期，矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 也要变成为不连续的，而 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 将退化成相应的面量．现在我们来推导场从这种突变面通过时所服从的各个关系式．

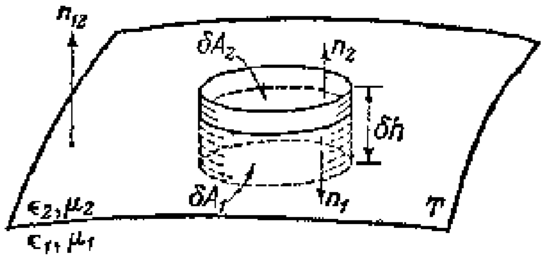


图 1.1　$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 法线分量边界条件的推导

让我们用一个很薄的过渡层来代替锐的突变面 T，在这个过渡层内，ε 和 μ 改变很快，但是是连续地从它们靠 T 这边的值改变到它们靠 T 那边的值．在这个过渡层内，我们作一个小的近似圆柱体，以 T 的法线立栅作为柱帮，以小面积 δA_1 和 δA_2 作为柱顶和柱底，δA_1 和 δA_2 分别在 T 两侧，同 T 的距离沿它们共同法线来量是一常值(图 1.1)．因为在整个圆柱体内 $\boldsymbol{B}$ 和它的微商都可以设为是连续的，所以我们可以把高斯定理应用到对整个圆柱体体积的 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$ 积分，并由 (4) 式得到

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{B} dV = \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0; \tag{12}$$

第二个积分遍及整个圆柱体表面，$\boldsymbol{n}$ 是单位外向法线．

因为我们假设面积 δA_1 和 δA_2 很小，所以可以认为 $\boldsymbol{B}$ 在 δA_1 和 δA_2 上的值 $\boldsymbol{B}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{B}^{(2)}$ 是常数，于是 (12) 式可以改写成

$$\boldsymbol{B}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_1 \delta A_1 + \boldsymbol{B}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n}_2 \delta A_2 + \text{壁的贡献} = 0. \tag{13}$$

如果圆柱体的高 δh 向零减小，则过渡层收缩成面，圆柱壁的贡献就趋向于零，只要没有面磁感应通量．这种通量从不发生，因而在极限情况下，

$$(\boldsymbol{B}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{B}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n}_2)\delta A = 0, \tag{14}$$

δA 是圆柱体和 T 的截面面积．如果 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是单位法线，从媒质 1 指

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

向媒质 2，则 $\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{n}_{12}$, $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}_{12}$, 由 (14) 式得到

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}^{(2)}-\boldsymbol{B}^{(1)})=0, \tag{15}$$

即在通过突变面时磁感应强度法线分量是连续的.

电位移 $\boldsymbol{D}$ 可用同样方法加以处理，但是如果有电荷存在，这里就要另加一项. 现在由 (3) 式出发，取代 (12) 式而得到

$$\int \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,dV=\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=4\pi\int\rho\,dV. \tag{16}$$

当面积 δA_1 和 δA_2 向一起靠拢时，总电荷保持有限，以致体密度变成无穷大. 因此必须用面电荷密度 $\hat{\rho}$ 的概念来代替体电荷密度 ρ. $\hat{\rho}$ 的定义如下[1]:

$$\lim_{\delta h\to 0}\int\rho\,dV=\int\hat{\rho}\,dA. \tag{17}$$

我们后面还要用到面电流密度 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 的概念，它用同样方式定义:

$$\lim_{\delta h\to 0}\int\boldsymbol{j}\,dV=\int\hat{\boldsymbol{j}}\,dA \tag{18}$$

如果面积 δA 和高度 δh 都取得足够小，则 (16) 式给出

$$\boldsymbol{D}^{(1)}\cdot\boldsymbol{n}_1\delta A_1+\boldsymbol{D}^{(2)}\cdot\boldsymbol{n}_2\delta A_2+\text{壁的贡献}=4\pi\hat{\rho}\delta A.$$

壁的贡献随 δh 趋向于零，因此得到，在极限情况下当 $\delta h\to 0$ 时，

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{D}^{(2)}-\boldsymbol{D}^{(1)})=4\pi\hat{\rho}, \tag{19}$$

即当面上存在一层面电荷密度 $\hat{\rho}$ 时，电位移法线分量通过此面时要发生突变，改变量等于 $4\pi\hat{\rho}$.

下面我们来看看切线分量的行为. 我们仍然用一个连续的过渡层代替锐的突变面，但是把图 1.1 的圆柱体换成一个"长方形"面积，令其四边分别与 T 平行和垂直(图 1.2).

令 $\boldsymbol{b}$ 为垂直于长方形平面的单位矢量. 则由 (2) 式和由斯托克斯定理可以得到

---

1) 为了以后使用，我们注明一种用狄喇克 δ 函数 (见附录 4) 表示面电荷密度和面电流密度的方法. 设突变面的方程是 $F(x,y,z)=0$, 则

$$\rho=\hat{\rho}\,|\mathrm{grad}F|\,\delta(F), \tag{17a}$$

$$\boldsymbol{j}=\hat{\boldsymbol{j}}\,|\mathrm{grad}F|\,\delta(F). \tag{18a}$$

把 (17a) 和 (18a) 分别代入 (17) 和 (18), 并利用关系式 $dF=|\mathrm{grad}F|\,dh$ 和 δ 函数的筛选性质，即可验证 (17a) 和 (18a) 两式.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

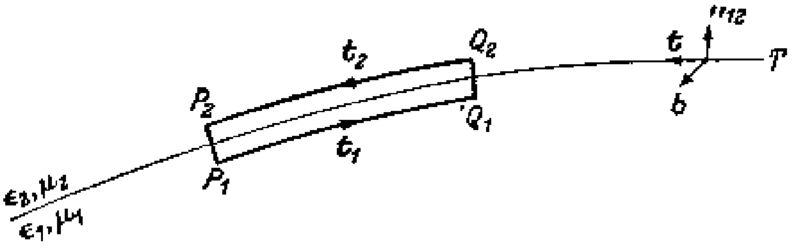


图 1.2　$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 切线分量边界条件的推导

$$\int \operatorname{curl} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{b} dS = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{1}{c} \int \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{b} dS, \tag{20}$$

第一个积分和第三个积分遍及整个长方形面积，而第二个积分是沿着它的周界．如果长度 P_1Q_1 $(=\delta s_1)$ 和 P_2Q_2 $(=\delta s_2)$ 很小，则沿它们各个线段 $\boldsymbol{E}$ 可用常值 $\boldsymbol{E}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{E}^{(2)}$ 来代替．同样 $\dot{\boldsymbol{B}}$ 也可以用一常值代替．于是由 (20) 式得到

$$\boldsymbol{E}^{(1)} \cdot \boldsymbol{t}_1 \delta s_1 + \boldsymbol{E}^{(2)} \cdot \boldsymbol{t}_2 \delta s_2 + \text{两端的贡献} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{b} \delta s \delta h, \tag{21}$$

式中 δs 是长方形和面 T 交截的线元．现在如果令长方形的高 δh 逐渐减小，则 P_1P_2 和 Q_1Q_2 两端的贡献将趋向于零，只要 $\boldsymbol{E}$ 在极限时不获得足够锐的奇异性．这个可能性将被排除．设 $\dot{\boldsymbol{B}}$ 也保持有限，我们得到在极限情况下当 $\delta h \to 0$ 时，

$$(\boldsymbol{E}^{(1)} \cdot \boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{E}^{(2)} \cdot \boldsymbol{t}_2)\delta s = 0. \tag{22}$$

如果 $\boldsymbol{t}$ 是面的单位切线，则(见图 1.2) $\boldsymbol{t}_1 = -\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}_{12}$, $\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}_{12}$, 由 (22) 式得到

$$\boldsymbol{b} \cdot [\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{E}^{(2)} - \boldsymbol{E}^{(1)})] = 0.$$

因为长方形的取向是任意的，因而单位矢量 $\boldsymbol{b}$ 的取向也任意，所以得到

$$\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{E}^{(2)} - \boldsymbol{E}^{(1)}) = 0, \tag{23}$$

即在通过突变面时电矢量切线分量是连续的．

最后考虑磁矢量切线分量的行为．分析方法与前类似，但是如果有电流存在则要另加一项．这时取代 (21) 式而得到

$$\boldsymbol{H}^{(1)} \cdot \boldsymbol{t}_1 \delta s_1 + \boldsymbol{H}^{(2)} \cdot \boldsymbol{t}_2 \delta s_2 + \text{两端的贡献}$$

$$= \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{D}} \cdot \boldsymbol{b} \delta s \delta h + \frac{4\pi}{c} \hat{\boldsymbol{j}} \cdot \boldsymbol{b} \delta s. \tag{24}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

同前，取极限 $\delta h \to 0$，得到

$$\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{H}^{(2)} - \boldsymbol{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c}\hat{\boldsymbol{j}}. \tag{25}$$

由此可见，当存在面电流密度 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 时，磁矢量切线分量（作为矢量看待）发生突变，突变量为 $\frac{4\pi}{c}\hat{\boldsymbol{j}} \times \boldsymbol{n}$.

除去由于媒质的物理性质突变造成不连续性以外，源的存在也可能造成场矢量的不连续．设在某一时刻 $t = t_0$，某源开始辐射，扰动开始向周围空间散播，而在这之后任何时刻 $t_1(t_1 > t_0)$，扰动将充满一个完全确定的区域．通过这个区域的（运动着的）边界时，场矢量将有一突变，从边界上的有限值，一下子变到边界之外的零．

各种不连续情况可以通过把麦克斯韦方程写成积分形式而统统包括进来[1]．一般的不连续条件也可以写成简单差分方程的形式．这些方程的推导在附录 6 中给出．

§1.1.4 电磁场的能量定律

电磁理论把光的强度解释成是场的能通量，因此有必要来回顾一下麦克斯韦理论的能量定律．

由 (1) 和 (2) 可以得到

$$\boldsymbol{E}\cdot \operatorname{curl}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot \operatorname{curl}\boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} + \frac{1}{c}\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}. \tag{26}$$

利用尽人皆知的矢量恒等式，左边的项又可以表成为 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 矢积的散度：

$$\boldsymbol{E}\cdot \operatorname{curl}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot \operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}). \tag{27}$$

由 (26) 和 (27)，有

---

1) 例如，见 A. Sommerfeld, *Electrodynamics* (New York, Academic Press, 1952), p. 11; 或 J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (New York, Mc Graw-Hill, 1941), p. 6.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{1}{c}(\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}})+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}+\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=0. \tag{28}$$

以 $c/4\pi$ 乘此方程，而后对任一体积进行积分并应用高斯定理，从而得到

$$\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}})dV+\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}dV$$
$$+\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}dS=0, \tag{29}$$

式中最后一项积分遍及该体积的周界，$\boldsymbol{n}$ 是单位外向法线.

关系式(29)是麦克斯韦方程的直接结果，因而不管物质方程(9)—(11)成立与否，它都是有效的. 我们将看到，它代表了电磁场的能量定律. 这里将仅就物质方程(9)—(11)被满足的情况加以讨论. 对各向异性媒质的推广以后再行考虑(第十四章)，那里物质方程的形式比较复杂.

引用物质方程后，则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}})&=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\boldsymbol{E})=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\boldsymbol{E}^2)\\&=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}),\\\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}})&=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mu\boldsymbol{H})=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\boldsymbol{H}^2)\\&=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

令

$$w_e=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D},\quad w_m=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{31}$$

和

$$W=\int(w_e+w_m)dV, \tag{32}$$

则(29)式变成

$$\frac{dW}{dt}+\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}dV+\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}dS=0. \tag{33}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

我们将证明W代表体积内所包含的总能量，所以可以认为 w_e 就是场的电能密度，而 w_m就是场的磁能密度[1]。

要证明W是总能量，我们必须证明，对于一个闭合系统(即界面上的场可予忽略的系统)，上面所定义的W的改变等于场对这个系统中带电物质体所做的功。这只要对物质体运动缓慢的情况进行证明就足够了，并且可以假设各物质体本身如此之小，以致可把它们看作是点电荷 $e_k(k=1, 2, \cdots)$。设电荷 e_k 的速度为$\mathbf{v}_k(v_k \ll c)$。

当电荷 e 以速度 $\mathbf{v}$ 运动时，场$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$对它所施加的力由所谓洛伦兹定律给出：

$$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \boldsymbol{B}\right), \tag{34}$$

这个定律是以经验为根据的。由此得到，如果所有电荷 e_k 在 δt时间内位移了 $\delta \boldsymbol{x}_k(k=1, 2, \cdots)$，则场所做的总功为

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \delta \boldsymbol{x}_k=\sum_k e_k\left(\boldsymbol{E}_k+\frac{1}{c} \mathbf{v}_k \times \boldsymbol{B}_k\right) \cdot \delta \boldsymbol{x}_k \\ &= \sum_k e_k \boldsymbol{E}_k \cdot \delta \boldsymbol{x}_k=\sum_k e_k \boldsymbol{E}_k \cdot \mathbf{v}_k \delta t,\end{aligned}$$

因为 $\delta \boldsymbol{x}_k=\mathbf{v}_k \delta t$。如果带电粒子数目很大，则可以认为粒子分布是连续的，并引进电荷密度 ρ (即每单位体积内的总电荷)，于是上一方程变成

$$\delta A=\delta t \int \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{E} d V, \tag{35}$$

这积分是对任意体积来进行的。速度 $\mathbf{v}$ 这个量没有出现在麦克斯韦方程之中，但是可以利用伦琴所得到的一个实验结果[2]把它引进来。按照这一结果，运流电流(即一组运动着的电荷)同导线中的

---

1) 在一般情况下，这两个能量密度由下列二式定义：

$$w_e=\frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{E} \cdot d \boldsymbol{D}, \quad w_m=\frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{H} \cdot d \boldsymbol{B}.$$

当 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的关系是这里所假定的那种线性关系时，这些表达式即化为(31)式。

2) W. C. Röntgen, *Ann. d. Physik.*, **35** (1888), 264; **40** (1890), 93.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

传导电流具有同样的电磁效应．因此，麦克斯韦方程中的电流密度 $\boldsymbol{j}$ 可分成两部分

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_c+\boldsymbol{j}_v, \tag{36}$$

其中

$$\boldsymbol{j}_c=\sigma\boldsymbol{E}$$

是传导电流密度，而

$$\boldsymbol{j}_v=\rho\boldsymbol{v}$$

代表运流电流密度．(35)式因此可以写成为

$$\delta A=\delta t\int\boldsymbol{j}_v\cdot\boldsymbol{E}dV. \tag{37}$$

现在让我们用下列关系式来定义一个矢量 $\boldsymbol{S}$ 和一个标量 Q：

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \tag{38}$$

$$Q=\int\boldsymbol{j}_c\cdot\boldsymbol{E}dV=\int\sigma E^2dV. \tag{39}$$

于是由(36)、(37)和(39)式，

$$\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}dV=Q+\int\boldsymbol{j}_v\cdot\boldsymbol{E}dV=Q+\frac{\delta A}{\delta t}, \tag{40}$$

其中函数 $\delta A/\delta t$ 当然不是空间时间函数的全微商．(33)式现在可以写成如下形式：

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{\delta A}{\delta t}-Q-\int\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}dS. \tag{41}$$

对于非导体 $(\sigma=0)$，$Q=0$．此外，假定界面离得很远，以致内部电磁过程在它上面产生的场可予忽略；于是 $\int\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}dS=0$，由(41)式积分得到

$$W+A=\text{常数}. \tag{42}$$

因此，对于一个孤立系统，每单位时间内 W 的增加是由于在这个时间内对这系统所做的功．这个结果证明我们用(32)式来定义电磁能是正确的．

Q 这一项代表导体 $(\sigma\neq 0)$ 中电阻的能量消耗（叫做焦耳

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

热）．按照(41)式，如果场的范围扩大到界面，则能量还要进一步减少．因此面积分必须代表通过这个界面的能流．矢量 $\boldsymbol{S}$ 通常称为坡印廷矢量，它代表在垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 方向的单位面积上每秒通过的能量．

应该注意，把 $\boldsymbol{S}$ 解释作能流（更确切地说，是能流密度）是一种抽象概念，它带有一定程度的任意性．因为，按照(41)式，有物理意义的量并不是 $\boldsymbol{S}$ 本身，而是对一个闭合面的 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}$ 的积分．很清楚，从这积分的值并不能够得出关于 $\boldsymbol{S}$ 分布细目的确定无疑的结论，因而其他的能通量密度定义也是可能的．我们总可以在 $\boldsymbol{S}$ 上加上一个任意矢量的旋度，因为从高斯定理和恒等式 div curl $\equiv 0$ 能够看出，这样的项对面积分将没有贡献[1]．然而，当谨慎地应用这个定义，特别是对很小的但是有限的空间或时间范围取平均值时，还未曾发现它和实验有过矛盾．因此我们将采纳上面坡印廷矢量所表示的能流密度定义．

最后我们指出，在不导电媒质中 $(\sigma=0)$，当不作机械功时 $(A=0)$，能量定律可以写成不可压缩流体所具有的那种流体动力学连续方程的形式：

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{S}=0 \qquad (w=w_e+w_m). \tag{43}$$

借用流体动力学模型来描述光的传播常常是有帮助的，特别是在几何光学领域和在标量衍射场方面，因为这个模型简单而形象地描绘出了能量的输运．在光学中，（平均）坡印廷矢量是一个最重要的量．坡印廷矢量的大小是光强的一个量度，而它的方向代表着光的传播方向．

§1.2　波动方程和光速

麦克斯韦方程组以联立微分方程关联了各场矢量．通过消

---

1) 按照近代场论，这任意性甚至更大，能量密度和能通量二者都允许表成它种形式，但是须符合于场的拉格朗日密度函数附加一个4-散度的改变．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

元，我们就得到每个矢量所必须单独满足的微分方程。我们将单单注意场中不含电荷和电流即 $\mathbf{j}=0$ 和 $\rho=0$ 的那种地区。

把物质方程 §1.1(11) 式的 $\boldsymbol{B}$ 代入第二个麦克斯韦方程 §1.1(2)，而后两边除以 μ 并运用算符 curl，由此得出

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\right)+\frac{1}{c}\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{H}}=0. \tag{1}$$

然后取第一个麦克斯韦方程 §1.1(1) 对时间的微商，用物质方程 §1.1(10) 代换 $\boldsymbol{D}$，并消去所得方程和方程 (1) 的 curl $\boldsymbol{H}$，由此得出

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\right)+\frac{\varepsilon}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}}=0. \tag{2}$$

如果利用恒等式 $\operatorname{curl}u\mathbf{v}=u\operatorname{curl}\mathbf{v}+(\operatorname{grad}u)\times\mathbf{v}$ 和 $\operatorname{curl}\operatorname{curl}=\operatorname{grad}\operatorname{div}-\nabla^2$，则 (2) 式变成

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}}+(\operatorname{grad}\log\mu)\times\operatorname{curl}\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0. \tag{3}$$

此外，从 §1.1(3) 式出发，再利用物质方程代 $\boldsymbol{D}$ 并应用恒等式 $\operatorname{div}u\mathbf{v}=u\operatorname{div}\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}u$，即得到

$$\varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon=0. \tag{4}$$

因此 (3) 式可以写成如下形式：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}}+(\operatorname{grad}\log\mu)\times\operatorname{curl}\boldsymbol{E}$$
$$+\operatorname{grad}(\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{grad}\log\varepsilon)=0. \tag{5}$$

用同样方法可得到单独的 $\boldsymbol{H}$ 方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\boldsymbol{H}}+(\operatorname{gard}\log\varepsilon)\times\operatorname{curl}\boldsymbol{H}$$
$$+\operatorname{grad}(\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{grad}\log\mu)=0. \tag{6}$$

特别说来，如果媒质是均匀的，则 $\operatorname{grad}\log\varepsilon=\operatorname{grad}\log\mu=0$，(5) 和 (6) 遂化为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}}=0,\quad \nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\boldsymbol{H}}=0. \tag{7}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这些是标准的波动方程，它们意味着有电磁波存在，其传播速度[1]

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{8}$$

常数 c 首先由科耳劳什和韦伯于 1856 年从测量电容器的静电单位电容和电磁单位电容之比定出。结果发现，它和光在自由空间中的速度相同。麦克斯韦利用这一结果，创立了光的电磁理论，预言有电磁波存在。这个预言的正确性后为赫兹的著名实验所证实(参见历史引言)。

在所有光的波动理论中，引起光的感觉的那个基本过程都被看作是一个空间-时间上的谐波(我们在 §1.3 和 §1.4 中研究它最简单的形式)。如果它的频率在大约 4×10^{14}—7.5×10^{14} 秒$^{-1}$ 范围，它就产生一定颜色的生理感觉。(但是如果反过来说一定主观性质的色光可以是频率分布非常不同的多种谐波的混合，这是不正确的，颜色和频率之间的实际关系是很复杂的，本书将不去研究它[2]。

第一个光速测定[3]是由罗麦于 1675 年从木卫一星蚀观测作出的，后来布雷德利于 1728 年又用不同方法(从恒星光行差)作了测定。

第一个对地面光源光速的测量是由斐索于1849年实现的。这必须采用一个光调制器，以标截出一段光束[4]，为此斐索用了一个转轮。后来的方法采用了转镜或电子光闸。转镜方法是惠斯通(C. Wheatstone)于1834年提出来的，1860年为傅科所采用。之后迈克耳孙用多年时间把它加以系统发展。根据迈克耳孙大约200

1) 电磁波的速度的概念，只有在类型非常简单的波，例如平面波，实际才具有明确的意义。v 并不代表 (7) 的任意解的传播速度，这是很明显的，如果我们记得这些方程也允许有驻波解的话。

在这简介性的一节中，我们假定读者对平面波的概念是熟悉的，并把 v 看成是这种波前进的速度。平面波的数学表达将在 §1.3 和 §1.4 中讨论。

2) 然而，§4.8.1 中将简单讨论一下人的眼睛对不同颜色的灵敏度。

3) 关于各种光速测定方法的叙述，例如见 E. Bergstrand, *Encyclopedia of Physics*, edit. S. Flügge, (Berlin, Springer), **24** (1956), 1.

对不同方法所得结果的详细分析，也由 R. T. Birge 给出，见 *Rep. Progr. Phys.* (London, The Physical Society), **8**, (1941), p. 90.

4) 这种测定实质上给出的是群速(见 §1.3.4)。在标准温度和标准压力的空气中，群速和相速之差大约是1/50000.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

次测量的平均值，得到 c 为 299,796 公里/秒．采用克尔盒的光闸方法是由卡罗卢斯（A. Karolus）和米特耳斯泰特（O. Mittelstaedt, 1928），安德森（W. C. Anderson, 1937），和赫特耳（A. Hüttel, 1940）发展起来的．这些测量所得到的 c 值，同间接方法如测量静电单位和电磁单位的电荷之比所提供的 c 值，符合得非常好．例如，罗沙（E. B. Rosa）和多尔赛（N. E. Dorsey, 1907）用这种间接方法得到 c 为 299,784 公里/秒．梅勒（A. Mereier, 1923）测量了电磁波在导线上的速度，得到 c 值等于 299,782 公里/秒．伯奇（R. T. Birge, 1941 年，见前引文献）仔细分析了所有可用的数据，从而取 c 值为

$$c = 299776 \pm 4 \text{ 公里/秒}. \tag{9}$$

从各种各样不同测量（在一些情况下使用的辐射的频率和光学测量中所用的要差几十万倍）得到的 c 值如此接近一致，这使麦克斯韦理论得到了鲜明的确证．

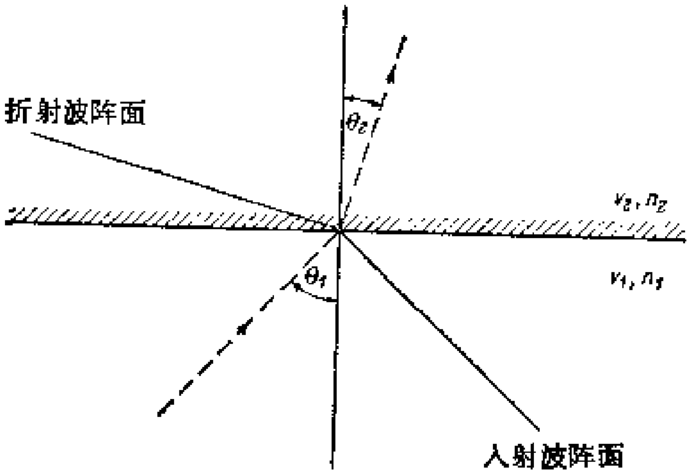


图 1.3　平面波折射图示

介电常数 ε 通常大于1，而磁导率 μ 对于透明物质来说实际上等于 1，所以按照（8）式这时速度 v 要小于真空速度 c．1850 年傅科和斐索首先对水中光速进行了测量，从而证实了这一结论．

v 值通常不是直接测定的，而只是依靠折射定律确定它和 c 的比．按照这一定律，如果一平面电磁波射到两个均匀媒质之间的界平面上，则入射波法线与界面法线夹角 θ_1 的正弦同折射波法

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

线与界面法线夹角 θ_2 的正弦之比是一常数（图 1.3），这个常数等于两个媒质中的传播速度 v_1 和 v_2 之比：

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2} \tag{10}$$

这个结果将在 § 1.5 中推导. 这里我们仅仅指出，这就等于假定波阵面在界面处是连续的（虽然有一折），即入射波阵面与界面的截线同折射波阵面与界面的截线以同一速度（譬如说 v'）前进. 于是，

$$v_1=v'\sin\theta_1,\quad v_2=v'\sin\theta_2, \tag{11}$$

从上二式中消去 v'，即得到（10）式. 这一论证，在稍加修饰的形式下，常被给出作为惠更斯作图法（参见 §3.3）的一个示例.

（10）式中的常数比值通常用 n_{12} 代表，叫做折射率，它是对第一媒质到第二媒质的折射来说的. 此外我们还给媒质定义一个“绝对折射率” n：它是从真空折射到这个媒质时的折射率，

$$n=\frac{c}{v}. \tag{12}$$

如果 n_1 和 n_2 是二个媒质的绝对折射率，则从第一媒质折射到第二媒质时的（相对）折射率

$$n_{12}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}. \tag{13}$$

把（12）式和（8）式比较一下，就得到下列麦克斯韦公式：

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{14}$$

因为对于所有我们将要涉及到的物质来说，μ 实际上都是 1（非磁性物质），所以这时折射率 n 应等于介电常数 ε 的平方根，这个 ε 我们曾假设它是物质的一个常数. 但是另一方面，众所周知的由牛顿首先作出的三棱镜分光实验表明，折射率系随光的颜色，即随光的频率而改变的. 如果我们要保留麦克斯韦公式，则必须假设 ε 不是物质的一个特征常数，而是场的频率的函数. ε 对频率的依赖关系只有把物质的原子结构考虑进来才能处理，我们将在 § 2.3 中加以简单讨论.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

对于象气体这种化学结构简单、对光实际上不产生色散作用的物质来说，就是说对于光学性质不强烈依赖于光的颜色的物质来说，麦克斯韦公式（令其 ε 等于静介电常数）是很好的近似．表 1 给出玻耳兹曼[1]对这种气体早期测量的一些结果．对于液体烃，(14) 式也有很好的近似；例如，苯 C_6H_6 对黄光的 $n=1.482$，而 $\sqrt{\varepsilon}=1.489$． 另一方面，对于许多固体（如玻璃）和一些液体，情况和公式(14)有很大的偏离，如表 2 所示．

表 1

	n（黄光）	$\sqrt{\varepsilon}$
空　气	1.000294	1.000295
氢　H_2	1.000138	1.000132
二氧化碳 CO_2	1.000449	1.000473
一氧化碳 CO	1.000340	1.000345

表 2

	n（黄光）	$\sqrt{\varepsilon}$
甲醇 CH_3OH	1.34	5.7
乙醇 C_2H_5OH	1.36	5.0
水 H_2O	1.33	9.0

§1.3　标　量　波

在一个均匀媒质中，在没有电流和电荷的区域，场矢量的每个直角分量 $V(\boldsymbol{r},t)$，按照 §1.2(7) 式，都满足齐次波动方程

$$\nabla^2 V-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

现在我们来简略地考查一下这个方程最简单的解．

1) L. Boltzmann, *Wien. Ber.*, **69** (1874), 795; *Pogg. Ann.*, **155** (1875), 403; *Wiss. Abh. Physik-tech. Reichsanst.*, **1** Nr. 26, 537.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 1.3.1　平面波

令 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 为空间某一点 P 的位置矢量，$\boldsymbol{s}(s_x, s_y, s_z)$ 为某一固定方向上的单位矢量．任何属于

$$V = V(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}, t) \tag{2}$$

这种函数形式的(1)式解，我们都说它代表一个平面波，因为在各个时刻，在与单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 相垂直的各个平面

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s} = \text{常数}$$

上，V 是一常数．

方便的做法是选取一组新的笛卡儿坐标轴 $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$，使 $O\zeta$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向上．于是(见图 1.4)

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s} = \zeta, \tag{3}$$

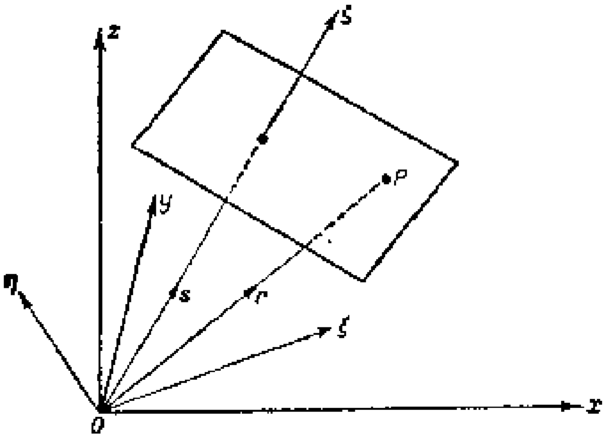


图 1.4　平面波的传播

并且

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad \frac{\partial}{\partial y} = s_y\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad \frac{\partial}{\partial z} = s_z\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

从这些关系很容易得到

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}, \tag{4}$$

因而(1)式变成为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

如果令

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\zeta - vt = p, \quad \zeta + vt = q \tag{6}$$

则(5)式呈

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} = 0. \tag{7}$$

这个方程的普遍解是

$$V = V_1(p) + V_2(q) = V_1(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} - vt) + V_2(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} + vt), \tag{8}$$

式中 V_1 和 V_2 是两个任意函数.

我们看到,当把(ζ, t)换成$(\zeta + v\tau, t + \tau)$——其中 τ 为任意——时,则 V_1 的宗量不变. 因此 V_1 代表一个沿正 ζ 方向、以速度 v 传播的扰动. 同样, $V_2(\zeta + vt)$ 代表一个沿负 ζ 方向以速度 v 传播的扰动.

§1.3.2 球面波

其次,我们考虑代表球面波的解,即属于

$$V = V(r, t) \tag{9}$$

这种函数形式的解, 其中 $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

利用关系式 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, 等等, 经过一步步计算,可得到

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV), \tag{10}$$

因而波动方程(1)现在变成为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rV) = 0. \tag{11}$$

这个方程和方程(5)相同, 只要把(5)中的 ζ 换成 r, V 换成 rV. 因此(11)式的解可立即据(8)式得出:

$$V = \frac{V_1(r - vt)}{r} + \frac{V_2(r + vt)}{r}, \tag{12}$$

V_1 和 V_2 仍然是二个任意函数. (12)式右边第一项代表一个从原点向四外发散的球面波,第二项则代表一个向原点会聚的球面波,两种情况的传播速度都是 v.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§1.3.3 谐波 相速

在空间某一点 $\boldsymbol{r}_0$，波扰动只是时间的函数：

$$V(\boldsymbol{r}_0,t)=F(t). \tag{13}$$

从前面关于颜色的说明显然可见，F 是周期函数的情况特别重要。因此我们讨论当

$$F(t)=a\cos[\omega t+\delta] \tag{14}$$

时的情况．式中 $a(>0)$ 叫做振幅，余弦项的宗量 $\omega t+\delta$ 叫做位相，或简称相．量

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{T} \tag{15}$$

叫做频率，代表每秒振动次数． ω 叫做角频率，是 2π 秒内的振动次数．因为当 t 换成 $t+T$ 时 F 保持不变，所以 T 是振动的周期．属于(14)这种形式的波函数（即波动方程的解），我们说它在时间方面是谐波．

让我们首先考虑，一个谐平面波沿单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 规定的方向传播时波函数的形式．按照 §1.3.1，把(14)式中的 t 换成 $t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}/v$，即可得到这一波函数：

$$V(\boldsymbol{r},t)=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{v}\right)+\delta\right]. \tag{16}$$

方程(16)在 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$ 被换成 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}+\lambda$ 时保持不变，其中

$$\lambda=v\frac{2\pi}{\omega}=vT. \tag{17}$$

长度 λ 叫做波长．此外定义一个约化波长 λ_0：

$$\lambda_0=cT=n\lambda \tag{18}$$

也是有用的．这是同频率的谐波在真空中传播时的相应波长．在光谱学上还采用波数[1] κ 的概念，它是每单位长度（厘米）的真空波长数：

---

1) 我们将以 κ 作为"光谱学波数"，而按光学中的习惯，把"波数"一词保留给(20)式和(21)式所定义的 k 或 k_0.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\kappa = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\nu}{c} \tag{19}$$

此外为方便起见，在传播方向 $\mathbf{s}$ 上定义二个矢量 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}_0$，长度分别为

$$k_0 = 2\pi\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}, \tag{20}$$

$$k = nk_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}. \tag{21}$$

矢量 $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ 叫做媒质中的波矢量或传播矢量，$\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{s}$ 则是真空中的相应矢量.

常数 δ 也可用程长 l 的概念来代替，它是当位相增加 δ 时某一波阵面所后退的距离：

$$l = \frac{v}{\omega}\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n}\delta. \tag{22}$$

现在让我们考虑形式更复杂的时间谐波．一个普遍的频率为 ω 的实标量时间谐波，可定义为波动方程的下列形式的实解：

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r})\cos[\omega t - g(\mathbf{r})] \tag{23}$$

$a(>0)$ 和 g 是位置的实标量函数．面

$$g(\mathbf{r}) = 常数 \tag{24}$$

叫做等相面或波面．与前一情况大不相同，波(23)的等幅面和等相面一般不相重合．这样的波称为非均匀波．

用指数函数代替三角函数，可简化对谐波的计算．方程(23)可写成为

$$V(\mathbf{r},t) = \mathscr{R}\{U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}, \tag{25}$$

式中

$$U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})e^{ig(\mathbf{r})}, \tag{26}$$

而 $\mathscr{R}$ 代表实部．把(25)式代入波方程(1)，得到 U 必须满足方程

$$\nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0. \tag{27}$$

U 叫做波的复振幅[1]．特别是若波是平面波，则

---

1) 在平面波情况下，常把常数因子 $e^{-i\omega t}$ 单独分出，而只以变数部分 $ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 归入复振幅．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$g(\boldsymbol{r}) = \omega\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{v}\right) - \delta = k(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}) - \delta = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \delta. \tag{28}$$

如果对 V 的运算都是线性的，则可取消 (25) 式中的符号 $\mathscr{R}$ 而直接用复函数运算，这时最后式子的实部即代表所求的物理量．然而，当处理包含象平方等这种非线性运算的式子时（例如在计算电能密度或磁能密度时），一般就必须先取实部而后再行运算[1]．

与平面谐波不同，更普遍的波 (25) 式在空间上不是周期的．然而，可以看出，假如 dt，$d\boldsymbol{r}$ 满足

$$\omega\, dt - (\mathrm{grad}\ g)\cdot d\boldsymbol{r} = 0, \tag{29}$$

则位相 $\omega t - g(\boldsymbol{r})$ 在 $(\boldsymbol{r}, t)$ 和 $(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r},\ t + dt)$ 是相同的．设 $\boldsymbol{q}$ 代表 $d\boldsymbol{r}$ 方向上的单位矢量，并写成 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}ds$，则由 (29) 式可得

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}\ g}. \tag{30}$$

当 $\boldsymbol{q}$ 垂直于等相面，即 $\boldsymbol{q} = \mathrm{grad}\ g/|\mathrm{grad}\ g|$ 时，(30) 式的数值将最小，其值为

$$v^{(p)}(\boldsymbol{r}) = \frac{\omega}{|\mathrm{grad}\ g|}. \tag{31}$$

$v^{(p)}(\boldsymbol{r})$ 叫做**相速**，是等相面前进的速度．对于平面电磁波，由(28)式可得 $\mathrm{grad}\ g = \boldsymbol{k}$，因此

$$v^{(p)} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

其中利用了 (21) 式．对于形式更为复杂的波，相速 $v^{(p)}$ 一般将不等于 $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$，即使在均匀媒质中，它也将逐点改变．然而，后面将要看到 (§ 3.1.2)，当频率足够大时，即使对于等相面不是平面的这种波，相速也**近似地**等于 $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$．

必须指出，(30) 所给出的 ds/dt 表达式并不是相速在 $\boldsymbol{q}$ 方向上的分解，即相速不能作为一个矢量．反之，它的倒数，即量

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}\ g}{\omega}, \tag{32}$$

---

1) 当只要求二次式的时间平均值时，这并非必要[参见 § 1.4 方程 (54)—(56)]．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

可以看出是矢量 $(\text{grad}\ g)/\omega$ 在 $\boldsymbol{q}$ 方向上的分量. 矢量 $(\text{grad}\ g)/\omega$ 有时叫做相迟.

相速在某些情况下可大于 c. 对于平面波,当 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 小于 1 时,例如在色散媒质的所谓反常色散区[1](参见 § 2.3.4),相速即大于 c. 按照相对论,信号的传播速度决不能超过 c. 这就意味着相速不能承当信号的传播速度. 事实上很容易看出,相速不能从实验上测定,因而必须认为它缺乏任何直接物理意义. 因为要测量这个速度,就需要在这无限延展、光滑的波上作一个记号,去测量它的速度. 然而,这样做就要把无限长的谐波波列变换成另一个空间和时间的函数了.

§ 1.3.4 波包 群速

前节中所讨论的单色波是理想化的波,实际上决不可能严格实现. 根据傅里叶定理,任何波 $V(\boldsymbol{r},t)$(假定它满足某些很一般的条件)都可以看成是不同频率的单色波的叠加:

$$V(\boldsymbol{r},t)=\int_0^\infty a_\omega(\boldsymbol{r})\cos[\omega t-g_\omega(\boldsymbol{r})]d\omega. \tag{33}$$

方便的做法还是采用复数表示,把 V 看作是一个综合复波[2]的实部:

$$V(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{R}\int_0^\infty a_\omega(\boldsymbol{r})e^{-i[\omega t-g_\omega(\boldsymbol{r})]}d\omega. \tag{33a}$$

一个波,如果它的傅里叶振幅 a_ω 只是在平均频率 $\bar{\omega}$ 两旁很窄的范围

$$\bar{\omega}-\frac{1}{2}\Delta\omega\leqslant\omega\leqslant\bar{\omega}+\frac{1}{2}\Delta\omega \qquad (\Delta\omega/\bar{\omega}\ll 1)$$

---

1) 电磁信号在色散媒质中的传播问题,曾由下列作者作了非常详细的研究: A. Sommerfeld, *Ann. d. Physik*, **44** (1914), 177; L. Brillouin, *ibid.*, **44** (1914), 203. 这两篇论文的英文译文收集在 L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity* (New York, Academic Press, 1960), 17, 43. 又见 H. G. Baerwald, *ibid.* (5), **6** (1930), 295; **7** (1930), 731; **8** (1931), 565.

2) 关于实多色波的复数表示,更详细的讨论见 § 10.2.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

内才显著不为零，则可称之为“近单色波”。这种情况就是通常所说的波群或波包[1]。

为了说明波群的一些主要性质，先讨论二个平面单色波叠加形成的波，这二个平面单色波振幅相同，而频率和波数各相差少许，并且都沿 z 轴方向传播：

$$V(z,t)=ae^{-i(\omega t-kz)}+ae^{-i[(\omega+\delta\omega)t-(k+\delta k)z]}. \qquad (34)$$

这里，按照前面说明的惯例，略去了符号 $\mathscr{R}$。方程 (34) 可以写成下列形式：

$$\begin{aligned}V(z,t)&=a\{e^{\frac{1}{2}i(t\delta\omega-z\delta k)}+e^{-\frac{1}{2}i(t\delta\omega-z\delta k)}\}e^{-i(\bar\omega t-\bar k z)}\\&=2a\cos\left[\frac{1}{2}(t\delta\omega-z\delta k)\right]e^{-i(\bar\omega t-\bar k z)},\end{aligned} \qquad (35)$$

式中

$$\bar\omega=\omega+\frac{1}{2}\delta\omega,\quad \bar k=k+\frac{1}{2}\delta k \qquad (36)$$

分别是平均频率和平均波数。(35)式可解释成是代表一个频率为 $\bar\omega$、波长为 $2\pi/\bar k$、沿 z 方向传播的平面波。然而这个波的振幅不是常量，而是随时间和位置在 $2a$ 和 0 之间改变(图 1.5)，产生众所周知的拍的现象。振幅函数有一系列极大，相互间隔为

$$\delta t=\frac{4\pi}{\delta\omega}\ (z\ 固定)\ 或\ \delta z=\frac{4\pi}{\delta k}\ (t\ 固定), \qquad (37)$$

而位相函数的各个极大相隔为

$$\delta t=\frac{2\pi}{\bar\omega}\ (z\ 固定)\ 或\ \delta z=\frac{2\pi}{\bar k}\ (t\ 固定). \qquad (38)$$

因为 $\delta\omega/\bar\omega$ 和 $\delta k/\bar k$ 假设比 1 小得多，所以振幅的改变比另一项要缓慢。

由 (35) 式可知，等幅平面(特别地说，振幅极大)的传播速度

$$v^{(g)}=\frac{\delta\omega}{\delta k}, \qquad (39)$$

1) 严格地说，要 V 能显示通常归属于波群的那些性质，还应假定在整个有效频率范围内位相函数 g_ω 可以近似地表成为 ω 的线性函数。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

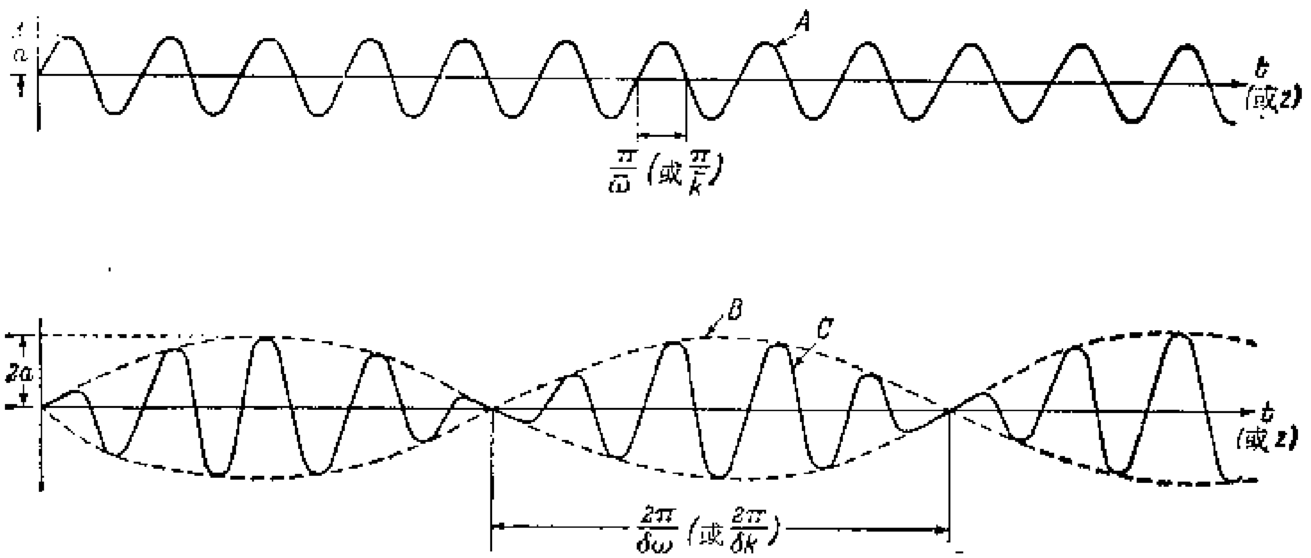


图1.5 简单的波群

(A) 波 $a\cos(\bar\omega t-\bar kz)$.

(B) 波 $2a\cos\left[\frac{1}{2}(t\delta\omega-z\delta k)\right]$.

(C) 波群 $2a\cos\left[\frac{1}{2}(t\delta\omega-z\delta k)\right]\cos(\bar\omega t-\bar kz)$.

横坐标代表二个自变数中的一个（t 或 z），而另一个保持不变。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

而等相平面的传播速度

$$v^{(p)}=\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}. \tag{40}$$

$v^{(g)}$ 叫做波的群速. 因为 V 遵守波动方程，频率 ω 和波数 k 是有关联的；在一个折射率为 n 的媒质中，有(见(21)式)

$$k=n(\omega)\frac{\omega}{c}, \tag{41}$$

式中 $n(\omega)$ 是折射率函数. 方程(41)表明波的色散. 在非色散媒质中，n 不随 ω 改变，于是相速 $v^{(p)}$ 和群速 $v^{(g)}$ 都等于 c/n. 然而，在色散媒质中，这两个速度一般将不相同.

由于 $\delta\omega$ 设为很小，$\delta\omega/\delta k$ 可用微商系数 $d\omega/dk$ 代替，因此群速表达式可写成

$$v^{(g)}=\frac{d\omega}{dk}. \tag{42}$$

事实上，这个关系在更普遍的情况下也仍然有效，现在我们就来证明这一点. 考虑一个一维波群

$$V(z,t)=\int_{(\Delta\omega)}a_{\omega}e^{-i(\omega t-kz)}d\omega, \tag{43}$$

式中 $\Delta\omega$ 代表 a_{ω} 显著不为零的频率区间，范围很小，其平均频率为 $\bar{\omega}(\Delta\omega/\bar{\omega}\ll 1)$. 设 $\bar{k}=n(\bar{\omega})\bar{\omega}/c$ 为相应的波数. 于是(43)式可表成下列形式:

$$V(z,t)=A(z,t)e^{-i(\bar{\omega}t-\bar{k}z)}, \tag{44}$$

式中

$$A(z,t)=\int_{(\Delta\omega)}a_{\omega}e^{-i[(\omega-\bar{\omega})t-(k-\bar{k})z]}d\omega,$$

如果 $\Delta\omega$ 足够小，则

$$A(z,t)\sim\int_{(\Delta\omega)}a_{\omega}e^{-i\left[(\omega-\bar{\omega})\left\{t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\bar{\omega}}z\right\}\right]}d\omega. \tag{45}$$

V 仍然可以解释成是一个变幅平面波，其频率为 $\bar{\omega}$，波数为 $\bar{k}$，沿 z 方向传播. 振幅 $A(z,t)$ 被表成为频率为 $\omega-\bar{\omega}$ 的各谐波的叠加. 因为假设 $\Delta\omega/\bar{\omega}$ 比 1 小得多，所以 A 的改变比另一项要缓

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

慢．一般 A 是复数，因而对位相 $\bar{\omega}t-\bar{k}z$ 有贡献 $(\arg A)$，可以看到，面

$$t=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\bar{\omega}}z \tag{46}$$

具有特别的意义：在每个这样的面上，$A(z,t)$ 是常量．因此，一定 A 值（其中包括 $|A|$ 的极大）的前进速度就是**群速**

$$v^{(g)}=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\bar{k}}, \tag{47}$$

结果同前．

可以看出，群速和相速有下列关系：

$$v^{(g)}=\frac{d}{dk}(v^{(p)}k)=v^{(p)}+k\frac{dv^{(p)}}{dk}=v^{(p)}-\lambda\frac{dv^{(p)}}{d\lambda}, \tag{48}$$

式中所有的量都是对平均频率 $\bar{\omega}$ 来说的．

最后，我们来讨论一般的三维波群

$$V(\mathbf{r},t)=\mathscr{R}\int_{(\Delta\omega)}a_{\omega}(\mathbf{r})e^{-i[\omega t-g_{\omega}(\mathbf{r})]}d\omega. \tag{49}$$

同 (43) 式类比，我们把对应于平均频率 $\bar{\omega}$ 的那一项单分出来，写成

$$V(\mathbf{r},t)=A(\mathbf{r},t)e^{-i[\bar{\omega}t-g_{\bar{\omega}}(\mathbf{r})]}, \tag{50}$$

式中

$$A(\mathbf{r},t)=\int_{(\Delta\omega)}a_{\omega}(\mathbf{r})e^{-i\{(\omega-\bar{\omega})t-[g_{\omega}(\mathbf{r})-g_{\bar{\omega}}(\mathbf{r})]\}}d\omega,$$

如果 $\Delta\omega$ 足够小，则

$$A(\mathbf{r},t)\sim\int_{(\Delta\omega)}a_{\omega}(\mathbf{r})e^{-i\left\{(\omega-\bar{\omega})\left[t-\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\bar{\omega}}\right]\right\}}d\omega. \tag{51}$$

方程 (50) 代表一个频率为 $\bar{\omega}$ 的波，它的振幅 $A(\mathbf{r},t)$（一般是复的）在空间和时间上都是变化的，这个变化仍然比另一项缓慢．同 (46) 式类比，可以预期，面

$$t=\left[\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right]_{\bar{\omega}} \tag{52}$$

具有特别的意义．然而，这里在每个这样的面上，振幅函数 A 不一

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

定是常量，因为傅里叶振幅 a_ω 这时不仅是频率的函数，而且也是位置的函数. (52) 式的意义通过对振幅绝对值 $M = |A|$ 的分析即可看到. 取M平方，有

$$M^2(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t)A^*(\mathbf{r}, t)$$

$$= \int_{(\Delta\omega)}\int_{(\Delta\omega)} a_\omega(\mathbf{r}) a_{\omega'}(\mathbf{r}) e^{-i\left\{(\omega-\omega')\left[t-\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\bar{\omega}}\right]\right\}} d\omega d\omega'. \quad (53)$$

显然，这个重积分的虚部等于零，因为 M^2 是实的(从公式上看，把两个自变数 ω 和 ω' 进行交换并注意这时被积函数的虚部易号，即可证明). 因此

$$M^2(\mathbf{r}, t) = \int_{(\Delta\omega)}\int_{(\Delta\omega)} a_\omega(\mathbf{r}) a_{\omega'}(\mathbf{r})$$

$$\times \cos\left\{(\omega-\omega')\left[t-\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\bar{\omega}}\right]\right\} d\omega d\omega'. \quad (54)$$

如果我们盯住任一特别点 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$，并记住 a_ω 非正即零，则可看出，当余弦项的宗量为零即 $t = \left(\frac{\partial g(\mathbf{r}_0)}{\partial\omega}\right)_{\bar{\omega}}$ 时，$M^2(\mathbf{r}_0, t)$ 达到它极大. 由此可见，(52) 式代表这样一些面，这些面上的振幅绝对值，像刚才所解释的那样在时间 t 达到它的极大. 因此，把一般三维波群的群速定义为这些面的前进速度是适宜的. 如果取一个很小的位移 $\delta\mathbf{r} = \mathbf{q}\delta s$，其中 $\mathbf{q}$ 是与这面垂直的单位矢量，则由 (52) 式得到相应的改变 δt 为

$$\delta t = \delta s\left|\mathrm{grad}\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\bar{\omega}}\right|, \quad (55)$$

因而一般三维波群的群速

$$v^{(g)} = \frac{1}{\left|\mathrm{grad}\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\bar{\omega}}\right|}. \quad (56)$$

读者可将此式与一般谐波的相速表达式 (31)

$$v^{(p)} = \frac{1}{\left|\mathrm{grad}\,\frac{g}{\omega}\right|} \quad (57)$$

作一比较. 在特别情况下，当波群系由沿 z 方向传播的平面波组

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

成时，$g_\omega = k_z$，(56)式遂化为(47)式.

从以上讨论显然可见，有效频率范围 $\Delta\omega$ 是有关波群的一个重要参量；正是这个量，它实际上决定着振幅和位相的涨落快慢. 如果媒质没有强烈的色散，一个波群将能传播相当长一段距离而不发生显著的"扩散". 在这种情况下，可以认为群速是波群作为一个整体传播的速度，它也将代表能量传播的速度[1]. 然而，一般来说这是不正确的. 特别是，在反常色散(参见 § 2.3.4)区域，群速可超过光速或变成负的，在这种情况下它就不再具有任何明显的物理意义了.

§ 1.4 矢 量 波

§ 1.4.1 一般的电磁平面波

最简单的电磁场是一个平面波的电磁场；这时，按照 § 1.3.1，场矢量的各个笛卡儿分量以及因此 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都只是变数 $u = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s} - vt$ 的函数:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s} - vt),\quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s} - vt), \tag{1}$$

同前，式中 $\boldsymbol{s}$ 代表传播方向上的单位矢量.

设用一点"·"表示对 t 微商，用一撇"'"表示对 u 微商，则有

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{E}} = -v\boldsymbol{E}',\\ &(\operatorname{curl}\boldsymbol{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = E'_z s_y - E'_y s_z = (\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}')_x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

把这些式子代入麦克斯韦方程 § 1.1(1)，(2)，令其中 $\boldsymbol{j} = 0$，并应用物质方程 § 1.1 (10)，(11) 式，得到

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}' + \frac{\varepsilon v}{c}\boldsymbol{E}' = 0,\\ \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}' - \frac{\mu v}{c}\boldsymbol{H}' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

1) 例如，见 F. Borgnis, *Z. f. Phys.* **117** (1941), 642; L. J. F. Broer, *Appl. Sci. Res.*, **A2** (1951), 329.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果令附加的积分常数等于零（即略去一个在空间上不变的场），并且同前令 $v/c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$，则由 (3) 式积分得到

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

以 $\boldsymbol{s}$ 标乘上式两边，得到

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{s} = 0. \tag{5}$$

这一关系表明了场的“横向性”，即电场矢量和磁场矢量都处在与传播方向相垂直的平面上．由(4)和(5)两式可以看到，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 形成一右手正交三矢量系统．此外由 (4) 式可得

$$\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,E, \tag{6}$$

式中 $E = |\boldsymbol{E}|$，$H = |\boldsymbol{H}|$.

现在让我们看看，在单位时间内从垂直于传播方向的面元上通过的能量．试想象一个圆柱体，柱轴平行于 $\boldsymbol{s}$，而横截面等于 1．于是，在单位时间内从这圆柱底通过的能量，等于长度为 v 的一段圆柱体中所包含的能量．因此能通量等于 vw，其中 w 是能量密度．按照 (6) 和 § 1.1(31)，能量密度

$$w = \frac{\varepsilon}{4\pi}E^2 = \frac{\mu}{4\pi}H^2. \tag{7}$$

另一方面，按照 § 1.1 (38) 式，坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}EH\boldsymbol{s} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{s} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H^2\boldsymbol{s}. \tag{8}$$

把 (7)，(8) 两式相比较，可以看出

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}w\boldsymbol{s} = vw\boldsymbol{s}. \tag{9}$$

我们看到，同 § 1.14 相一致，坡印廷矢量代表了能量的流动——能流，包括它的大小和传播方向。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§1.4.2 谐电磁平面波

当平面波是时间谐波时，即当 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的各个笛卡儿分量属于下列形式时，情况特别重要：

$$a\cos(\tau+\delta)=\mathscr{R}\{ae^{-i(\tau+\delta)}\}\qquad(a>0). \tag{10}$$

式中 τ 代表位相因子的变数部分，即

$$\tau=\omega\left(t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{v}\right)=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}. \tag{11}$$

设选择 z 轴在 $\boldsymbol{s}$ 方向．因为按照(5)式场是横向的，所以这时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 只有 x 分量和 y 分量不等于零．现在我们来看看在空间某一代表点上电矢量端点所描绘的曲线的性质．这个曲线是下列坐标点 $(E_x,\ E_y,\ 0)$ 的轨迹：

$$\left.\begin{aligned}E_x&=a_1\cos(\tau+\delta_1),\\E_y&=a_2\cos(\tau+\delta_2),\\E_z&=0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(a) 椭圆偏振

为了从(12)式的头两个方程中消去 τ，我们把它们改写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_x}{a_1}&=\cos\tau\cos\delta_1-\sin\tau\sin\delta_1,\\\frac{E_y}{a_2}&=\cos\tau\cos\delta_2-\sin\tau\sin\delta_2.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_x}{a_1}\sin\delta_2-\frac{E_y}{a_2}\sin\delta_1&=\cos\tau\sin(\delta_2-\delta_1),\\\frac{E_x}{a_1}\cos\delta_2-\frac{E_y}{a_2}\cos\delta_1&=\sin\tau\sin(\delta_2-\delta_1).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将二式平方相加，得到

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2-2\frac{E_x}{a_1}\frac{E_y}{a_2}\cos\delta=\sin^2\delta, \tag{15}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$\delta = \delta_2 - \delta_1. \tag{16}$$

(15)式是圆锥方程式.它是一个椭圆,因为其缔合行列式不是负的:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1^2} & -\dfrac{\cos\delta}{a_1 a_2} \\ -\dfrac{\cos\delta}{a_1 a_2} & \dfrac{1}{a_2^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^2 a_2^2}[1-\cos^2\delta] = \frac{\sin^2\delta}{a_1^2 a_2^2} \geqslant 0.$$

这椭圆内接于一长方形，长方形各边与坐标轴平行，边长为 $2a_1$ 和 $2a_2$(图 1.6). 椭圆和各边相切于点 $(\pm a_1, \pm a_2\cos\delta)$ 和 $(\pm a_1\cos\delta, \pm a_2)$.

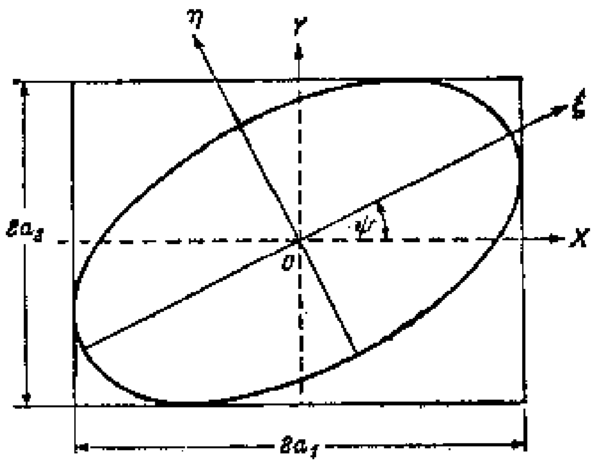


图 1.6 椭圆偏振波 电矢量振动椭圆

因此,(12) 式所代表的波称为**椭圆偏振波**. 很容易看出，同磁矢量相联系的波也是椭圆偏振的. 因为由 (4) 和 (12),

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}a_2\cos(\tau+\delta_2), \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}a_1\cos(\tau+\delta_1), \\ H_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

所以磁矢量端点描绘的也是一个椭圆,这椭圆内接于一长方形,其各边分别与 x, y 方向平行，边长为 $2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}a_2$, $2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}a_1$.

一般,椭圆的二个轴并不在 Ox 和 Oy 方向. 设 $O\xi$, $O\eta$ 为一

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

组沿椭圆长、短轴方向的新坐标轴，并设 $\psi(0 \leqslant \psi < \pi)$ 为 Ox 和椭圆长轴方向 $O\xi$ 的夹角（图 1.6）. 于是 E_ξ 和 E_η 分量同 E_x 和 E_y 分量的关系如下：

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= E_x \cos\psi + E_y \sin\psi, \\ E_\eta &= -E_x \sin\psi + E_y \cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

如果 $2a$ 和 $2b$ ($a \geqslant b$) 是椭圆的轴长，则 $O\xi$, $O\eta$ 坐标中的椭圆方程是

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= a\cos(\tau + \delta_0), \\ E_\eta &= \pm b\sin(\tau + \delta_0). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

正、负两种符号是区别电矢量端点描绘这椭圆时所可采取的两种可能方向.

为了定出 a 和 b，把(18)，(19)两式相比较并应用(13)式：

$$\begin{aligned} a(\cos\tau\cos\delta_0 - \sin\tau\sin\delta_0) = a_1[\cos\tau\cos\delta_1 - \sin\tau\sin\delta_1]\cos\psi \\ + a_2[\cos\tau\cos\delta_2 - \sin\tau\sin\delta_2]\sin\psi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm b(\sin\tau\cos\delta_0 + \cos\tau\sin\delta_0) = -a_1[\cos\tau\cos\delta_1 \\ - \sin\tau\sin\delta_1]\sin\psi + a_2[\cos\tau\cos\delta_2 - \sin\tau\sin\delta_2]\cos\psi. \end{aligned}$$

然后，令各方程中 $\cos\tau$ 和 $\sin\tau$ 的系数分别相等：

$$a\cos\delta_0 = a_1\cos\delta_1\cos\psi + a_2\cos\delta_2\sin\psi, \tag{20a}$$

$$a\sin\delta_0 = a_1\sin\delta_1\cos\psi + a_2\sin\delta_2\sin\psi, \tag{20b}$$

$$\pm b\cos\delta_0 = a_1\sin\delta_1\sin\psi - a_2\sin\delta_2\cos\psi, \tag{21a}$$

$$\pm b\sin\delta_0 = -a_1\cos\delta_1\sin\psi + a_2\cos\delta_2\cos\psi. \tag{21b}$$

将(20a)和(20b)平方相加并应用(16)式，得到

$$a^2 = a_1^2\cos^2\psi + a_2^2\sin^2\psi + 2a_1a_2\cos\psi\sin\psi\cos\delta,$$

同样由(21a)和(21b)，

$$b^2 = a_1^2\sin^2\psi + a_2^2\cos^2\psi - 2a_1a_2\cos\psi\sin\psi\cos\delta. \tag{22}$$

因此

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2. \tag{23}$$

其次，以(21a)乘(20a)，以(21b)乘(20b)，而后相加，由此得到

$$\pm ab = a_1a_2\sin\delta. \tag{24}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

再以(20a)除(21a)，以(20b)除(21b)，得到

$$\pm\frac{b}{a}=\frac{a_1\sin\delta_1\sin\psi-a_2\sin\delta_2\cos\psi}{a_1\cos\delta_1\cos\psi+a_2\cos\delta_2\sin\psi}$$

$$=\frac{-a_1\cos\delta_1\sin\psi+a_2\cos\delta_2\cos\psi}{a_1\sin\delta_1\cos\psi+a_2\sin\delta_2\sin\psi},$$

从这些关系可得到下列 ψ 的方程：

$$(a_1^2-a_2^2)\sin 2\psi=2a_1a_2\cos\delta\cos 2\psi.$$

方便的做法是引进一个辅助角 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2)$，使得

$$\frac{a_2}{a_1}=\tan\alpha. \tag{25}$$

于是前一方程变成

$$\tan 2\psi=\frac{2a_1a_2}{a_1^2-a_2^2}\cos\delta=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cos\delta,$$

即

$$\tan 2\psi=(\tan 2\alpha)\cos\delta. \tag{26}$$

此外，由(23)和(24)式又可得到

$$\pm\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\sin\delta=(\sin 2\alpha)\sin\delta \tag{27}$$

设 $\chi(-\pi/4\leqslant\chi\leqslant\pi/4)$ 为另一辅助角，使得

$$\pm\frac{b}{a}=\tan\chi. \tag{28}$$

$\tan\chi$ 的数值代表椭圆轴长之比，而 χ 的符号则区别描绘椭圆所可采取的两种方向．方程(27)可写成下列形式：

$$\sin 2\chi=(\sin 2\alpha)\sin\delta. \tag{29}$$

把结果概括一下将是有益的．如果给定任意一组坐标轴中的 a_1，a_2 和位相差 δ，而且如果令 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2)$ 代表一个角，使得

$$\tan\alpha=\frac{a_2}{a_1}, \tag{30}$$

则椭圆的主半轴 a 和 b，以及长轴与 Ox 的夹角 $\psi(0\leqslant\psi<\pi)$ 由下列公式确定：

$$a^2+b^2=a_1^2+a_2^2, \tag{31a}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\tan 2\psi = (\tan 2\alpha)\cos\delta, \tag{31b}$$

$$\sin 2\chi = (\sin 2\alpha)\sin\delta, \tag{31c}$$

式中 $\chi(-\pi/4 \leqslant \chi \leqslant \pi/4)$ 是一个辅助角，它确定振动椭圆的形状和转向：

$$\tan\chi = \pm\frac{b}{a}. \tag{32}$$

反过来，如果知道椭圆的轴长 a、b 和取向(即给定 a、b、ψ)，则从这些公式能够求出振幅 a_1、a_2 和位相差 δ. 这些量可以直接测定，我们将在第十四章中描述所用的一些仪器.

在讨论一些重要的特殊情况之前，我们必须先简单讲讲一些专业名词. 我们根据电矢量端点描绘椭圆的转向来区分两种偏振情况. $\boldsymbol{E}$ 的旋转与传播方向构成右手螺旋的叫做右旋偏振，而构成左手螺旋的叫做左旋偏振，这种叫法似乎很自然. 但是传统名词叫法正好相反——因为它是以观察者迎面去"看"时 $\boldsymbol{E}$ 的表观行为为判据的. 本书通篇将遵循这一习惯用法. 这样，当观察者迎着来光方向看去，电矢量端点是按顺时针方向画椭圆时，我们说这偏振是右旋的. 如果我们分析一下 (12) 式在相隔 1/4 周期的两个时刻的值，则可看出在右旋情况下 $\sin\delta > 0$，利用 (29) 式，即有 $0 < \chi \leqslant \pi/4$. 对于左旋偏振，情况相反，即当观察者迎着来光方向看去时，电矢量将按逆时针方向画椭圆；在这一情况下，$\sin\delta < 0$，因而 $-\pi/4 \leqslant \chi < 0$.

由于同光学发展历史有关的原因，人们常把磁矢量的方向叫做偏振方向，并把磁矢量和传播方向所决定的平面叫做偏振面. 然而，这些名词并没有被所有作者采纳，一些作者定义这些名词是对电矢量说的，而不是对磁矢量. 之所以发生这种不一致，部分原因是由于这个事实，即没有一个单一的物理机构能够称为"光矢量"而无含糊之处. 当特别注意场矢量的物理作用时，实际上可有若干理由认为 $\boldsymbol{E}$ 是光矢量. 因为每一个作用都是电磁场驱动基本带电粒子(电子，原子核)运动的结果. 场作用在粒子上的机械力 $\boldsymbol{F}$ 由洛伦兹定律 § 1.1(34) 给出：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\mu}{c}\mathbf{v}\times\boldsymbol{H}\right),$$

式中 e 是粒子的电荷，$\mathbf{v}$ 是粒子的速度．由此可见，电矢量即使当粒子静止时也发生作用．反之，磁矢量只有当粒子在运动时才参与行动；然而，因 v/c 通常比 1 小得多，这个作用常可予以忽略．虽然如此，通常还是把“偏振方向”和“偏振面”与磁矢量联系在一起．这么叫的原因在下节讨论反射产生的偏振时就会明白．

为避免混淆，我们将按照较近的习惯，不用“偏振方向”和“偏振面”这二个名词，而只说振动方向和振动面，以表示场矢量的方向和场矢量与传播方向所构成的平面，所说矢量则在各情况中具体指明．

(b) 线偏振和圆偏振

有两个特别情况非常重要，这就是偏振椭圆退化成一条直线或一个圆．

按照(12)式，当

$$\delta=\delta_2-\delta_1=m\pi \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{33}$$

时，椭圆将退化成一条直线．这时

$$\frac{E_y}{E_x}=(-1)^m\frac{a_2}{a_1}, \tag{34}$$

我们说 $\boldsymbol{E}$ 是线偏振的[1]．可以把某一坐标轴，如 x，选在这条直线上．于是只剩下一个分量(E_x)．而且，由于电矢量和磁矢量正交并同处在与 z 方向垂直的平面上，所以 H_x 分量这时等于零，因而 $\boldsymbol{H}$ 是沿 y 方向线偏振的．

另一个重要的特别情况是圆偏振波的情况，这时椭圆退化成一个圆．很明显，产生圆偏振的一个必要条件是外切长方形应该变成一正方形：

$$a_1=a_2=a. \tag{35}$$

---

1) 也有叫平面偏振的，但此词较欠妥当．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

还有，当 $\boldsymbol{E}$ 的一个分量达到极值时，另一分量必须为零，这就要求

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = m\pi/2 \qquad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots), \tag{36}$$

这时 (15) 式化为圆方程式

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2. \tag{37}$$

当偏振是右旋时，$\sin\delta > 0$，因而

$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a\cos(\tau + \delta_1), \\ E_y &= a\cos(\tau + \delta_1 + \pi/2) = -a\sin(\tau + \delta_1). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

对于左旋偏振，$\sin\delta < 0$，因而

$$\delta = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a\cos(\tau + \delta_1), \\ E_y &= a\cos(\tau + \delta_1 - \pi/2) = a\sin(\tau + \delta_1). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

如果把实表示换成复表示(即把 (12) 式中的余弦函数改写成指数函数)，则

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{a_2}{a_1} e^{i(\delta_2 - \delta_1)} = \frac{a_2}{a_1} e^{i\delta}. \tag{42}$$

从这个比的值可立即定出偏振的性质．各种情况的结果如下：

(a) 线偏振电波 ($\delta = m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$):

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{a_2}{a_1}.$$

(b) 右旋圆偏振电波[1] ($a_1 = a_2, \delta = \pi/2$):

$$\frac{E_y}{E_x} = e^{i\pi/2} = i.$$

(c) 左旋圆偏振电波 ($a_1 = a_2, \delta = -\pi/2$):

$$\frac{E_y}{E_x} = e^{-i\pi/2} = -i.$$

---

1) 注意，这里右旋是按传统名词的叫法，而不是按自然叫法．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在更一般的情况下，可以证明右旋椭圆偏振的 E_y/E_x 虚部为正，而左旋椭圆偏振的 E_y/E_x 虚部为负.

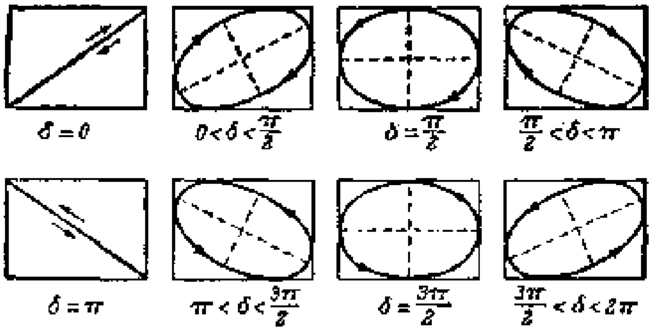


图 1.7 位相差 δ 取不同值时的椭圆偏振

图 1.7 说明偏振椭圆如何随 δ 的改变而变化.

(c) 偏振态的表征——斯托克斯参量

表征椭圆偏振，必需要三个独立的量，例如振幅 a_1、a_2 和位相差 δ，或长短轴 a、b 和表明椭圆取向的 ψ 角. 在实用上，用某些物理因次全一样的参量——斯托克斯参量来表征偏振态更为便利. 这些参量是斯托克斯于 1852 年在关于部分偏振光的研究中引进的. 我们将在后面 § 10.8.3 在完全普遍的情况下给它们下定义. 那里我们还将证明，对于任何给定的波，这些参量都可以由简单的实验加以测定.

一个平面单色波的斯托克斯参量是下列四个量：

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= a_1^2 + a_2^2, \\ s_1 &= a_1^2 - a_2^2, \\ s_2 &= 2a_1a_2\cos\delta, \\ s_3 &= 2a_1a_2\sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

其中只有三个是独立的，因为它们之间存在下列恒等式关系：

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \tag{44}$$

参量 s_0 显然正比于波的强度. 参量 s_1, s_2 和 s_3 与表明椭圆取向的 ψ 角($0 \leqslant \psi < \pi$)和表征椭圆率以及椭圆转向的 χ 角($-\pi/4 \leqslant \chi \leqslant \pi/4$)有简单的关系. 事实上下列关系式成立：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi, \tag{45a}$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi, \tag{45b}$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi. \tag{45c}$$

关系式(45c)可由(25)和(29)两式得到. 要推导其他二个关系,可注意,按照(26)式前面一个方程,有

$$s_2 = s_1 \tan 2\psi. \tag{46}$$

把(46)和(45c)式代入(44)式,可得到关系式(45a). 最后,把(45a)式代入(46)式,即得到(45b).

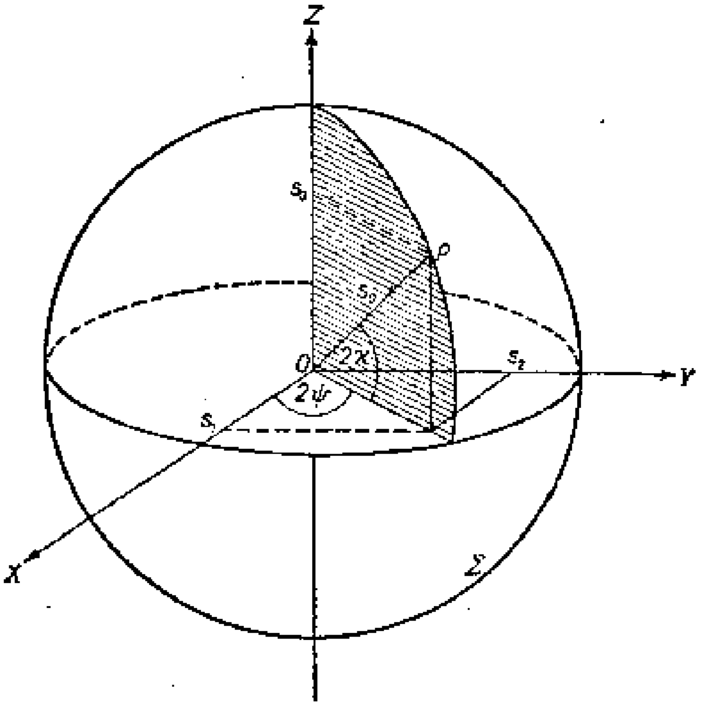


图 1.8 单色波偏振态的邦加表示(邦加球)

关系式(45)指出了所有不同偏振态的一个简单几何表示: s_1, s_2 和 s_3 可以看成是一个半径为 s_0 的球 Σ 上某点 P 的笛卡儿坐标,而2χ和 2ψ 则是这点的相应球面角坐标(见图1.8). 这样,一个平面单色波,当其强度给定时 (s_0 = 常数),对它每一个可能的偏振态,Σ 上都有一点与之对应,反之亦然. 因为当偏振是右旋时 χ 为正,而左旋时 χ 为负,所以,从(45c)可知,右旋偏振由 Σ 上赤道面(xy平面)上面的点来代表,而左旋偏振由赤道面下面的点来代表. 再有,对于线偏振光,位相差 δ 是零或 π 的整数倍,按照(43)式,

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

斯托克斯参量 s_3 这时为零，所以线偏振由赤道面上的点来代表。对于圆偏振，$a_1 = a_2$，并且看偏振是右旋还是左旋，$\delta = +\pi/2$ 或 $-\pi/2$，因此右旋圆偏振由北极（$s_1 = s_2 = 0$，$s_3 = s_0$）代表，而左旋圆偏振由南极（$s_1 = s_2 = 0$，$s_3 = -s_0$）代表。这个用球面各点代表不同偏振态的几何表示方法创始于邦加[1]，它在晶体光学中非常有用，可决定当光穿经晶体媒质时后者对它偏振态的影响[2]。这个 Σ 球叫做邦加球。

§ 1.4.3 任意形式的谐矢量波

前几节的主要结果很容易扩大到形式更复杂的时间谐波。

一个一般的实矢量时间谐波 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t)$ 是矢量波动方程这样的一个解，其笛卡儿分量 V_x，V_y，V_z 各由 § 1.3(23) 形式的式子来代表：

$$\left.\begin{aligned} V_x(\boldsymbol{r},t) &= a_1(\boldsymbol{r})\cos[\omega t - g_1(\boldsymbol{r})], \\ V_y(\boldsymbol{r},t) &= a_2(\boldsymbol{r})\cos[\omega t - g_2(\boldsymbol{r})], \\ V_z(\boldsymbol{r},t) &= a_3(\boldsymbol{r})\cos[\omega t - g_3(\boldsymbol{r})], \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

式中 a_s 和 g_s($s = 1,2,3$) 都是位置的实函数。对于前节所考虑的谐平面波，各个 a 是常数，而 $g_s(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \delta_s$。

方便的做法是把 (47) 式写成下列形式：

$$V_x(\boldsymbol{r},t) = p_x(\boldsymbol{r})\cos\omega t + q_x(\boldsymbol{r})\sin\omega t \text{ 等等}, \tag{48}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} p_x(\boldsymbol{r}) &= a_1(\boldsymbol{r})\cos g_1(\boldsymbol{r}), \\ q_x(\boldsymbol{r}) &= a_1(\boldsymbol{r})\sin g_1(\boldsymbol{r}). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

如果选取一组新坐标轴，则 $\boldsymbol{V}$ 在新坐标中的各个分量将还是 (47) 这种形式，因为各新分量是旧分量的线性组合，因而它可以只包括 $\cos\omega t$ 项和 $\sin\omega t$ 项之和。

---

1) H. Poincaré, *Théorie Mathématique de la Lumière* (Paris, Georges Carré), Vol. 2, (1892) Chap. 12.

2) 关于本法的一些示例和有关文献的引录，见 H. G. Jerrard, *J. Opt. Soc. Amer.*, **44** (1954), 634. 亦见§ 10.8.3中所引 M. J. Walker 的论文和 S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **A44** (1956), 247.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

我们可以把 (p_x, p_y, p_z) 和 (q_x, q_y, q_z) 看作是两个实矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的分量. 于是

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})\cos\omega t + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\sin\omega t, \tag{50}$$

根据傅里叶分析，一个任意的矢量波可以表成为许多这样的波的叠加.

和标量波情况中一样，采用复数表示常常是方便的. 我们把(50)式写成如下形式:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t) = \mathscr{R}\{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\}, \tag{51}$$

式中 $\boldsymbol{U}$ 是复矢量

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) + i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}), \tag{52}$$

$\mathscr{R}$ 表示实部. 当对 $\boldsymbol{V}$ 的运算是线性的时候，和在相应的标量情况中一样，可以直接对复量进行运算而把符号 $\mathscr{R}$ 统统去掉. 最后式子的实部则被理解为代表所求的物理量.

复矢量的运算遵守矢量代数和复数代数的常用规则. 例如，U 的共轭矢量是

$$\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{p} - i\boldsymbol{q}.$$

同样

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 + 2i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q},$$

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^* = (\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p} - i\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2,$$

等等，

为了说明复矢量的运算，下面我们来推导以后要用到的两个公式：时谐电磁场的能量密度公式和坡印廷矢量公式. 这时电矢量和磁矢量的表达形式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \mathscr{R}\{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}_0^*(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}],\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) &= \mathscr{R}\{\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} + \boldsymbol{H}_0^*(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}],\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 都是位置的复矢量函数. 因为光学频率非常之大(ω 的数量级是 10^{15} 秒$^{-1}$)，我们不能观测任何振动很快的量的瞬时值，而只能观测它们在某时间间隔(比如说 $-T' \leqslant t \leqslant T'$)内的时间平均值，这间隔比基本周期 $T = 2\pi/\omega$ 要大得多. 特别说，时间平

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

均的电能密度是

$$\langle w_e\rangle = \frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'}\frac{\varepsilon}{8\pi}\boldsymbol{E}^2dt = \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{1}{2T'}$$

$$\times\int_{-T'}^{T'}\frac{1}{4}[\boldsymbol{E}_0^2e^{-2i\omega t} + 2\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^* + \boldsymbol{E}_0^{*2}e^{2i\omega t}]dt.$$

现在

$$\frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'}e^{-2i\omega t}dt = -\frac{1}{4i\omega T'}[e^{-2i\omega t}]_{-T'}^{T'} = \frac{1}{4\pi}\frac{T}{T'}\sin 2\omega T'.$$

因为 T' 设比 T 大得多，T/T' 将比 1 小得多，所以含 $e^{-2i\omega t}$ 的积分可以忽略不计．同样，含 $e^{2i\omega t}$ 的积分也可略去，最后得到

$$\langle w_e\rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*. \tag{54}$$

用同样方法可以求得磁能密度的时间平均值为

$$\langle w_m\rangle = \frac{\mu}{16\pi}\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{H}_0^*. \tag{55}$$

坡印廷矢量的时间平均值得之如下：

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle &= \frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'}\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})dt\\ &= \frac{c}{4\pi}\frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'}\frac{1}{4}[\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0e^{-2i\omega t} + \boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0^*\\ &\quad + \boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H}_0^*e^{2i\omega t}]dt\\ &\simeq \frac{c}{16\pi}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0^* + \boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H}_0)\\ &= \frac{c}{8\pi}\mathscr{R}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0^*).\end{aligned} \tag{56}$$

能量守恒定律也获得简单的形式．对于不导电媒质($\sigma = 0$)，当其中没有做机械功时，取 § 1.1 方程(43)的时间平均值，可得到

$$\operatorname{div}\langle\boldsymbol{s}\rangle = 0. \tag{57}$$

如果我们对一个不包含能量辐射子或能量吸收子的任意体积取(57)式的积分，并应用高斯定理，则有

$$\int\langle\boldsymbol{s}\rangle\cdot\boldsymbol{n}ds = 0, \tag{58}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $\boldsymbol{n}$ 是界面的外向法线;而积分是对整个界面进行的. 这样,通过任何闭合面的总能通量平均为零.

现在我们回到一般的时谐矢量波(50)式,并讨论空间某一点 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处 $\boldsymbol{V}$ 的行为. 一般,当时间改变时, $\boldsymbol{V}$ 的端点画一个椭圆,所以,波(50)象平面波一样,一般也是椭圆偏振的. 要证明这一点,我们首先注意,随着时间的改变, $\boldsymbol{V}$ 的端点在 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}_0)$ 和 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_0)$ 所决定的平面上画曲线. 因为 $\boldsymbol{V}$ 是周期的,所以这个曲线必然是闭合的. 现在我们可以令

$$(\boldsymbol{p}+i\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})e^{i\varepsilon}, \tag{59}$$

式中 ε 是任一标量. 用 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ 和 ε 来表示 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 则

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{p}\cos\varepsilon+\boldsymbol{q}\sin\varepsilon,\\ \boldsymbol{b}&=-\boldsymbol{p}\sin\varepsilon+\boldsymbol{q}\cos\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

让我们如此选择 ε, 使得矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直, 并设 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$. 为要 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 正交, ε 必须满足方程

$$(\boldsymbol{p}\cos\varepsilon+\boldsymbol{q}\sin\varepsilon)\cdot(-\boldsymbol{p}\sin\varepsilon+\boldsymbol{q}\cos\varepsilon)=0, \tag{61}$$

即

$$\tan 2\varepsilon=\frac{2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{q}^2} \tag{62}$$

现在我们用正交矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的五个独立分量和相应的位相因子 ε 代替 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的六个直角分量, 作为确定波的参量. 于是由(51),(52)和(59)三式,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}&=\mathscr{R}\{[\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}]e^{-i(\omega t-\varepsilon)}\}\\ &=\boldsymbol{a}\cos(\omega t-\varepsilon)+\boldsymbol{b}\sin(\omega t-\varepsilon).\end{aligned} \tag{63}$$

如果我们把笛卡儿坐标轴的原点取在 $\boldsymbol{r}_0$ 处, 并使其 x 方向和 y 方向沿着 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 则

$$V_x=a\cos(\omega t-\varepsilon),\quad V_y=b\sin(\omega t-\varepsilon), V_z=0. \tag{64}$$

这代表一个椭圆(偏振椭圆)

$$\frac{V_x^2}{a^2}+\frac{V_y^2}{b^2}=1, \tag{65}$$

它的两个半轴沿着 x 轴和 y 轴,长度为 a 和 b. 由初等几何可以证

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

明，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是椭圆的一对共轭半直径.

同平面波情况中一样，这个椭圆的描绘也有两种可能的转向，分别对应于左旋偏振和右旋偏振；它们由三重数积 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\nabla\varepsilon]=[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\nabla\varepsilon]$的符号来区别.

偏振椭圆的半轴长度很容易从(60)和(62)两式求得. 从(60)式，得到

$$a^2=p^2\cos^2\varepsilon+q^2\sin^2\varepsilon+2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$=\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\frac{1}{2}(p^2-q^2)\cos 2\varepsilon+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\sin 2\varepsilon.$$

从(62)式，得到

$$\sin 2\varepsilon=\frac{2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2}},$$
$$\cos 2\varepsilon=\frac{p^2-q^2}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2}}.$$

因此，

$$a^2=\frac{1}{2}[p^2+q^2+\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2}],$$

同样可求得

$$b^2=\frac{1}{2}[p^2+q^2-\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2}].\qquad(66)$$

为了求出 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的夹角表达式，我们把椭圆方程表成下列参量形式：

$$V_x=a\cos\phi,\quad V_y=b\sin\phi,\qquad(67)$$

式中 ϕ 是偏心角(见图 1.9)，从初等几何我们知道，这个角和点 (V_x, V_y) 的极角 θ 有如下关系：

$$\tan\theta=\frac{b}{a}\tan\phi.\qquad(68)$$

比较一下(64)和(67)两式，可以看出，在本例情况下，$\phi=\omega t-\varepsilon$. 现在按照(50)式，当 $t=0$ 时，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{p}$，所以 $\boldsymbol{p}$ 的偏心角是$-\varepsilon$. 因此 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的夹角 ψ 由下式给出：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

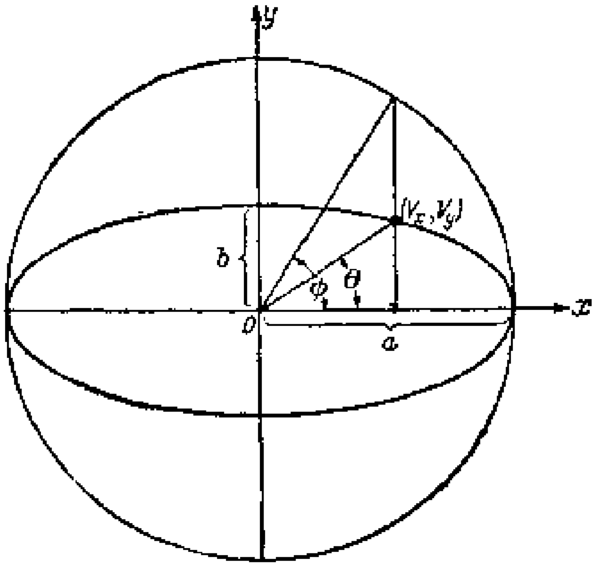


图 1.9　关于方程(67)和(68)的符号图示

$$\tan\phi = \frac{b}{a}\tan\varepsilon \tag{69}$$

如果令 γ 表示 **p** 和 **q** 的夹角,并引进一辅助角 β,使得

$$\frac{q}{p} = \tan\beta, \tag{70}$$

则(62)式变成

$$\begin{aligned}\tan 2\varepsilon &= \frac{2pq}{p^2 - q^2}\cos\gamma \\ &= \tan 2\beta\cos\gamma \end{aligned}\tag{71}$$

让我们把以上结果再概括说一遍: 如果给定了 **p** 和 **q**, 而 γ 代表这两个矢量的夹角, β 代表(70)式所定义的辅助角, 则椭圆的两个主半轴和长轴与 **p** 的夹角 ϕ 可由下列各式求出:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2}[p^2 + q^2 + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2\cos^2\gamma}\,], \\ b^2 &= \frac{1}{2}[p^2 + q^2 - \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2\cos^2\gamma}\,], \\ \tan\phi &= \frac{b}{a}\tan\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

式中 ε 满足

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\tan 2\varepsilon = \tan 2\beta \cos \gamma. \tag{73}$$

同平面波时一样，有两种情况特别重要，这就是椭圆退化成一个圆或一条直线．对于圆偏振波，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 以及因而 ε 都是不定的．按(62)式，要情况如此，须

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{q}^2 = 0. \tag{74}$$

对于线偏振波，短轴为零($b^2 = 0$)，这时由(66)式得到

$$p^2 q^2 = (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q})^2. \tag{75}$$

最后我们强调指出，偏振一词指的是场中某一特别点处的行为，因而在场中不同地点偏振态一般将不相同．这样，一个波可以在某些点是线偏振的或圆偏振的，而在其他点是椭圆偏振[1]．只有在特别情况下，例如像均匀平面波，场中各点的偏振态才会都一样．

§ 1.5　平面波的反射和折射

在§1.1.3中，我们推导了各场矢量在通过突变面时所必须满足的关系式，这突变面是媒质的物理性质突变的地方．现在我们应用这些公式来研究一个平面波入射到两个各向同性均匀媒质的界平面上时的传播情况．

§ 1.5.1　反射定律和折射定律

当一个平面波射到光学性质不同的两个媒质的界面上时，它将分成为两个波：一个透射波和一个反射波，透射波进入第二媒质内，反射波传回到第一媒质中．这两个波的存在可从边界条件上加以论证，因为很容易看出，如果不假定透射和反射两个波，边界条件就不能得到满足．我们将根据推测假定这些波也是平面波，并来推导它们传播方向和振幅的表达式．

---

1) A. Nisbet 和 E. Wolf 曾研究了这样一种时谐电磁波的一般性质，它的形式任意，但场矢量至少有一个是线偏振的，见 *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50** (1954), 614.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一个平面波，沿着单位矢量 $\boldsymbol{s}^{(i)}$[1] 规定的方向传播，如果知道了它在空间某点的时间行为，这个波就完全确定。因为，如果 $F(t)$ 代表任何一点的时间行为，则在与这点相距为 $\boldsymbol{r}$ 的另一点，时间行为即由 $F[t-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})/v]$ 给出。在两个媒质的界面上，次级场的时间变化将同入射初级场的一样。因此，如果令 $\boldsymbol{s}^{(r)}$ 和 $\boldsymbol{s}^{(t)}$ 代表反射波和折射波传播方向上的单位矢量，并令三个波函数在界平面 $z=0$ 上某点 $\boldsymbol{r}$ 的宗量相等，则有：

$$t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(i)}}{v_1}=t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(r)}}{v_1}=t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(t)}}{v_2},\tag{1}$$

v_1 和 v_2 是两个媒质中的传播速度。用直角坐标表出，以 $\boldsymbol{r}=x,y,0$ 代入，则有

$$\frac{xs_x^{(i)}+ys_y^{(i)}}{v_1}=\frac{xs_x^{(r)}+ys_y^{(r)}}{v_1}=\frac{xs_x^{(t)}+ys_y^{(t)}}{v_2}.\tag{2}$$

因为 (2) 式对界面上所有的 x、y 都必须成立，所以

$$\frac{s_x^{(i)}}{v_1}=\frac{s_x^{(r)}}{v_1}=\frac{s_x^{(t)}}{v_2},\quad\frac{s_y^{(i)}}{v_1}=\frac{s_y^{(r)}}{v_1}=\frac{s_y^{(t)}}{v_2}.\tag{3}$$

$\boldsymbol{s}^{(i)}$ 和界面法线所决定的平面叫做**入射面**。(3) 式表明，$\boldsymbol{s}^{(t)}$ 和 $\boldsymbol{s}^{(r)}$ 二者都在入射面上。

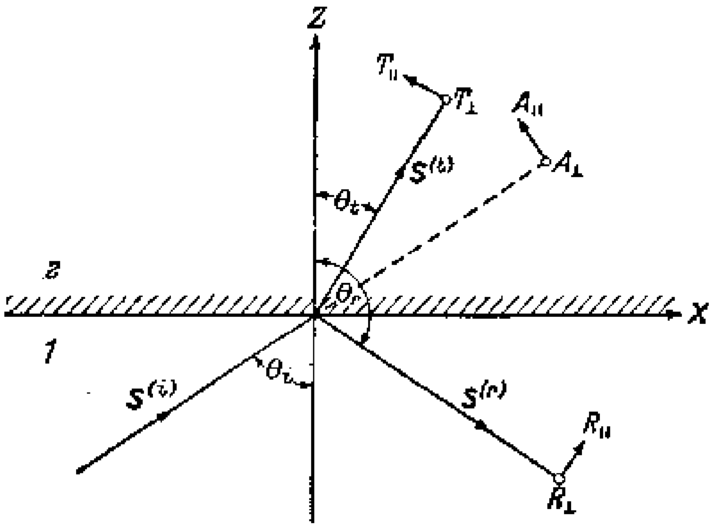


图 1.10　平面波的折射和反射．　　入射面

1) 我们始终以附标 i，r 和 t 分别代表入射波，反射波和透射(折射)波．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果以入射面为 xz 平面，并用 θ_i，θ_r 和 θ_t 代表 $s^{(i)}$，$s^{(r)}$ 和 $s^{(t)}$ 与 Oz 所作的角，则有(见图 1.10)

$$\left.\begin{aligned} s_x^{(i)} &= \sin\theta_i, \quad s_y^{(i)} = 0, \quad s_z^{(i)} = \cos\theta_i, \\ s_x^{(r)} &= \sin\theta_r, \quad s_y^{(r)} = 0, \quad s_z^{(r)} = \cos\theta_r, \\ s_x^{(t)} &= \sin\theta_t, \quad s_y^{(t)} = 0, \quad s_z^{(t)} = \cos\theta_t. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

当波从第一媒质向第二媒质传播时，$\boldsymbol{s}$ 矢量的 z 分量为正；当波沿相反方向传播时，该分量为负：

$$s_z^{(i)} = \cos\theta_i \geqslant 0, \quad s_z^{(r)} = \cos\theta_r \leqslant 0, \quad s_z^{(t)} = \cos\theta_t \geqslant 0. \tag{5}$$

把(4)式代入(3)式第一组，得到

$$\frac{\sin\theta_i}{v_1} = \frac{\sin\theta_r}{v_1} = \frac{\sin\theta_t}{v_2}. \tag{6}$$

因此，$\sin\theta_r = \sin\theta_i$，而且，再利用(5)式，得到，$\cos\theta_r = -\cos\theta_i$，所以

$$\theta_r = \pi - \theta_i. \tag{7}$$

这一关系，加上反射波法线 $\boldsymbol{s}^{(r)}$ 在入射面上这一叙述，即构成**反射定律**.

由(6)式，利用折射率和介电常数之间的麦克斯韦关系 § 1.2 (14)，又可得到

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}. \tag{8}$$

$\sin\theta_i/\sin\theta_t = n_2/n_1$ 这一关系，加上折射波法线 $\boldsymbol{s}^{(t)}$ 在入射面上这一叙述，即构成**折射定律**(或称斯涅耳定律).

当 $n_2 > n_1$ 时，$n_{12} > 1$，我们说第二媒质和第一媒质相比是光密的．在这一情况下，由(8)式可知

$$\sin\theta_t = \frac{1}{n_{12}}\sin\theta_i < \sin\theta_i, \tag{9}$$

所以，每一个入射角 θ_i 都有一个实折射角 θ_t 与之对应．然而，如果第二媒质和第一媒质相比是光疏的(即如果 $n_{12} < 1$)，则只有当入射角 θ_i 满足 $\sin\theta_i \leqslant n_{12}$ 时 θ_t 才可能有实值．入射角再大时，就要发生所谓**全反射**．我们将在 § 1.5.4 中对它单独加以处理.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 1.5.2 菲涅耳公式

其次，我们来考虑反射波和透射波的振幅. 我们将假定，这两个（均匀的各向同性的）媒质都是电导率为零，因而都是完全透明的；它们的磁导率这时实际上和 1 相差甚微，差值可予忽略，因此我们取 $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

设 A 为入射场电矢量的振幅. 我们取 A 为复数，令其位相等于波函数宗量的常数部分. 变数部分是

$$\tau_i = \omega\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(i)}}{v_1}\right) = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_i + z\cos\theta_i}{v_1}\right). \quad (10)$$

我们把每个场矢量分解成平行于入射面（用下角标 ∥ 表示）和垂直于入射面（用下角标 ⊥ 表示）两个分量. 各平行分量正方向的选取如图 1.10 所示. 垂直分量必须想像系与图平面成直角.

于是入射场电矢量的各分量为

$$E_x^{(i)} = -A_{\parallel}\cos\theta_i e^{-i\tau_i},\ E_y^{(i)} = A_{\perp}e^{-i\tau_i},$$
$$E_z^{(i)} = A_{\parallel}\sin\theta_i e^{-i\tau_i}. \quad (11)$$

磁矢量的各分量利用关系式 § 1.4(4)（令 $\mu = 1$）

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\varepsilon}\,\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E} \quad (12)$$

可立即得到，结果如下：

$$H_x^{(i)} = -A_{\perp}\cos\theta_i\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_i},\ H_y^{(i)} = -A_{\parallel}\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_i},$$
$$H_z^{(i)} = A_{\perp}\sin\theta_i\sqrt{\varepsilon_1}\ e^{-i\tau_i}. \quad (13)$$

同样，设 T 和 R 是透射波和反射波的复振幅，则相应的电矢量分量和磁矢量分量为

透射场

$$\left.\begin{aligned}
&E_x^{(t)} = -T_{\parallel}\cos\theta_t e^{-i\tau_t},\ E_y^{(t)} = T_{\perp}e^{-i\tau_t},\\
&E_z^{(t)} = T_{\parallel}\sin\theta_t e^{-i\tau_t},\\
&H_x^{(t)} = -T_{\perp}\cos\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t},\ H_y^{(t)} = -T_{\parallel}\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t},\\
&H_z^{(t)} = T_{\perp}\sin\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t},
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

其中

$$\tau_t = \omega\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(t)}}{v_2}\right) = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_t + z\cos\theta_t}{v_2}\right). \quad (15)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

反射场

$$\left.\begin{aligned}&E_x^{(r)} = -R_{\parallel}\cos\theta_r e^{-i\tau_r},\quad E_y^{(r)} = R_{\perp}e^{-i\tau_r},\\&E_z^{(r)} = R_{\parallel}\sin\theta_r e^{-i\tau_r},\\&H_x^{(r)} = -R_{\perp}\cos\theta_r\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_r},\quad H_y^{(r)} = -R_{\parallel}\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_r},\\&H_z^{(r)} = R_{\perp}\sin\theta_r\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_r},\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

其中

$$\tau_r = \omega\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(r)}}{v_1}\right) = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_r + z\cos\theta_r}{v_1}\right).\tag{17}$$

边界条件 § 1.1(23),(25)式要求,界面两边 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 的切线分量应该是连续的. 因此必须有

$$\left.\begin{aligned}&E_x^{(i)} + E_x^{(r)} = E_x^{(t)},\quad E_y^{(i)} + E_y^{(r)} = E_y^{(t)},\\&H_x^{(i)} + H_x^{(r)} = H_x^{(t)},\quad H_y^{(i)} + H_y^{(r)} = H_y^{(t)},\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的法线分量这时自动满足边界条件 § 1.1 (15) 和 (19) 式. 把所有分量代入 (18) 式,并利用 $\cos\theta_r = \cos(\pi - \theta_i) = -\cos\theta_i$ 这一结果,就得到下列四个关系式:

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_i(A_{\parallel} - R_{\parallel}) &= \cos\theta_t T_{\parallel},\\A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp},\\\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i(A_{\perp} - R_{\perp}) &= \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_t T_{\perp},\\\sqrt{\varepsilon_1}(A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= \sqrt{\varepsilon_2}T_{\parallel}.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

可以注意,(19)式的四个方程自然分成两组,一组只包含平行于入射面的分量,而另一组只包含垂直于入射面的分量. 因此,这两种波是彼此独立无关的.

我们可以设入射波各分量为已知,从 (19) 解出反射波和透射波各分量,结果得到(再次应用麦克斯韦关系 $n = \sqrt{\varepsilon}$)

$$\left.\begin{aligned}T_{\parallel} &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}A_{\parallel},\\T_{\perp} &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}A_{\perp},\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}R_{\parallel} &= \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}A_{\parallel},\\R_{\perp} &= \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}A_{\perp}.\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

方程(20)和(21)叫做菲涅耳公式，是首先由菲涅耳于1823年根据他的光的弹性理论，以略欠普遍的形式推导出来的。这些公式通常写成如下另一种形式，可用折射定律(8)代入(20)和(21)式而得到：

$$\left.\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}A_{\parallel}, \\ T_{\perp} &= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}A_{\perp}, \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}A_{\perp}. \end{aligned}\right\} \tag{21a}$$

因为 θ_i 和 θ_t 是实的(全反射情况现在不考虑)，(20a)和(20b)右边的三角因子将也是实的。因此，反射波和折射波各分量的位相与入射波相应分量的位相，或是相等，或是差 π。因为 $T_{\parallel}$ 和 $T_{\perp}$ 与 $A_{\parallel}$ 和 $A_{\perp}$ 同号，所以透射波的位相总与入射波的相等。但是，反射波的位相与 θ_i 和 θ_t 的相对大小有关。因为，如果第二媒质比第一媒质光密 $(\varepsilon_2>\varepsilon_1)$，则 $\theta_t<\theta_i$；按(21)式，$R_{\perp}$ 和 $A_{\perp}$ 异号，因此两个位相差 π[1]。在相同情况下，$\tan(\theta_i-\theta_t)$ 为正，但分母 $\tan(\theta_i+\theta_t)$ 在 $\theta_i+\theta_t>\pi/2$ 时变负，$R_{\parallel}$ 和 $A_{\parallel}$ 的位相这时差 π。当第二媒质比第一媒质光疏时，可如法加以分析。

在正入射下，$\theta_i=0$，因而 $\theta_t=0$，(20)和(21)化为

$$\left.\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2}{n+1}A_{\parallel}, \\ T_{\perp} &= \frac{2}{n+1}A_{\perp}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

1) 由(10)和(11)两式可知，在平面 $z=0$ 上，

$$\frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}}=\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}},\quad \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}}=-\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}}.$$

这个结果意味着，在平面 $z=0$ 上，$E_y^{(r)}$ 和 $E_y^{(i)}$ 的位相差 π，而 $E_x^{(r)}$ 和 $E_x^{(i)}$ 的位相相等。y 分量和 x 分量位相性质的这种差别实属形式，是由反射角 θ_r 定义方式造成的(见图1.10)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
R_{\parallel} &= \frac{n-1}{n+1}A_{\parallel},\\
R_{\perp} &= -\frac{n-1}{n+1}A_{\perp},
\end{aligned}\right\}\tag{23}
$$

式中 $n = n_2/n_1$.

§ 1.5.3 反射率和透射率；反射和折射产生的偏振

现在我们来考察入射场的能量如何分配给两个次级场。按照 § 1.4(8)，光强系由下式给出(仍设 $\mu = 1$)：

$$
S = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}\,E^2 = \frac{cn}{4\pi}E^2.\tag{24}
$$

因此，初级波每秒入射到界面单位面积上的能量是

$$
J^{(i)} = S^{(i)}\cos\theta_i = \frac{cn_1}{4\pi}|A|^2\cos\theta_i,\tag{25}
$$

类此，反射波和透射波每秒从界面单位面积带走的能量是

$$
\left.\begin{aligned}
J^{(r)} &= S^{(r)}\cos\theta_i = \frac{cn_1}{4\pi}|R|^2\cos\theta_i,\\
J^{(t)} &= S^{(t)}\cos\theta_t = \frac{cn_2}{4\pi}|T|^2\cos\theta_t.
\end{aligned}\right\}\tag{26}
$$

$J^{(r)}$ 与 $J^{(i)}$ 之比

$$
\mathscr{R} = \frac{J^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{|R|^2}{|A|^2}
$$

和 $J^{(t)}$ 与 $J^{(i)}$ 之比 (27)

$$
\mathscr{T} = \frac{J^{(t)}}{J^{(i)}} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{|T|^2}{|A|^2}
$$

分别叫做**反射率**和**透射率**[1]. 可以很容易证明，和能量守恒定律一致，有

$$
\mathscr{R} + \mathscr{T} = 1.\tag{28}
$$

---

1) 如 $\mu \neq 1$，则 $\mathscr{T}$ 式中的 $\frac{n_2}{n_1}$ 因子必须换成为 $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\Big/\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$，这从 § 1.4(8)式可立即看出.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

反射率 $\mathscr{R}$ 和透射率 $\mathscr{T}$ 与入射波的偏振状态有关. 我们可以分别用平行分量和垂直分量的反射率 $\mathscr{R}_{\parallel}$, $\mathscr{R}_{\perp}$ 和透射率 $\mathscr{T}_{\parallel}$, $\mathscr{T}_{\perp}$ 表示出 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$.

设 α_i 为入射波电矢量与入射面所作的角. 于是

$$A_{\parallel} = A\cos\alpha_i, \quad A_{\perp} = A\sin\alpha_i. \tag{29}$$

设

$$\left.\begin{aligned} J_{\parallel}^{(i)} &= \frac{cn_1}{4\pi}|A_{\parallel}|^2\cos\theta_i = J^{(i)}\cos^2\alpha_i, \\ J_{\perp}^{(i)} &= \frac{cn_1}{4\pi}|A_{\perp}|^2\cos\theta_i = J^{(i)}\sin^2\alpha_i, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

和

$$\left.\begin{aligned} J_{\parallel}^{(r)} &= \frac{cn_1}{4\pi}|R_{\parallel}|^2\cos\theta_i, \\ J_{\perp}^{(r)} &= \frac{cn_1}{4\pi}|R_{\perp}|^2\cos\theta_i. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathscr{R} &= \frac{J^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{J_{\parallel}^{(r)} + J_{\perp}^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{J_{\parallel}^{(r)}}{J_{\parallel}^{(i)}}\cos^2\alpha_i + \frac{J_{\perp}^{(r)}}{J_{\perp}^{(i)}}\sin^2\alpha_i \\ &= \mathscr{R}_{\parallel}\cos^2\alpha_i + \mathscr{R}_{\perp}\sin^2\alpha_i, \end{aligned} \tag{32}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{R}_{\parallel} &= \frac{J_{\parallel}^{(r)}}{J_{\parallel}^{(i)}} = \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}, \\ \mathscr{R}_{\perp} &= \frac{J_{\perp}^{(r)}}{T_{\perp}^{(i)}} = \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

用同样方法可以得到

$$\mathscr{T} = \frac{J^{(t)}}{J^{(i)}} = \mathscr{T}_{\parallel}\cos^2\alpha_i + \mathscr{T}_{\perp}\sin^2\alpha_i, \tag{34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{T}_{\parallel} &= \frac{J_{\parallel}^{(t)}}{J_{\parallel}^{(i)}} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{|T_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)\cos^2(\theta_i-\theta_t)}, \\ \mathscr{T}_{\perp} &= \frac{J_{\perp}^{(t)}}{J_{\perp}^{(i)}} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{|T_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

仍可证明

$$\mathscr{R}_{\parallel}+\mathscr{T}_{\parallel}=1,\quad \mathscr{R}_{\perp}+\mathscr{T}_{\perp}=1. \tag{36}$$

在正入射下，平行分量和垂直分量的区别消失，从(22)，(23)和(27)三式可得

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{R}&=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,\\ \mathscr{T}&=\frac{4n}{(n+1)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

由(37)式可见

$$\lim_{n\to 1}\mathscr{R}=0,\quad \lim_{n\to 1}\mathscr{T}=1. \tag{38}$$

$\mathscr{R}_{\parallel}$，$\mathscr{T}_{\parallel}$ 和 $\mathscr{R}_{\perp}$，$\mathscr{T}_{\perp}$ 的极限值也具有同样结果，这从(33)和(35)两式很容易看出. 因为，按照折射定律，当 $n\to 1$ 时，$\theta_t\to\theta_i$，利用这一事实，即可证明. 因此，两个媒质的光密度差得越小，反射波所带走的能量就越少.

除去当 $\theta_i+\theta_t=\pi/2$ 以外，(33)和(35)两式中的分母都是有限的. 当 $\theta_i+\theta_t=\pi/2$ 时，$\tan(\theta_i+\theta_t)=\infty$，因而 $\mathscr{R}_{\parallel}=0$. 在这一情况下(见图1.11)，反射光线与透射光线相互垂直，从折射定律可以得到(因为这时 $\sin\theta_t=\sin\{(\pi/2)-\theta_i\}=\cos\theta_i$)

$$\tan\theta_i=n. \tag{39}$$

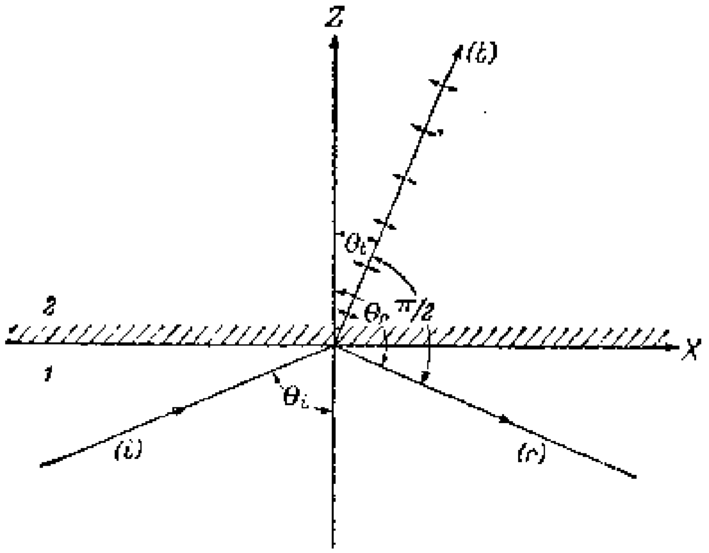


图 1.11　偏振角(布儒斯特角)图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(39)式所决定的 θ_i 角，叫做偏振角或布儒斯特角；它的意义是首先由布儒斯特(D. Brewster, 1781—1868)在1815年注意到的，这就是：如果光在这个角度下入射，则反射光的电矢量没有入射面上的分量。通常说光这时是"在入射面上"偏振的。按照这一传统名词，偏振面就是磁矢量和传播方向所构成的平面了。然而，由于§1.4.2中已经解释过的原因，还是以不用这个名词为好。

上述结果常常叫做布儒斯特定律，它也可从下面更直接的论证来加以说明：入射场使第二媒质中原子的电子发生振动。这些振动沿着透射波电矢量的方向。振动的电子产生另一个波，即反射波，这个波将传回到第一媒质中。但是一个作直线振动的电子，它的辐射是横向的，在电子振动方向上辐射能通量为零(参见§2.2.3)；结果当反射光线和透射光线相互垂直时，反射光线中入射面上的振动就接收不到一点能量。

图1.12绘出玻璃反射率对入射角 θ_i 的关系曲线，玻璃的折射率为1.52。上端一行数字给的是折射角 θ_t。曲线(a)(对 $\mathscr{R}_\parallel$)的零值对应于 $\tan^{-1}1.52 = 56°40'$ 的偏振角。

在光学波长，媒质对空气的折射率通常是1.5左右，但是在无线电波长它们要大得多，偏振角在这里就相应地增大。例如，在光学波长，水的折射率约为1.3，偏振角大约是53°。而在无线电波长，水的折射率约为9，这时偏振角在84°附近。

按照(32)式，可以看出图1.12中的曲线(b)对应于 $\alpha = 45°$。现在我们来证明，这同一条曲线也代表对自然光的反射率 $\mathscr{R}$。自然光就是一个物体被加温到白热化时所产生的光。它的振动方向在迅速地改变，杂乱无章。相应的反射率 $\mathscr{R}$ 可通过对所有振动方向取平均而得到。因为 $\sin^2\alpha$ 和 $\cos^2\alpha$ 的平均值都是1/2，所以 $J_\parallel^{(i)}$ 和 $J_\perp^{(i)}$ 的平均值获得如下关系：

$$J_\parallel^{(i)} = J_\perp^{(i)} = \frac{1}{2} J^{(i)}. \tag{40}$$

然而，对于反射光，两个分量一般将不相同。因为，利用(40)式，有

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

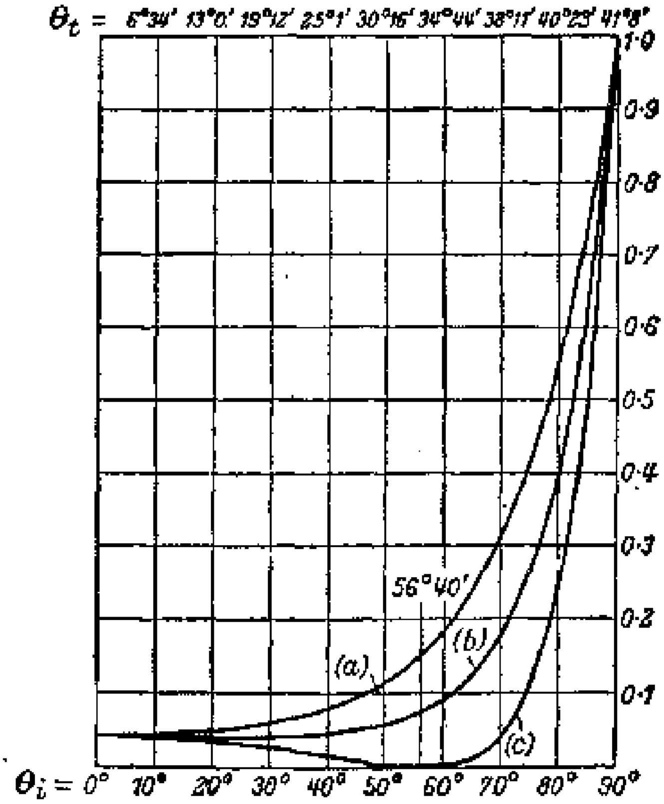


图 1.12 反射光强度随入射角的变化关系

(a) $\mathscr{R}_\perp$; (b) $\frac{1}{2}(\mathscr{R}_\parallel+\mathscr{R}_\perp)$; (c) $\mathscr{R}_\parallel$

[引自 O. D. Chwolson, Lehrb. d. Physik (Braunschweig, Viewag), Bd. II. 2, 2 Aufl. (1922), 716.]

$$\left.\begin{aligned} J_\parallel^{(r)} &= \frac{1}{2}\frac{J_\parallel^{(r)}}{J_\parallel^{(i)}}J^{(i)} = \frac{1}{2}\mathscr{R}_\parallel J^{(i)}, \\ J_\perp^{(r)} &= \frac{1}{2}\frac{J_\perp^{(r)}}{J_\perp^{(i)}}J^{(i)} = \frac{1}{2}\mathscr{R}_\perp J^{(i)}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

这时我们说反射光是部分偏振的，其**偏振度** P 可定义为[1]

$$P = \left|\frac{\mathscr{R}_\parallel - \mathscr{R}_\perp}{\mathscr{R}_\parallel + \mathscr{R}_\perp}\right|. \tag{42}$$

反射率 $\mathscr{R}$ 这时由下式给出：

$$\mathscr{R} = \frac{J^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{J_\parallel^{(r)} + J_\perp^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{1}{2}(\mathscr{R}_\parallel + \mathscr{R}_\perp). \tag{43}$$

---

1) 更普遍的**偏振度**定义在 §10.8.2 中给出，该节还讨论了偏振度的物理意义.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，图 1.12 中的曲线(b)也代表 $\mathscr{R}$。偏振度现在可以表成如下形式：

$$P = \frac{1}{\mathscr{R}}\frac{1}{2}\{|\mathscr{R}_{\parallel} - \mathscr{R}_{\perp}|\};$$

大括弧里的量有时叫做反射光的偏振比例(polarized proportion)。

透射光方面有同样结果。此外，对于自然光，亦有

$$\mathscr{R} + \mathscr{T} = 1. \tag{44}$$

现在我们回到入射光是线偏振光的情况。可以看出，这时反射光和透射光也都是线偏振光，因为相变只是 0 或 π。但是，反射光和透射光的振动方向，同入射光的相比，是向相反方向转动的。现证之于下：

α 所代表的角，即振动面与入射面的夹角，可以叫做振动的方位角。我们将认为，当振动面绕传播方向顺时针转动时，方位角为正(图 1.13)。可以假设，方位角的变化范围是从 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$。对于入射、反射和透射三个电波，分别有

$$\tan\alpha_i = \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}}, \quad \tan\alpha_r = \frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}, \quad \tan\alpha_t = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}. \tag{45}$$

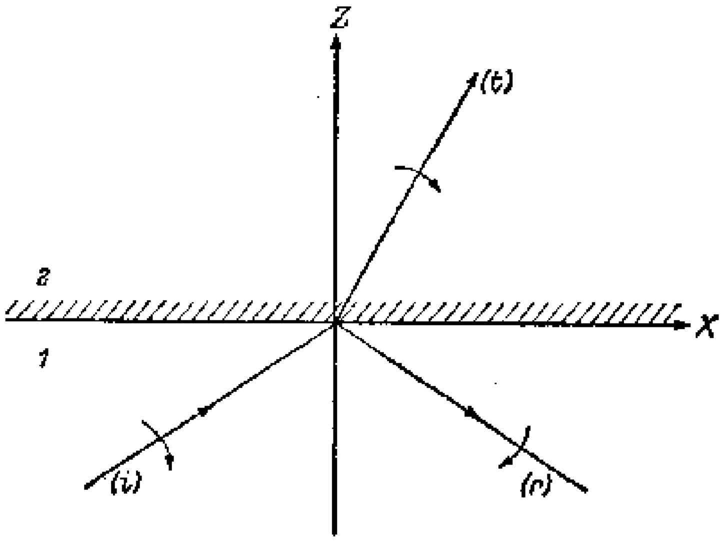


图 1.13 方位角符号图示

利用菲涅耳公式(20)和(21)，则

$$\tan\alpha_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\tan\alpha_i, \tag{46}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\tan\alpha_t = \cos(\theta_i - \theta_t)\tan\alpha_i. \tag{47}$$

因为 $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi/2$，$0 < \theta_t < \pi/2$，所以

$$|\tan\alpha_r| \geqslant |\tan\alpha_i|, \tag{48}$$

$$|\tan\alpha_t| \leqslant |\tan\alpha_i|. \tag{49}$$

(48)式中的等号只是对正入射或掠入射 ($\theta_i = \theta_t = 0$，或 $\theta_i = \pi/2$)才成立；(49)式中的等号只是对正入射才成立. 两个不等式暗示，反射时振动面向偏离入射面方向转动，而透射时振动面向靠拢入射面方向转动. 图1.14说明了 α_r 和 α_t 随入射角的变化关系，其中取 $n = 1.52$，$\alpha_i = 45°$. 我们看到，当 θ_i 等于偏振角 56°40′ 时，$\alpha_r = 90°$. 事实上，按照(46)式，当 $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ 时，不管 α_i 多大，$\tan\alpha_r$ 都等于 ∞ (即 $\alpha_r = \pi/2$).

从布儒斯特定律可以看到，可以用一种简单的方法产生线偏振光，这就是让光在偏振角下发生反射. 所谓诺伦伯格 (Nörrenberg) 反射偏振计(研制人诺伦伯格，1787—1862)就是根据这一原理，它是最古老的仪器之一. 这个偏振计主要由两片玻璃构成(图1.15)，光线在偏振角下与之相遇. 第一片玻璃起着起偏振器的作

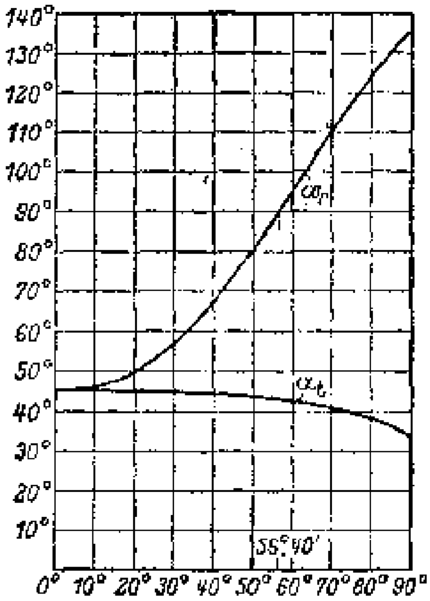


图1.14 方位角随入射角的变化关系
[引自 O. D. Chwolson. *Lehrb. d. Physik*, (Braunschweig, Vieweg) Bd. II. 2, 2 Aufl.(1922), 716.]

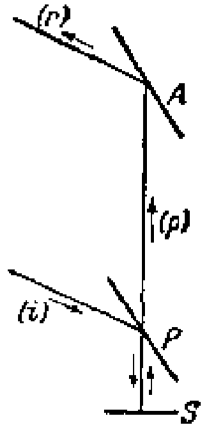


图 1.15 诺伦伯格反射偏振计原理
P——起偏振玻璃片
S——反射镜
A——检偏振器
i——入射光束
p——偏振光束
r——A反射的光束

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

用，即把非偏振光变成线偏振光；第二片玻璃起检偏振器作用，即用来检查线偏振光. 不过，诺伦伯格反射偏振计有几个缺点，主要是，在偏振角下反射光占的比例比较小，而且光线从仪器里经过的路线颇为复杂. 最好是采用这样的仪器，它使入射光产生偏振，但并不改变它的传播方向. 这是能够办到的，例如使用由许多薄的平行平面片组成的片堆. 如果让一束非偏振光入射到片堆上，它每经一次折射就产生一次部分偏振，因而甚至用很少几片就能获得相当高的偏振度. 光从一片的两个界面通过后，两个分量的强度之比是

$$\left(\frac{\mathscr{T}_\perp}{\mathscr{T}_\parallel}\right)^2 = \cos^4(\theta_i - \theta_t) < 1, \tag{50}$$

这一结果由连续两次运用(35)式即可得到. 它表明，在射出薄片后，平行分量比垂直分量强，θ_i 越大，偏振度越高. 如果 θ_i 等于偏振角，$\theta_i + \theta_t = \pi/2$，$\tan\theta_i = n$，则

$$\left(\frac{\mathscr{T}_\perp}{\mathscr{T}_\parallel}\right)^2 = \sin^4 2\theta_i = \left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^4. \tag{51}$$

当 $n = 1.5$ 时，上式等于 0.73. 因此，如果光共通过譬如说 5 片，则两个分量的强度之比为 $0.73^5 \simeq 0.2$.

以前，偏振光的产生大多都借助方解石或石英晶体的双折射效应，如后面 § 14.4.1 所述. 现今，最方便的方法是采用所谓偏振片. 它的作用是根据一种叫做二向色性的物质特性. 某些材料对不同偏振方向的光具有不同的吸收系数，二向色性就是指这些材料所表现的一种特性. 例如，经碘浸染过的聚乙烯醇膜就是这种制品，它能让振动平行于某一平面的偏振光透过近 80%，而让振动垂直此平面的偏振光透过不到 1%. 这个效应的原理我们将在 § 14.6.3 中简单加以讨论.

§ 1.5.4 全反射

一直我们排除了当折射定律

$$\sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{n_{12}} \tag{52}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所给出的折射角 θ_t 不是实角时的情况．现在我们来对它进行考察．这一情况发生在光从光密媒质传播到光疏媒质，即

$$n_{12}=\frac{n_2}{n_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}<1$$

的时候，而且要入射角 θ_i 超过下式所给定的临界角 $\bar{\theta}_i$：

$$\sin\bar{\theta}_i=n_{12}. \tag{53}$$

当 $\theta_i=\bar{\theta}_i$ 时，$\sin\theta_t=1$，即 $\theta_t=90^\circ$，因而光沿着和界面相切的方向射出．如果 θ_i 超过了这个极限值 $\bar{\theta}_i$，就没有光进入第二媒质．所有入射光这时全部被反射回第一媒质，因此我们说它是**全反射**．

虽然如此，第二媒质中的电磁场并未化归乌有，只不过是不再有能量流过界面．因为，如果（略去 n_{12} 的下标 12）令透射波位相因子（15）中的

$$\sin\theta_t=\frac{\sin\theta_i}{n},\quad \cos\theta_t=\pm i\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}-1}, \tag{54}$$

则有

$$e^{-i\tau_t}=e^{-i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{nv_1}\right)}e^{\mp\frac{\omega z}{v_2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}-1}}. \tag{55}$$

（55）式代表一个非均匀波，它沿着入射面上的媒质边界（即 x 方向）传播，而振幅随离界面的距离 z 作指数改变．当然，只有（55）式中平方根前的负号才符合物理状况，因为不然振幅就要随距离 z 的增加而趋向无穷了．可以看出，振幅随进入深度 z 减小得非常快．有效进入深度大约是 $v_2/\omega=\lambda_2/2\pi$，即大约是一个波长．这个波不是横波，因为电矢量在传播方向上的分量不为零，这一点下面即可看到．

从实验上验证第二（光疏）媒质中的扰动颇为困难，因为任何检定这个扰动的装置都将干扰边界条件．粗略的证明可用下法获得：使另一折射媒质向发生全反射的界面靠拢，到相距大约 1/4 波长以内，并同时观测辐射进入此折射媒质的情况[1]．

---

1) W. Culshaw and D. S. Jones, *Proc. Phys. Soc. B*, **66** (1953), 859，曾描述了进行这个验证的一个很高明的方法，他们采用用电学方法产生的波，波长为 1.25 厘米．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

为了把菲涅耳公式(21a)应用到全反射情况，我们把它们改写成如下形式:

$$
\left.\begin{aligned}
R_{\parallel} &= \frac{\sin\theta_i\cos\theta_i - \sin\theta_t\cos\theta_t}{\sin\theta_i\cos\theta_i + \sin\theta_t\cos\theta_t}A_{\parallel},\\
R_{\perp} &= -\frac{\sin\theta_i\cos\theta_t - \sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin\theta_i\cos\theta_t + \sin\theta_t\cos\theta_i}A_{\perp}.
\end{aligned}\right\}\tag{56}
$$

把(54)式代入,想到其中平方根前要取负号,于是得到

$$
\left.\begin{aligned}
R_{\parallel} &= \frac{n^2\cos\theta_i - i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{n^2\cos\theta_i + i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}A_{\parallel},\\
R_{\perp} &= \frac{\cos\theta_i - i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\cos\theta_i + i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}A_{\perp}.
\end{aligned}\right\}\tag{57}
$$

因此

$$
|R_{\parallel}| = |A_{\parallel}|,\quad |R_{\perp}| = |A_{\perp}|,\tag{58}
$$

即,对于每个分量,全反射光的强度都等于入射光的强度.

虽然在第二媒质之中有场存在,但是很容易看出,并没有能量流过界面. 更正确地说,虽然坡印廷矢量在界面法线方向上的分量一般是有限的,但它的时间平均值为零;这就意味着,能量往返流来流去,但是没有持续不断的能流流进第二媒质,这一点下面就来给以证明.

写下透射场的 x 分量和 y 分量,取坐标 $z=0$, 并利用(54)式(这时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 必须用实表达式, 因为能流是 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 分量的二次函数).用星号表示复量共轭,则由(14)式有

$$
\begin{aligned}
E_x^{(t)} &= -\frac{1}{2}[T_{\parallel}\cos\theta_t e^{-i\tau_t^0} + T_{\parallel}^*\cos^*\theta_t e^{+i\tau_t^0}]\\
&= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2} - 1}\,[T_{\parallel}e^{-i\tau_t^0} - T_{\parallel}^* e^{+i\tau_t^0}],\\
E_y^{(t)} &= \frac{1}{2}[T_{\perp}e^{-i\tau_t^0} + T_{\perp}^* e^{+i\tau_t^0}],\\
H_x^{(t)} &= -\frac{1}{2}[T_{\perp}\cos\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t^0} + T_{\perp}^*\cos^*\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{+i\tau_t^0}]
\end{aligned}
$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$= -\frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}-1}\,[T_\perp e^{-i\tau_t^0} - T_\perp^* e^{+i\tau_t^0}],$$

$$H_y^{(t)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_2}[T_\parallel e^{-i\tau_t^0} + T_\parallel^* e^{+i\tau_t^0}],$$

式中

$$\tau_t^0 = \omega\left[t - \frac{x\sin\theta_i}{nv_2}\right].$$

如果我们取

$$S_z^{(t)} = \frac{c}{4\pi}[E_x^{(t)}H_y^{(t)} - E_y^{(t)}H_x^{(t)}]$$

在时间间隔 $-t' \leqslant t \leqslant t'$ 内的平均，其中 t' 比周期 $T = 2\pi/\omega$ 大得多,则对于 $z = 0$ 两项都化为零;因为其中一项包含因子

$$\frac{1}{2t'}\int_{-t'}^{t'}[T_\parallel^2 e^{-2i\tau_t^0} - T_\parallel^{*2} e^{+2i\tau_t^0}]dt$$

$$= \left[T_\parallel^2 e^{+\frac{2i\omega x\sin\theta_i}{nv_2}} - T_\parallel^{*2} e^{-\frac{2i\omega x\sin\theta_i}{nv_2}}\right] O\left(\frac{T}{t'}\right),$$

它在 $t' \gg T$ 时小得可以忽略；另一项包含一个同样的因子，只是以 $T_\perp$ 代替 $T_\parallel$.

相反,如果取 $z = 0$，计算 $\boldsymbol{S}^{(t)}$ 的其他两个分量,即 $S_x^{(t)}$ 和 $S_y^{(t)}$，则可发现它们的时间平均值一般是有限的．因此，能量并不进入第二媒质,而是沿着入射面上的边界流动.

上面的分析适用于稳定状态,它是建立在这样的假设上,即界面和波阵面都是无限扩展的．它没有说明能量最初怎样进入第二媒质．在实际实验中，入射波在空间和时间上将都是有界的[1]；在过程开始之时,少量能量将进入第二媒质中,并将在那里产生一个场.

最后，我们求反射波和入射波各分量的位相变化．由于(58)式,我们可令

1) J. Picht, *Ann. d. Physik* (5), **3** (1929), 433,曾讨论了有限截面的光束的全反射.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = e^{i\delta_{\parallel}}, \quad \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = e^{i\delta_{\perp}}. \tag{59}$$

按(57)式，$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}}$ 和 $\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}}$ 都属于 $z(z^*)^{-1}$ 这种形式．因此，如果 α 是 z 的辐角(即 $z = ae^{i\alpha}$，其中 a、α 都是实的)，则

$$e^{i\delta} = z(z^*)^{-1} = e^{2i\alpha}, \quad 即 \ \tan\frac{\delta}{2} = \tan\alpha,$$

因此

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{\delta_{\parallel}}{2} &= -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{n^2\cos\theta_i}, \\ \tan\frac{\delta_{\perp}}{2} &= -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\cos\theta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由此可见，两个分量受到不同的位相跃变．因此、线偏振光经全反射后将变成椭圆偏振光．

此外可立即写下相对位相差 $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ 的表达式：

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\tan\frac{\delta_{\perp}}{2} - \tan\frac{\delta_{\parallel}}{2}}{1 + \tan\frac{\delta_{\perp}}{2}\tan\frac{\delta_{\parallel}}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\cos\theta_i}}{1 + \frac{\sin^2\theta_i - n^2}{n^2\cos^2\theta_i}},$$

即

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\sin^2\theta_i}. \tag{61}$$

在掠入射($\theta_i = \pi/2$)时和在临界角 $\bar{\theta}_i$($\sin\bar{\theta}_i = n$)下入射时，上式均为零．所以，在此二值之间，相对位相差有一极大值，可由下列方程决定：

$$\frac{d}{d\theta_i}\left(\tan\frac{\delta}{2}\right) = \frac{2n^2 - (1 + n^2)\sin^2\theta_i}{\sin^3\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}} = 0.$$

此式之解为

$$\sin^2\theta_i = \frac{2n^2}{1 + n^2}. \tag{62}$$

把(62)代入(61)，得到相对位相差 δ 的极大值 δ_m 表达式为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\tan\frac{\delta_m}{2}=\frac{1-n^2}{2n}. \tag{63}$$

n 越小,可以得到的相差就越大。

从(61)式可以看出,当 n 给定时,每一个 δ 值对应有两个入射角 θ_i.

全反射时发生的相变,可以用来(正如菲涅耳早已证明的)把线偏振光变成圆偏振光。令入射光的偏振方向与入射面法线成 45° 角($\alpha_i=45°$),以使它的两个振幅分量相等($|A_{\parallel}|=|A_{\perp}|$).于是,由(58)式,$|R_{\parallel}|=|R_{\perp}|$. 此外,再如此选择 n 和 θ_i,使相对位相差 δ 等于 90°. 要由单次反射获得 90° 的 δ,则按(63)式,就需要

$$\tan\frac{\pi}{4}=1<\frac{1-n^2}{2n},$$

即

$$n=n_{12}<\sqrt{2}-1=0.414.$$

这就是说,光密媒质对光疏媒质的折射率 $n_{21}=1/n$ 不得小于 2.41. 这个值过大,虽然有些无吸收物质的折射率接近、甚至超过此值.菲涅耳当时利用了两次玻璃上的全反射. 按照(62)和(63)两式,当 $n_{21}=1.51$ 时,最大相对位相差 $\delta_m=45°56'$,这时入射角 θ_i 应等于 51°20'. 因此,用下列二入射角中的任何一个,都正好能得到 $\delta=45°$:

$$\theta_i=48°37',\quad \theta_i=54°37'.$$

所以,如在其中某一角度下接连全反射两次,则可获得 90° 的位相差。图 1.16 所示的玻璃块即用于此,称为**菲涅耳菱体**.

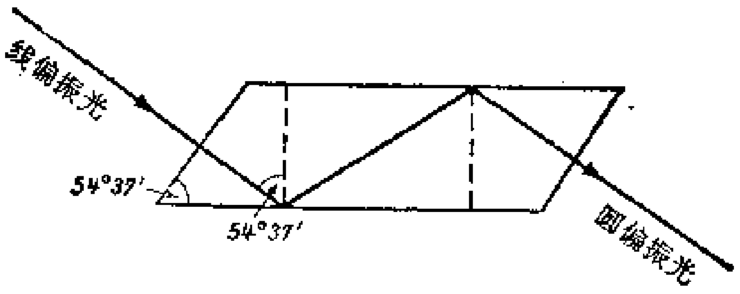


图 1.16 菲涅耳菱体

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当然，非涅耳菱体也可以用来产生椭圆偏振光；这时须令入射（线偏振）光的方位角不等于 45°. 也还可以把程序反过来，用菲涅耳菱体把椭圆偏振光转变成线偏振光.

由于 $n = \sin\bar{\theta}_i$，所以测量临界角 $\bar{\theta}_i$ 可测定折射率 n. 这方法方便而又准确. 作这种测量用的仪器叫做**折射计**.

§ 1.6 波在分层媒质中的传播 介质膜理论

一个媒质，如果它的性质在与某一固定方向相垂直的各个平面上到处一样，我们就叫它**分层媒质**. 设将笛卡儿参考系的 z 轴取在这个特别方向，则

$$\varepsilon = \varepsilon(z), \quad \mu = \mu(z). \tag{1}$$

我们将讨论一个平面时谐电磁波在这种媒质中的传播；这是前节所处理的简单情况的自然推广.

分层媒质理论在光学上相当重要，因为它与**多层膜**，即平行平面薄膜系列有关. 这种薄膜可借助高真空蒸发技术来制备，而且它们的厚度可以控制得非常准确. 它们有许多重要应用. 例如，像后面要证明的，可用作**减反射膜**——一种使表面反射率减小的敷层. 另一方面，在适当条件下，薄膜又可使反射率**增大**，因而当淀积在玻璃面上时可用作分束器. 这是干涉量度学上用的一种把入射光束一分为二的元件. 在适当条件下，多层膜还可用作滤波器，只让选定范围的波谱透过（或反射）. 此外，多层膜还可用作偏振器.

关于介质膜和金属膜问题，科学文献中论述甚广，提出有很多方案计算多层膜的光学效应. 我们将扼要介绍艾贝耳（F. Abelès）[1)]

---

1) F. Abelès, *Ann. de Physique*, **5** (1950), 596—640 *and* 706—782. 关于薄膜问题的详细讨论，可参见比较专门的著作，例如：H. Mayer, *Physik dünner Schichten* (Stuttgart, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 1950); S. Methfessel, *Dünne Schichten* (Halle (Saale), VEB Wilhelm Knapp Verlag, 1953); 或 O. S. Heavens, *Optical Properties of Thin Solid Films* (London, Butterworths Scientific Publications, 1955).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在他卓越而重要的研究中所发展的一般理论，并将详细讨论某些特别重要的特别情况．对于处理只包括很少几层膜的问题，当然不一定要动用一般理论，因此我们将在后面 § 7.6 介绍另一种比较古老的，以多次反射概念为基础的方法．

这一节将只讨论介质分层媒质．§ 13.4 将把分析扩大到导电媒质．

§ 1.6.1 基本微分方程

考虑一个平面时谐电磁波从一分层媒质内传播通过．在特别情况下，当波是线偏振波并且电矢量垂直于入射面时，我们将称之为横电波（用 TE 代表）；当波是线偏振波，但磁矢量垂直于入射面时，我们将称之为横磁波（以 TM 代表）[1]．任何平面波，不论其偏振如何，都可以分解成 TE 和 TM 二个波．因为，按照 § 1.5，垂直分量和平行分量在突变面处的边界条件是相互独立的，所以这两个波将亦彼此无关．此外，如果把麦克斯韦方程中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$、ε 和 $-\mu$ 同时相互对调，则方程保持不变．这样，有关 TM 波的任何定理，均可由 TE 波的相应结果经此置换而立即导出．因此，只要详细研究 TE 波即可．

我们取入射面为 yz 平面[2]，z 是分层层次方向．对于 TE 波，$E_y=E_z=0$，麦克斯韦方程化为下列六个标量方程[设时间因子为 $\exp(-i\omega t)$]：

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}+\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_x=0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=0, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=0, \tag{1c}$$

---

1) 也有用"E 偏振"和"H 偏振"这两个名词的（参见 § 11.4.1）．应该提及，"横电波"和"横磁波"这两个名词在波导理论中具有不同的意义．

2) 不再像前节中那样取为 xz 平面．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{i\omega\mu}{c}H_x = 0, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{i\omega\mu}{c}H_y = 0, \tag{2b}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{i\omega\mu}{c}H_z = 0. \tag{2c}$$

这些方程表明，H_y，H_z 和 E_x 只是 y 和 z 的函数． 从 (1a)，(2b) 和 (2c) 中消去 H_y 和 H_z [或若取 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程 § 1.2(5) 的 x 分量]，得到

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 E_x = \frac{d(\log\mu)}{dz}\frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{3}$$

式中

$$n^2 = \varepsilon\mu, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \tag{4}$$

为解 (3) 式，我们取两个函数——一个只含 y，另一个只含 z——之积作为试探解：

$$E_x(y, z) = Y(y)U(z). \tag{5}$$

这时方程 (3) 变成

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dz^2} - n^2k_0^2 + \frac{d(\log\mu)}{dz}\frac{1}{U}\frac{dU}{dz}. \tag{6}$$

左边一项只是 y 的函数，而右边各项仅与 z 有关． 因此只有当两边同等于某一常数（譬如说 $-K^2$）时，(6) 式才能成立：

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -K^2, \tag{7}$$

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \frac{d(\log\mu)}{dz}\frac{dU}{dz} + n^2k_0^2U = K^2U. \tag{8}$$

方便的做法是令

$$K^2 = k_0^2\alpha^2. \tag{9}$$

于是由 (7) 式得到

$$Y = \text{常数} \times e^{ik_0\alpha y},$$

因而 E_x 的形式为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$E_x = U(z)e^{i(k_0\alpha y-\omega t)}, \tag{10}$$

式中 $U(z)$ 是 z 的函数(可能是复的). 由 (2b) 和 (2c) 式可以看出, H_y 和 H_z 的表达式和 (10) 式形式相同:

$$H_y = V(z)e^{i(k_0\alpha y-\omega t)}, \tag{11}$$

$$H_z = W(z)e^{i(k_0\alpha y-\omega t)}. \tag{12}$$

由于 (1a), (2b) 和 (2c), U, V 和 W 这三个振幅函数有下列方程关系:

$$V' = ik_0[\alpha W + \varepsilon U], \tag{13a}$$

$$U' = ik_0\mu V, \tag{13b}$$

$$\alpha U + \mu W = 0, \tag{13c}$$

一撇表示对 z 微商. 把 (13c) 式的 W 代入 (13a) 式, 和 (13b) 式组成一对 U 和 V 的一阶联立微分方程[1]:

$$\left.\begin{aligned} U' &= ik_0\mu V, \\ V' &= ik_0\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu}\right)U. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

从这两个方程分别消去 U 和 V, 最后得到 U、V 的二阶线性微分方程如下:

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \frac{d(\log \mu)}{dz}\frac{dU}{dz} + k_0^2(n^2 - \alpha^2)U = 0, \tag{15}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \frac{d\left[\log\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu}\right)\right]}{dz}\frac{dV}{dz} + k_0^2(n^2 - \alpha^2)V = 0. \tag{16}$$

按照代换规则(它是麦克斯韦方程对称性的一个结果), 可立即获得 **TM 波** ($H_y = H_z = 0$) 场矢量的非零分量, 其形式为

---

1) 方程 (14) 和下列电输送线方程形式相同:

$$\frac{dV}{dz} = -ZI, \quad \frac{dI}{dz} = -YV.$$

式中 V 是输送线跨压, I 是线中电流, Z 是串联阻抗, Y 是分路导纳. 因此, 分层媒质理论可完全类比于电输送线理论来加以发展. 一些作者就是这样做的, 例如, R. B. Muchmore, *J. Opt. Soc. Amer.*, **38** (1948), 20; K. Schuster, *Ann. d. Physik* (6), **4** (1949), 352; R. Kronig, R. S. Blaisse and J. J. V. V. Sande, *J. Appl. Sci. Res.*, **B, 1** (1947), 63.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$H_x = U(z)e^{i(k_0\alpha y-\omega t)}, \tag{17}$$
$$E_y = -V(z)e^{i(k_0\alpha y-\omega t)}, \tag{18}$$
$$E_z = -W(z)e^{i(k_0\alpha y-\omega t)}, \tag{19}$$
式中
$$\left.\begin{aligned}U' &= ik_0\varepsilon V,\\ V' &= ik_0\left(\mu-\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)U,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$
而W和U有下列方程关系:
$$\alpha U+\varepsilon W=0. \tag{21}$$
U和V这时满足下面的二阶线性微分方程:
$$\frac{d^2U}{dz^2}-\frac{d(\log\varepsilon)}{dz}\frac{dU}{dz}+k_0^2(n^2-\alpha^2)U=0. \tag{22}$$
$$\frac{d^2V}{dz^2}-\frac{d\left[\log\left(\mu-\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)\right]}{dz}\frac{dV}{dz}+k_0^2(n^2-\alpha^2)V=0. \tag{23}$$
U, V 和 W 一般是 z 的复函数. E_x 的等幅面由
$$|U(z)| = 常数$$
给出,而等相面的方程为
$$\phi(z)+k_0\alpha y = 常数,$$
式中$\phi(z)$是U的位相. 一般,这两组面不重合,所以E_x(同样H_y和H_z)是一个非均匀波. 若沿某等相面作一很小位移(dy, dz),则$\phi'(z)dz+k_0\alpha dy=0$; 因此如果以$\theta$代表等相面法线与$OZ$的夹角,则
$$\tan\theta = -\frac{dz}{dy} = \frac{k_0\alpha}{\phi'(z)}.$$
在特别情况下,当波是均匀平面波时,
$$\phi(z)=k_0nz\cos\theta,\quad \alpha=n\sin\theta. \tag{24}$$
因此(9)式所附加的关系
$$\alpha = 常数,$$
可以看作是斯涅耳折射定律对分层媒质的推广.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§1.6.2 分层媒质的特性矩阵

上面所推导的这些微分方程在适当边界条件下的解，以及有关分层媒质的种种定理，用矩阵来表示最为方便．因此，在讨论这些方程的各个结果之前，我们将先对有关矩阵的一些主要定义作一简单说明．

I．一个矩阵，就是指一组排成长方阵列或正方阵列的实数或复数：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a_{ij} 代表第 i 行第 j 列元素．这矩阵在符号上用$\mathbf{A}$或 $[a_{ij}]$ 表示，称为m乘 n 矩阵（或 $m\times n$ 矩阵），因为它包括m行和 n 列．在特别情况下，当 $m=n$ 时，$\mathbf{A}$ 称为m级方阵．如果 $\mathbf{A}$ 为一方阵，则按 $\mathbf{A}$ 的元素和元素位置列阵的行列式称为矩阵 $\mathbf{A}$的行列式，用 $|\mathbf{A}|$ 或 $|a_{ij}|$ 表示．如果 $|\mathbf{A}|=1$，则 $\mathbf{A}$ 称为单位模矩阵．

由定义，只有当两个矩阵行数（m）相同，列数（n）相同，并且相应元素相等时，这两个矩阵才是相等．如果 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 和 $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ 是两个行数列数都相同的矩阵，则它们的和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 被定义为矩阵 $\mathbf{C}$，其元素 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$．同样，它们的差 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 被定义为矩阵 $\mathbf{D}$，其元素 $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$．

一个矩阵，如果它每个元素都是零，就叫做零矩阵．一个方阵，如果它的各元素是，当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，而对于每一 i 值，$a_{ii}=1$，就叫它单位矩阵，并用 $\mathbf{I}$ 代表．

一个矩阵 $\mathbf{A}$ 和一个数 λ（实数或复数）的积被定义为矩阵 $\mathbf{B}$，其元素 $b_{ij}=\lambda a_{ij}$．

两个矩阵的积 $\mathbf{AB}$ 只有当 $\mathbf{A}$ 的列数等于 $\mathbf{B}$ 的行数时才有定义．如果 $\mathbf{A}$ 是一个 $m\times p$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是一个 $p\times n$ 矩阵，则由定义，二者之积是一个 $m\times n$ 矩阵，其元素

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}.$$

这样，两个矩阵的乘法步骤与同级行列式乘法的行、列相乘规则类似．一般，$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$．例如，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

而

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

在特别情况下，当 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 称为可易矩阵．

上述矩阵的各项定义和性质仅仅是我们这里所要用到的一些．所以，现在我们可回过来讨论电磁波在分层媒质中的传播．

II．因为§1.6.1的两个函数 $U(z)$ 和 $V(z)$ 各满足一个二阶线性微分方程［(15)和(16)二式］，所以 U 和 V 可各表成为两个特别解（譬如说 U_1、U_2 和 V_1、V_2）的线性组合．但这些特别解不得任意，它们之间必须满足一阶微分方程(14)的关系：

$$\left.\begin{aligned} U_1' &= ik_0\mu V_1, \\ V_1' &= ik_0\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu}\right)U_1, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} U_2' &= ik_0\mu V_2, \\ V_2' &= ik_0\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu}\right)U_2. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

从这些关系可以得到

$$V_1U_2' - U_1'V_2 = 0, \quad U_1V_2' - V_1'U_2 = 0,$$

所以

$$\frac{d}{dz}(U_1V_2 - U_2V_1) = 0.$$

这一关系意味着，用(14)式任何两个任意解（U_1, V_1; U_2, V_2）组成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{vmatrix} \tag{26}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

都是一常数，即 D 是我们方程系统的一个不变量[1].

为了我们的目的，选择下列两组特别解最为合宜：

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= f(z), \quad U_2 = F(z), \\ V_1 &= g(z), \quad V_2 = G(z), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

它们满足边界条件

$$f(0) = G(0) = 0 \text{ 和 } F(0) = g(0) = 1. \tag{28}$$

于是，满足

$$U(0) = U_0, \quad V(0) = V_0 \tag{29}$$

的解 (U, V) 可以表成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} U &= FU_0 + fV_0, \\ V &= GU_0 + gV_0, \end{aligned}\right\}$$

或者采用矩阵符号，写成

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}\mathbf{Q}_0, \tag{30}$$

式中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} U(z) \\ V(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} F(z) & f(z) \\ G(z) & g(z) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

由于 $D =$ 常数这一关系，方阵 $\mathbf{N}$ 的行列式是一常数．令 $z = 0$，即可得到这一常数，结果是

$$|\mathbf{N}| = Fg - fG = 1.$$

通常，把 U_0 和 V_0 表成 $U(z)$ 和 $V(z)$ 的函数既有方便之处．解 U_0 和 V_0，得到

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{M}\mathbf{Q}, \tag{32}$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} g(z) & -f(z) \\ -G(z) & F(z) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

这个矩阵也是单位模矩阵，

$$|\mathbf{M}| = 1. \tag{34}$$

---

1) 这一结果也可从二阶线性微分方程的伏龙斯基行列式的一个共知特性得到．此外，还可证明，如果 U_1 为已知，则可通过积分由下列关系求得 U_2：

$$U_2 = ikDU_1\int\frac{\mu}{U_1^2}dz.$$

参见 F. Abelès, *Ann. de Physique*, **5** (1950), 603.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

M的意义很清楚：它使 $z=0$ 平面上电(或磁)矢量的 x 分量和 y 分量，同任意平面($z=$ 常数)上的分量建立起关系．前面我们看到，知道 U 和 V，就足以完全确定场．因此，为了决定一个平面单色波在分层媒质中的传播，只需要给这个媒质确定一个适当的 2×2 单位模矩阵**M**．因为这个缘故，我们将把**M**叫做分层媒质的特性矩阵．可以证明，行列式 $|\mathbf{M}|$ 的常数性质意味着能量守恒[1]．

现在我们来看看几种特别重要情况的特性矩阵形式．

(a) 均匀介质膜

在此情况下，ε，μ 和 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 都是常数．如果以 θ 代表波法线与 z 轴的夹角，则由(24)式，

$$\alpha = n\sin\theta.$$

对于 TE 波，按照(15)和(16)式，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2U}{dz^2}+(k_0^2n^2\cos^2\theta)U=0,\\ \frac{d^2V}{dz^2}+(k_0^2n^2\cos^2\theta)V=0.\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

很容易看出，这些方程的解，满足关系式(14)的是

$$\left.\begin{aligned}U(z)&=A\cos(k_0nz\cos\theta)+B\sin(k_0nz\cos\theta),\\ V(z)&=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta\{B\cos(k_0nz\cos\theta)\\ &\quad -A\sin(k_0nz\cos\theta)\}.\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

因此满足边界条件(28)的那些特别解是

$$\left.\begin{aligned}U_1&=f(z)=\frac{i}{\cos\theta}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin(k_0nz\cos\theta),\\ V_1&=g(z)=\cos(k_0nz\cos\theta),\\ U_2&=F(z)=\cos(k_0nz\cos\theta),\\ V_2&=G(z)=i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta\sin(k_0nz\cos\theta).\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

1) 要证明这一点，可先计算出(51)式的反射率 $\mathscr{R}$ 和透射率 $\mathscr{T}$，用特性矩阵**M**各元素表出，再利用(45)式所给的无吸收媒质特性矩阵这一形式，即可看到，如果 $|\mathbf{M}|=1$，能量守恒定律 $\mathscr{R}+\mathscr{T}=1$ 将得到满足．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果令

$$p=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta, \tag{38}$$

则可看到特性矩阵是

$$\mathbf{M}(z)=\begin{bmatrix}\cos(k_0nz\cos\theta) & -\frac{i}{p}\sin(k_0nz\cos\theta)\\ -ip\sin(k_0nz\cos\theta) & \cos(k_0nz\cos\theta)\end{bmatrix}. \tag{39}$$

对于 TM 波，上面这些方程仍然适用，只要把其中 p 换成

$$q=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cos\theta. \tag{40}$$

(b) 分层媒质作为均匀薄膜的膜堆

考虑两个接邻的分层媒质，第一个的区域从 $z=0$ 到 $z=z_1$，第二个从 $z=z_1$ 到 $z=z_2$. 如果 $\boldsymbol{M}_1(z)$ 和 $\boldsymbol{M}_2(z)$ 是这两个媒质的特性矩阵，则

$$\mathbf{Q}_0=\mathbf{M}_1(z_1)\mathbf{Q}(z_1),\ \ \mathbf{Q}(z_1)=\mathbf{M}_2(z_2-z_1)\mathbf{Q}(z_2),$$

所以

$$\mathbf{Q}_0=\mathbf{M}(z_2)\mathbf{Q}(z_2),$$

式中

$$\mathbf{M}(z_2)=\mathbf{M}_1(z_1)\mathbf{M}_2(z_2-z_1).$$

这个结果可立即推广到一连串分层媒质以 $0\leqslant z\leqslant z_1$, $z_1\leqslant z\leqslant z_2$, ……, $z_{N-1}\leqslant z\leqslant z_N$ 为界域的情况. 设这些分层媒质的特性矩阵是 $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ……, $\mathbf{M}_N$, 则

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{Q}_0=\mathbf{M}(z_N)\mathbf{Q}(z_N),\\ &\text{式中}\\ &\mathbf{M}(z_N)=\mathbf{M}_1(z_1)\mathbf{M}_2(z_2-z_1)\cdots\cdots\mathbf{M}_N(z_N-z_{N-1}).\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

借助(41)式，可以很容易推导出任何分层媒质的特性矩阵的近似表达式[1]：我们把这媒质看成是由大量薄膜组成，各膜的厚度

---

1) 关于折射率连续改变的分层媒质，较为详细的讨论见 R. Jacobsson, *Progress in Optics*, Vol. 5, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 247.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

为 $\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3 \cdots\cdots \delta z_N$. 如果最大的厚度足够小，则 ε, μ 和 n 在各个薄膜内可看作为常数. 由(39)式可知，第 j 个膜的特性矩阵这时可近似地表成为

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{i}{p_j} k_0 n_j \delta z_j \cos\theta_j \\ -ip_j k_0 n_j \delta z_j \cos\theta_j & 1 \end{bmatrix}.$$

因此，整个媒质作为薄膜堆来看，其特性矩阵近似地等于(仍然只保留到 δz 的一次项)

$$\mathbf{M} = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} 1 & -ik_0 B \\ -ik_0 A & 1 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

式中

$$A = \sum_{j=1}^{N} p_j n_j \delta z_j \cos\theta_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\varepsilon_j - \frac{\alpha^2}{\mu_j}\right) \delta z_j,$$

$$B = \sum_{j=1}^{N} \frac{n_j}{p_j} \delta z_j \cos\theta_j = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \delta z_j.$$

进行到极限，当 $N \to \infty$ 而同时最大的 $|\delta z_j| \to 0$ 时，得到

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -ik_0 \mathscr{B} \\ -ik_0 \mathscr{A} & 1 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

式中

$$\mathscr{A} = \int \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu}\right) dz, \quad \mathscr{B} = \int \mu dz, \tag{44}$$

积分是对整个 z 区域进行的. 方程(43)给出了任意分层媒质的特性矩阵的一级近似. 高级近似可以通过在 $\cos(k_0 n \delta z \cos\theta)$ 和 $\sin(k_0 n \delta z \cos\theta)$ 的展开式中和在(42)的乘式中保留更高次项而得到[1].

因为，对于无吸收媒质，ε 和 μ 都是实数，故亦可知，无吸收分层媒质的特性矩阵具有如下形式:

$$M = \begin{bmatrix} a & ib \\ ic & d \end{bmatrix}, \tag{45}$$

---

1) F. Abelès, *Ann. d. Physique* 5 (1950), p. 611 这篇论文对此作了详细讨论.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 a, b, c 和 d 都是实数.

§1.6.3 反射系数和透射系数

考虑一个平面波入射到一分层媒质上，这个分层媒质的区域从 $z=0$ 到 $z=z_1$，两边各与一个均匀的半无穷大媒质接界. 我们现在来推导反射波和透射波的振幅和强度表达式[1].

同前，设 A、R 和 T，代表入射波、反射波和折射波的电矢量振幅(可能是复数). 此外，设 ε_1、μ_1 和 ε_l、μ_l 为第一媒质和最后一个媒质的介电常数和磁导率，并设 θ_1 和 θ_l 为入射波法线和透射波法线与 z 方向(分层层次方向)的夹角.

§1.1 的边界条件要求，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在通过分层媒质两个边界中的每一个时其切线分量应该连续. 把这些条件用到 TE 波，并应用 §1.4(4)式

$$\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E},$$

即可得到下列二组振幅方程:

$$\left.\begin{aligned}U_0&=A+R, & U(z_1)&=T,\\ V_0&=p_1(A-R), & V(z_1)&=p_lT,\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

式中

$$p_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1,\quad p_l=\sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\mu_l}}\cos\theta_l.\tag{47}$$

(46)式中 U_0, V_0, U 和 V 这四个量是通过基本关系式(32)相互联系的;因此

$$\left.\begin{aligned}A+R&=(m'_{11}+m'_{12}p_l)T,\\ p_1(A-R)&=(m'_{21}+m'_{22}p_l)T,\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

m'_{ij} 是媒质的特性矩阵的元素，取 $z=z_l$ 处的值.

从(48)式我们得到分层媒质——膜的反射系数和透射系数:

$$r=\frac{R}{A}=\frac{(m'_{11}+m'_{12}p_l)p_1-(m'_{21}+m'_{22}p_l)}{(m'_{11}+m'_{12}p_l)p_1+(m'_{21}+m'_{22}p_l)},\tag{49}$$

---

1)当研究 TE 波时，考虑的是电矢量振幅，而研究 TM 波时，考虑的是磁矢量振幅.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$t=\frac{T}{A}=\frac{2p_1}{(m'_{11}+m'_{12}p_l)p_1+(m'_{21}+m'_{22}p_l)}. \tag{50}$$

用 r 和 t 表示时，反射率和透射率是

$$\mathscr{R}=|r|^2,\quad \mathscr{T}=\frac{p_l}{p_1}|t|^2. \tag{51}$$

r 的位相 δ_r 可以叫做反射相变，而 t 的位相 δ_t 可以叫做透射相变. 相变 δ_r 是对第一个突变面来说的，而相变 δ_t 是对分层媒质同最后半无穷大媒质的界平面来说的.

TM 波的相应公式可由(49)—(51)经代换立即得到，其中 p_1 和 p_l 这两个量要换成

$$q_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta_1,\quad q_l=\sqrt{\frac{\mu_l}{\varepsilon_l}}\cos\theta_l. \tag{52}$$

这时 r 和 t 是磁矢量的振幅之比，而不是电矢量的振幅之比.

§1.6.4 均匀介质膜[1)]

在光学上，处于两个均匀媒质之间的均匀介质膜的性质特别重要，因此我们将比较详细地来研究这一情况. 我们假定，所有媒质都是非磁性的 ($\mu=1$).

单个均匀介质膜的特性矩阵已由(39)式给出. 现在用下标 1,2,3 表示同这三个媒质有关的量（见图 1.17），并用 h 表示膜厚，则

$$m'_{11}=m'_{22}=\cos\beta,\quad m'_{12}=-\frac{i}{p_2}\sin\beta,\quad m'_{21}=-ip_2\sin\beta, \tag{53}$$

式中

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda_0}n_2h\cos\theta_2,$$

1) 关于单层膜特性的主要公式的另一种推导方法，可见 §7.6.1. 当然，通过把 §1.1.3 的边界条件应用于膜的各个边界，也可直接推导出这些公式，参见：M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933), p. 125; 或 H. Mayer, *Physik dünner Schichten* (Stuttgart, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft 1950), p. 145.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

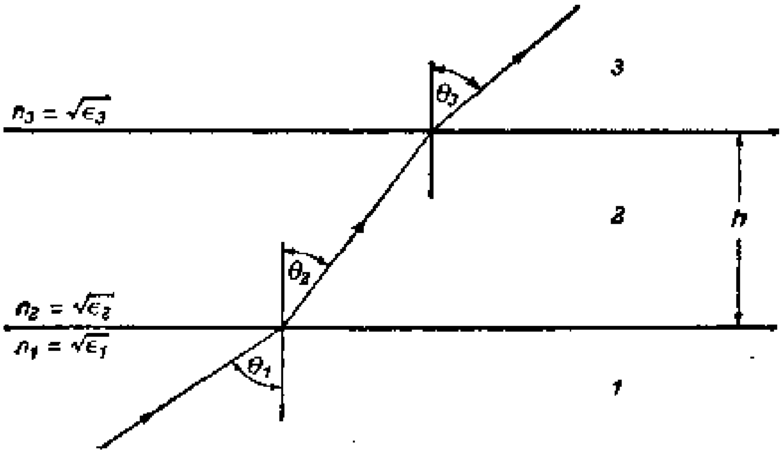


图 1.17 电磁波通过一个均匀膜的传播

并且

$$p_j = n_j\cos\theta_j, \quad (j=1,2,3). \tag{54}$$

把这些式子代入(49)和(50)式,令其中 $l=3$,即可得到反射系数 r 和透射系数 t. 所得公式可以用第一和第二两面各自的反射系数和透射系数 r_{12}, t_{12} 和 r_{23}, t_{23} 方便地表出. 按照菲涅耳公式 § 1.5(20)和(21),对于 TE 波,

$$r_{12} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}, \tag{55}$$

$$t_{12} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{2p_1}{p_1+p_2}, \tag{56}$$

r_{23} 和 t_{23} 的式子与此类似. 用 r_{12}, r_{23}, t_{12}, t_{23} 表示时, r 和 t 的公式变成[1)]

$$r = \frac{r_{12}+r_{23}e^{2i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{2i\beta}}, \tag{57}$$

$$t = \frac{t_{12}t_{23}e^{i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{2i\beta}}; \tag{58}$$

由此得到反射率和透射率为

$$\mathscr{R} = |r|^2 = \frac{r_{12}^2+r_{23}^2+2r_{12}r_{23}\cos 2\beta}{1+r_{12}^2r_{23}^2+2r_{12}r_{23}\cos 2\beta}; \tag{59}$$

---

1) 这些公式首先由 G. B. Airy 用不同方法导出,见 *Phil. Mag.*, **2** (1933),20; 又见 *Ann. Phys. and Chem.* (Ed. Poggendorf), **41** (1837), 512.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mathscr{T}=\frac{p_3}{p_1}|t|^2=\frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}\frac{t_{12}^2t_{23}^2}{1+r_{12}^2r_{23}^2+2r_{12}r_{23}\cos 2\beta}. \tag{60}$$

通过一步步计算,如所预料,可以得到

$$\mathscr{R}+\mathscr{T}=1.$$

相变 δ_r 和 δ_t 从(57)和(58)也很容易算出,结果得到

$$\tan\delta_r=\tan(\arg r)=\frac{r_{23}(1-r_{12}^2)\sin 2\beta}{r_{12}(1+r_{23}^2)+r_{23}(1+r_{12}^2)\cos 2\beta}, \tag{61}$$

$$\tan\delta_t=\tan(\arg t)=\frac{1-r_{12}r_{23}}{1+r_{12}r_{23}}\tan\beta. \tag{62}$$

现在让我们简单地看一看这些公式的含义. 首先可注意,当(59)和(60)两式中的 β 换成 $\beta+\pi$ 时,即当 h 换成 $h+\Delta h$, 其中

$$\Delta h=\frac{\lambda_0}{2n_2\cos\theta_2} \tag{63}$$

时,两式都保持不变. 因此,厚度上差 $\lambda_0/2n_2\cos\theta_2$ 整数倍的那些介质膜,它们的反射率和透射率是一样的.

其次,我们来求反射系数为极大或极小时膜的光学厚度. 如果令

$$H=n_2h, \tag{64}$$

则从(59)式得到,当 $\sin 2\beta=0$, 即

$$H=\frac{m\lambda_0}{4\cos\theta_2}\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

时,

$$\frac{d\mathscr{R}}{dH}=0.$$

我们必须区分两种情况:

(1) m 是奇数,即 H 值是下列数值中的任一个:

$$H=\frac{\lambda_0}{4\cos\theta_2},\ \frac{3\lambda_0}{4\cos\theta_2},\ \frac{5\lambda_0}{4\cos\theta_2},\ \cdots\cdots,$$

这时,$\cos 2\beta=-1$, (59)式化为

$$\mathscr{R}=\left(\frac{r_{12}-r_{23}}{1-r_{12}r_{23}}\right)^2. \tag{65}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

特别在正入射时，由(55)式可得到

$$r_{12}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2},\quad r_{23}=\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3},\tag{66}$$

而(65)式则变成

$$\mathscr{R}=\left(\frac{n_1n_3-n_2^2}{n_1n_3+n_2^2}\right)^2.\tag{67}$$

(2) m 是偶数，即 H 值是下列数值中的任一个：

$$H=\frac{\lambda_0}{2\cos\theta_2},\quad \frac{2\lambda_0}{2\cos\theta_2},\quad \frac{3\lambda_0}{2\cos\theta_2},\quad \cdots\cdots,$$

这时，$\cos 2\beta=1$，(59)式化为

$$\mathscr{R}=\left(\frac{r_{12}+r_{23}}{1+r_{12}r_{23}}\right)^2.\tag{68}$$

特别是，在正入射时，此式变成

$$\mathscr{R}=\left(\frac{n_1-n_3}{n_1+n_3}\right)^2,\tag{69}$$

和 n_2 无关．在斜入射情况下，唯一的差别是所有公式中的 n_j 被换成为 $n_j\cos\theta_j(j=1,2,3)$；因此，光学厚度为 $m\lambda_0/2\cos\theta_2$ $(m=1, 2, 3,\cdots\cdots)$ 的膜片对反射(或透射)辐射的强度没有影响．

其次，我们必须确定这些极值的性质．经过一步步运算后可以得到，当 $H=m\lambda_0/4\cos\theta_2$ $(m=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 时，如果

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^m r_{12}r_{23}[1+r_{12}^2r_{23}^2-r_{12}^2-r_{23}^2]\lessgtr 0,\\ \text{则}\quad &\frac{d^2\mathscr{R}}{dH^2}\gtrless 0,\end{aligned}\right\}\tag{70}$$

所以前式中“<”符号对应于极小，“>”符号对应于极大．特别在正入射时，r_{12} 和 r_{23} 系由(66)式表出，结果有：

$$\left.\begin{aligned}&\text{极大，如果}\ (-1)^m(n_1-n_2)(n_2-n_3)>0,\\ &\text{极小，如果}\ (-1)^m(n_1-n_2)(n_2-n_3)<0.\end{aligned}\right\}\tag{71}$$

通常，第一媒质是空气($n_1\sim 1$)，因而可以看出，当膜的光学厚度取 $\lambda_0/4, 3\lambda_0/4, 5\lambda_0/4\cdots\cdots$ 诸值中任一值时，反射率是一极大还是一极小，其情况看膜的折射率是大于还是小于第三媒质的折射率而定；当膜的光学厚度取 $\lambda_0/2$, $2\lambda_0/2$, $3\lambda_0/2\cdots\cdots$ 诸值中任一值

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，情况相反。

这些结果表示在图 1.18 中，它们同实验[1]很好的一致。

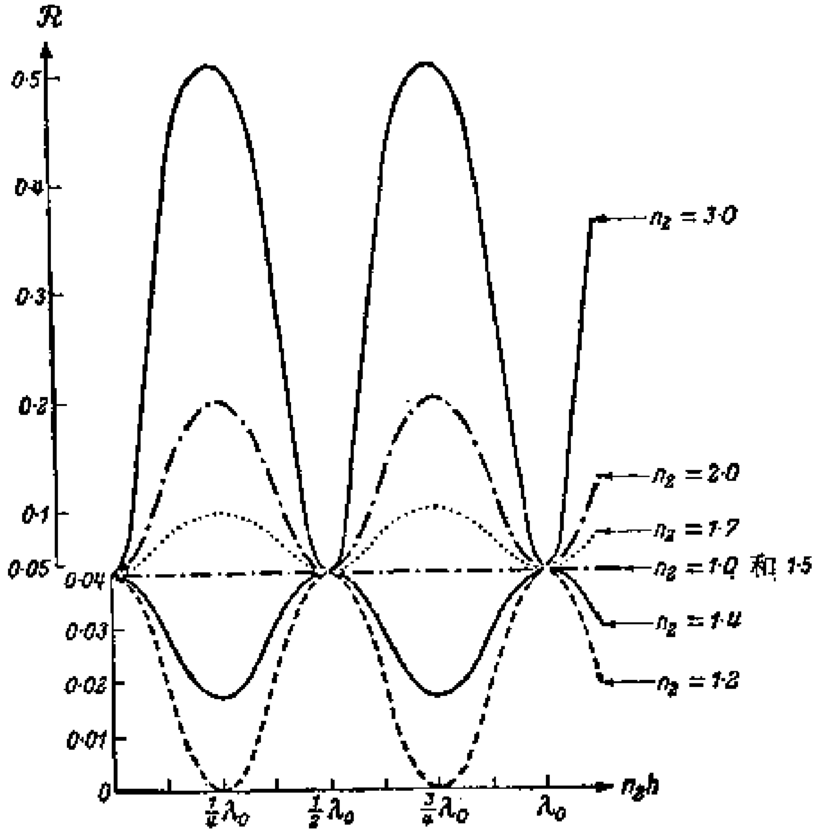


图 1.18 介质膜的反射率随其光学厚度的变化关系，膜的折射率为 $n_2(\theta_1=0, n_1=1.0, n_3=1.5)$

[引自 R. Messner, *Zeiss Nachr.*, **4** (H9) (1943), 253.]

从以上分析显然可见，一个光学厚度为 1/4 波长而折射率足够低的膜片，可用来作为减反射膜，使表面反射率降低（这时人们说表面被"去掉光泽"）。作减反射膜最通用的两种材料是冰晶石（$n\sim 1.35$）和氟化镁（MgF_2，$n\sim 1.38$）[2]。

按照（67）式，如果

$$n_2=\sqrt{n_1n_3}, \tag{72}$$

1）例如，见 K. Hammer, *Z. tech. Phys.*, **24** (1943), 169.

2）关于多层减反射膜的设计和性能，A. Musset 和 A. Thelen 曾进行了讨论，见 *Progress in Optics*, Vol. 8, ed. E. Wolf (Amsterdam, North-Holland Publishing Company and New York American Elsevier Publishing Company, 1970), p. 201.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

则正入射的反射率严格为零．当 $n_1 = 1$, $n_3 = 1.5$ 时，这要求 $n_2 \sim 1.22$．这个条件实际上是不能满足的．然而，对(59)式进行比较详细的分析可以看到，在斜入射下，对于 TM 波(电矢量平行于入射面)，反射率有可能等于零，但 TE 波(电矢量垂直于入射面)不行．这就是说，在适当条件下，能同时使 $\mathscr{R}_\parallel = 0$, $\mathscr{R}_\perp \neq 0$．因此，一个介电材料合适的薄膜，还可以用作反射式偏振器．这种偏振器可看作是前面讨论布儒斯特角时所说的那种简单装置的推广．要获得大的 $\mathscr{R}_\perp$(同时 $\mathscr{R}_\parallel = 0$)，薄膜的折射率 n_2 必须尽可能地大[1]．例如，当 $n_1 = 1$, $n_2 = 2.5$, $n_3 = 1.53$ 时，得到在 $\theta_1 = 74°30'$ 时，$\mathscr{R}_\parallel = 0$, $\mathscr{R}_\perp = 0.79$．

如果在一个玻璃表面上敷一层折射率足够高的材料，按照前面的分析，这玻璃表面的反射率将大大增高(见图 1.18 和 1.19)．因此这表面可作为一个很好的分束器．二氧化钛(TiO_2, $n \sim 2.45$)或硫化锌(ZnS, $n \sim 2.3$)敷层用作此途非常相宜，反射率最高可

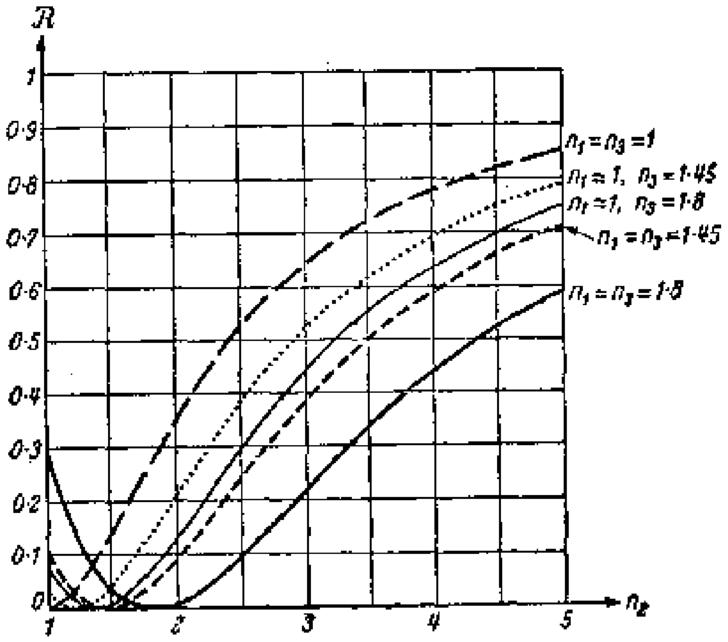


图 1.19 1/4 波长膜($n_2h = \lambda_0/4$)的正入射反射率随膜折射率 n_2 的变化关系

[引自 K. Hammer, *Z. tech. Phys.*, **24** (1943), 169.]

1) 参看 H. Schröder, *Optik*, **3** (1948), 499.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

达大约 30%. 还有一些高折射率材料，但它们对入射光有些吸收. 例如，用三硫化二锑(Sb_2S_3, $n \sim 2.8$)敷层能够得到$\mathscr{R}=\mathscr{T}=0.46$，但这时入射光有 8% 被薄膜所吸收.

现在我们来看看当第一个边界上发生全反射时情况如何，这也是有意义的. 在这一情况下，

$$n_1 \sin\theta_1 > n_2, \quad n_1 \sin\theta_1 < n_3,$$

并且(参见 § 1.5 方程(54))

$$n_2 \cos\theta_2 = i\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_1 - n_2^2}. \tag{73}$$

这时，两个边界各自的反射系数(参见 § 1.5(21)式)为

$$\left.\begin{aligned} r_{12} &= \frac{n_1\cos\theta_1 - i\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}}{n_1\cos\theta_1 + i\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}}, \\ r_{23} &= \frac{i\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2} - n_3\cos\theta_3}{i\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2} + n_3\cos\theta_3}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

如果令

$$k_0 n_2 h \cos\theta_2 = ib, \tag{75}$$

按照(73)式，其中

$$b = \frac{2\pi}{\lambda_0} h \sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}, \tag{76}$$

则反射系数公式(57)变成

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-2b}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-2b}}. \tag{77}$$

因为 $|r_{12}| = |r_{23}| = 1$，所以 r_{12} 和 r_{23} 的形式是

$$r_{12} = e^{i\phi_{12}}, \quad r_{23} = e^{i\phi_{23}}, \tag{78}$$

式中 ϕ_{12} 和 ϕ_{23} 都是实数；因此反射率

$$\mathscr{R} = |r|^2 = \frac{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} - \phi_{23})}{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} + \phi_{23})}. \tag{79}$$

和前一情况相反，现在 $\mathscr{R}$ 不再是膜厚的周期函数. (76)式表明，如果忽略折射率对波长的依赖关系，则 b 与波长成反比. 因为当 b 足够大时 $\mathscr{R}$ 实际上等于1，所以较短的波长将不得通过；这膜因此就是一个**低通滤波器**——一种只让长波通过的器件.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

以上我们看到，利用材料合适的介质膜，可获得多种功效．显然，如以若干这样的膜排成序列，则所需性能仍可进一步增强．这种多层膜的特性矩阵可借助(41)式所表达的定理求得[1]．下面我们只详细讨论周期性多层膜情况．

§1.6.5 周期性分层媒质

一个周期为 h 的周期性分层媒质，其特性是它的介电常数 ε 和磁导率 μ 不仅只是 z 的函数，而且

$$\varepsilon(z+jh)=\varepsilon(z),\quad \mu(z+jh)=\mu(z),$$

其中 j 是某固定范围 $1\leqslant j\leqslant N$ 内的任一整数．

设 $\mathbf{M}(h)$ 是对应于一个周期的特性矩阵，并令[2]

$$\mathbf{M}(h)=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}. \tag{80}$$

按照(41)式并考虑到周期性因素，有

$$\mathbf{M}(Nh)=\underbrace{\mathbf{M}(h)\cdot\mathbf{M}(h)\cdots\mathbf{M}(h)}_{N次}=(\mathbf{M}(h))^N. \tag{81}$$

为了计算矩阵 $\mathbf{M}(Nh)$ 的各个元素，我们利用矩阵论的一个结果，按照这个结果，单位模矩阵 $\mathbf{M}(h)$ 的 N 次方[3]

$$[\mathbf{M}(h)]^N=\begin{bmatrix} m_{11}\mathscr{U}_{N-1}(a)-\mathscr{U}_{N-2}(a) & m_{12}\mathscr{U}_{N-1}(a)\\ m_{21}\mathscr{U}_{N-1}(a) & m_{22}\mathscr{U}_{N-1}(a)-\mathscr{U}_{N-2}(a)\end{bmatrix}, \tag{82}$$

式中

$$a=\frac{1}{2}(m_{11}+m_{22}), \tag{83}$$

---

1) 有关多层膜的公式已由许多作者给出，例如，R. L. Mooney, *J. Opt. Soc. Amer.*, **36** (1946), 256; W. Weinstein, *ibid*, **37** (1947), 576.

2) 我们现在把各矩阵元素上的一撇略去．

3) 这个结果的正确性可利用下列递推公式用演绎法加以证明：

$$\mathscr{U}_j(x)=2x\mathscr{U}_{j-1}(x)-\mathscr{U}_{j-2}(x),$$

此式作为一个恒等式可得自 Chebyshev 多项式定义．

直接的矩阵论证明则由 F. Abelès (*Ann. de Physique*, **5** (1950), 777) 给出．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

而 $\mathscr{U}_N$ 是第二类车比雪夫(Chebyshev)多项式[1]

$$\mathscr{U}_N(x) = \frac{\sin[(N+1)\cos^{-1}x]}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{84}$$

多层膜通常由一系列折射率一高(n_3)一低(n_2)交替相间的均匀膜层构成，高折射率膜层的厚度为 h_3，低折射率膜层的厚度为 h_2，整个系列置于折射率为 n_1 和 n_l 的两个均匀媒质之间(见图1.20)．我们仍然假定所有媒质都是非磁性的($\mu=1$)，并令

$$\left.\begin{aligned} &\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 h_2 \cos\theta_2, \quad \beta_3 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_3 h_3 \cos\theta_3, \\ &p_2 = n_2\cos\theta_2, \qquad\qquad p_3 = n_3\cos\theta_3. \\ &h = h_2 + h_3. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

按照(39)和(41)，这时一个周期的特性矩阵是

$$\mathbf{M}_2(h) = \begin{bmatrix} \cos\beta_2 & -\dfrac{i}{p_2}\sin\beta_2 \\ -ip_2\sin\beta_2 & \cos\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta_3 & -\dfrac{i}{p_3}\sin\beta_3 \\ -ip_3\sin\beta_3 & \cos\beta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta_2\cos\beta_3 - \dfrac{p_3}{p_2}\sin\beta_2\sin\beta_3 & -\dfrac{i}{p_3}\cos\beta_2\sin\beta_3 - \dfrac{i}{p_2}\sin\beta_2\cos\beta_3 \\ -ip_2\sin\beta_2\cos\beta_3 - ip_3\cos\beta_2\sin\beta_3 & \cos\beta_2\cos\beta_3 - \dfrac{p_2}{p_3}\sin\beta_2\sin\beta_3 \end{bmatrix} \tag{86}$$

---

1) 这些多项式满足下列正交归一化条件:

$$\int_{-1}^{+1} \mathscr{U}_m(x)\mathscr{U}_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = 0 \quad 当\ n \neq m$$
$$= \frac{\pi}{2} \quad 当\ n = m.$$

为方便起见，现将前六个多项式的显式录列于下:

$$\begin{aligned} &\mathscr{U}_0(x) = 1, && \mathscr{U}_3(x) = 8x^3 - 4x, \\ &\mathscr{U}_1(x) = 2x, && \mathscr{U}_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ &\mathscr{U}_2(x) = 4x^2 - 1, && \mathscr{U}_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x. \end{aligned}$$

Chebyshev 多项式表已由 National Bureau of Standands Washington (Applied Mathematics Series 9 (1952)) 出版，多项式的各项重要性质书中亦予列出．又见 *Higher Transcendental Functions* (Bateman Manuscript Project, New York, McGraw-Hill, Vol. **2** (1953), p. 183).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

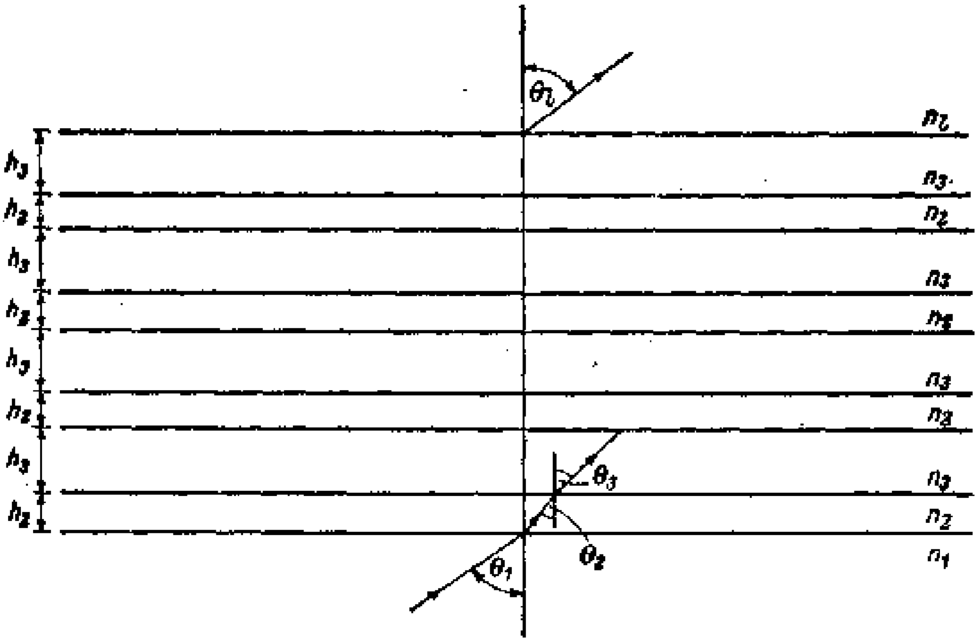


图 1.20 周期性多层膜

因此,按照(81)式,多层膜(共有 $2N$ 层膜)的特性矩阵 $\mathbf{M}_{2N}(Nh)$ 由下列公式(引自 Abelès)给出:

$$\mathbf{M}_{2N}(Nh)=\begin{bmatrix}\mathscr{M}_{11} & \mathscr{M}_{12}\\ \mathscr{M}_{21} & \mathscr{M}_{22}\end{bmatrix}, \tag{87}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{M}_{11}&=\left[\cos\beta_2\cos\beta_3-\frac{p_3}{p_2}\sin\beta_2\sin\beta_3\right]\\
&\quad\times\mathscr{U}_{N-1}(a)-\mathscr{U}_{N-2}(a),\\
\mathscr{M}_{12}&=-i\left[\frac{1}{p_3}\cos\beta_2\sin\beta_3+\frac{1}{p_2}\sin\beta_2\cos\beta_3\right]\mathscr{U}_{N-1}(a),\\
\mathscr{M}_{21}&=-i\left[p_2\sin\beta_2\cos\beta_3+p_3\cos\beta_2\sin\beta_3\right]\mathscr{U}_{N-1}(a),\\
\mathscr{M}_{22}&=\left[\cos\beta_2\cos\beta_3-\frac{p_2}{p_3}\sin\beta_2\sin\beta_3\right]\\
&\quad\times\mathscr{U}_{N-1}(a)-\mathscr{U}_{N-2}(a),
\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

而

$$a=\cos\beta_2\cos\beta_3-\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_3}+\frac{p_3}{p_2}\right)\sin\beta_2\sin\beta_3. \tag{89}$$

把这些式子代入(49)和(50)式,就得到多层膜的反射系数和透

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

射系数.

特别常见的情况是二个基膜的光学厚度相同（通常为 $\lambda_0/4$），即

$$n_2h_2 = n_3h_3, \tag{90}$$

并且是正入射 ($\theta_1 = 0$). 这时，

$$\beta_2 = \beta_3 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2h_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_3h_3, \tag{91}$$

如果用 β 代表这个共同值，则车比雪夫多项式的宗量化为

$$a = \cos^2\beta - \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_3} + \frac{n_3}{n_2}\right)\sin^2\beta. \tag{92}$$

可以看出，a 不能超过1，但是对于某些 β 值，它可以变成小于-1. 这时，$\cos^{-1}a$ 是虚数，并且由于对于任何 χ，

$$\sin i\chi = i\sinh\chi = i\,\frac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{2},$$

因而 $\mathscr{U}_N$ 这时是指数性质的. 结果，这种多层膜的反射率将随膜层周期数目迅速增高.

对于**四分之一波长膜** ($n_2h_2 = n_3h_3 = \lambda_0/4$)，在正入射下（仍然假定非磁性媒质），

$$\beta = \pi/2, \quad p_2 = n_2, \quad p_3 = n_3, \tag{93}$$

(86) 式化为

$$\mathbf{M}_2(h) = \begin{bmatrix} -\frac{n_3}{n_2} & 0 \\ 0 & -\frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix}. \tag{94}$$

以这种双层膜作为基本周期的多层膜，其特性矩阵 (87) 是

$$\mathbf{M}_{2N}(Nh) = \begin{bmatrix} \left(-\frac{n_3}{n_2}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(-\frac{n_2}{n_3}\right)^N \end{bmatrix}, \tag{95}$$

可由 (94) 式自乘 N 次直接证明. 按照 (49) 和 (51) 式，反射率为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mathscr{R}_{2N}=\left(\frac{1-\frac{n_l}{n_1}\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}{1+\frac{n_l}{n_1}\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}\right)^2. \tag{96}$$

此式表明，当双层膜的数目N固定时，$\mathscr{R}_{2N}$随比值n_2/n_3增大，而当n_2/n_3固定时，$\mathscr{R}_{2N}$随N增大[1]。

有时，例如用作法布里-珀罗干涉仪（参见§ 7.6）板的敷层时，膜层排列次序的特点是折射率顺序为$n_2, n_3, n_2, n_3, \cdots\cdots n_2, n_3, n_2$。这种多层膜的特性矩阵是

$$\mathbf{M}_{2N+1}=\mathbf{M}_{2N}\cdot\mathbf{M}, \tag{97}$$

表 3

正入射下四分之一波长硫化锌膜和四分之一波长冰晶石膜交替序列所构成的多层膜的反射率$\mathscr{R}_{2N+1}$($n_1=1$, $n_2=2.3$, $n_3=1.35$, $n_l=1.52$, $n_2h_2=n_3h_3=\lambda_0/4$, $\lambda_0=5460$ Å, $\theta_1=0$)

括弧中数值是 P. Giacomo 所得的实验结果

[引自 *Compt. Rend. Acad. Sci., Paris*, **235** (1952), 1627.]

N	$\mathscr{R}_{2N+1}$
0	0.306
1	0.672
2	0.872(0.865)
3	0.954(0.945)
4	0.984(0.97)

式中$\mathbf{M}_{2N}$由(87)式给出，而$\mathbf{M}$是序列中最末一个薄膜的特性矩阵。特别是，对于四分之一波长膜系，在正入射下，$\mathbf{M}_{2N}$化为(95)式，$\beta_2=\pi/2$，(97)式这时变成

$$\mathbf{M}_{2N+1}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{i}{n_2}\left(-\frac{n_3}{n_2}\right)^N \\ -in_2\left(-\frac{n_2}{n_3}\right)^N & 0\end{bmatrix}. \tag{98}$$

1) 关于双层膜系统的特性，详尽讨论可见 C. Dufour and A. Herpin 的一篇论文，载于*Rev. Opt.*, **32** (1953), 321.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

代入(49)和(51)，得到所求的反射率:

$$\mathscr{R}_{2N+1}=\left(\frac{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}{1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}\right)^2. \tag{99}$$

可见，反射率随比值 n_2/n_3 和 N 而迅速增加(见表 3)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第二章　电磁势和电磁极化

在前一章中，物质对电磁场的作用是用几个宏观常数来表示的. 但这些常数的有效范围仅属有限，事实上它们不适合用来描述如光的发射、吸收和色散这样一些过程. 完善地说明这些现象，要涉及对微观理论的广泛研究，因而已超出本书的范围.

不过，还是能够借助一个简单的模型来描述场和物质的相互作用，这个模型完全适用于光学的大多数分支. 为此目的，把矢量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 各表成为二项之和[1]. 其中一项当作真空场，而另一项则看作是出自物质的影响. 这样就导致引进下面两个新矢量以描述物质的作用：电极化强度（$\boldsymbol{P}$）和磁极化强度即磁化强度（$\boldsymbol{M}$）. 先前使 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 同 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 关联的那些物质方程（§ 1.1(10)、(11) 式），现在则为 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{M}$ 同 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的关系方程所取代. 这些新方程具有更直接的物理意义，使我们对电磁场在物质中的传播获得下列这样的概念：

电磁场在给定体积元产生一定的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$. 在一级近似下，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 与场成正比，比例常数是物质对场的反作用大小的量度. 每个体积元这时各成为一个新波源，发射出次级子波即散射子波，其强度同 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 有着简单的关系. 所有这些次波相互合并，并同入射场组合，形成总波场，这就是整个考虑一开始所说的那个场. 用数学表达出这个等同，我们就得到两个积分方程[2].

---

1) 按照第14页上的注释，将 $\boldsymbol{B}$ 改为 $\boldsymbol{H}$ 当更适宜. 这里之所以没有依照一般理论，是为了一点方便，以使 §2.2 方程 (2) 右边各项合乎惯例而皆为正.

2) 在非磁性物质的情况下，只有一个积分方程. 第二个积分方程化为一个相对简单的磁场表达式，并且当求得第一个方程的解时，即可算出第二个方程的值.

这里所讨论的"物质"积分方程，同处理某些衍射问题时所采用的"几何"积分方程（参见第十一章）必须加以区别.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这两个方程可以证明系与麦克斯韦微分方程相等效，但是它们对电磁场传播的描述突出了与原子物质结构的关系．

从这一理论将获得两个重要结果，即洛伦兹-洛伦茨公式和所谓厄瓦耳德-欧西恩（Ewald-Oseen）消光定理．洛伦兹-洛伦茨公式使媒质的宏观光学性质同散射粒子的数目和性质相关联，而厄瓦耳德-欧西恩消光定理证明，一个以真空光速进行传播的外来电磁扰动，如何在物质中被完全消掉，而由传播速度适当小一些的次级扰动所取代．

这个理论给我们提供了另一条数学途径去处理电磁理论的某些问题．这通过§2.4.3折射定律、反射定律和菲涅耳公式的推导，和进一步通过十二章中一个更复杂问题的处理将可得到说明．

推导这些结果，要用到某些新的数学工具．因此，我们将首先讨论借助所谓推迟势来表示电磁场的表述方法，这推迟势是众所周知的静电势的推广．推迟势用极化强度矢量来表示，就引出另一组称为赫兹矢量的辅助量．§2.1和§2.2两节先讨论这些数学准备，§2.3再简单地解释一下一些基本物理概念．上面提到的那些积分方程和那两个基本定理则于§2.4中导出．

§2.1 真空中的电动势

§2.1.1 矢势和标势

让我们考虑在真空之中由给定电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ 和电流分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ 产生的电磁场．这一电磁场服从麦克斯韦方程§1.1(1)—(4)，而这些方程现可写成如下形式(因为在真空中 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}$)：

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{B}-\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{E}}=\frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \tag{1}$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E}+\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{B}}=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}=4\pi\rho, \tag{3}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0. \tag{4}$$

因为对任何矢量的旋度取散度都得零，所以如令

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个任意的位置和时间的矢函数，则 (4) 式将被满足。以 (5) 代入麦克斯韦的第二个方程，则有

$$\mathrm{curl}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}\right)=0. \tag{6}$$

如令

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}-\mathrm{grad}\phi, \tag{7}$$

其中 ϕ 是一个任意标函数，则 (6) 式成立． $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 现在必须这样来决定，使它们满足其余的麦克斯韦方程．

以 (5)、(7) 代入(1)、(3)，并利用恒等式 curl curl $\equiv$ grad div$-\nabla^2$ 和 div grad $\equiv\nabla^2$，得到

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}}-\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}\right)=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{8}$$

和

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}\right)=-4\pi\rho. \tag{9}$$

如果我们给 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 之间规定如下关系：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}=0, \tag{10}$$

则 (8) 和 (9) 化为非齐次波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{11}$$

和

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}=-4\pi\rho. \tag{12}$$

$\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 这两个函数，从它们通过关系式(5)和(7)可以决定 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，分别称为磁矢势和电标势．联结 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 的关系式 (10) 叫做洛伦

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

兹条件．可以指出，这个条件同连续方程§1.1(5)

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \tag{13}$$

是协调一致的．

需要注意，(11)，(12)和(10)并没有唯一地确定了 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ．因为，如给 $\boldsymbol{A}$ 加上矢量 $\operatorname{grad}\chi$，其中 χ 为任意，$\boldsymbol{B}$ 将保持不变；而如若同时再把 ϕ 换成 $\phi - \dot{\chi}/c$，$\boldsymbol{E}$ 也将保持不变．换句话说，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 在变换

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\chi, \tag{14a}$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \tag{14b}$$

之下是不变的．由(10)和(14)，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c}\dot{\phi}' + \left(\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi}\right) = 0. \tag{15}$$

因此，如果对 χ 加以下列条件：

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = 0, \tag{16}$$

则 $\boldsymbol{A}'$ 和 ϕ' 将也满足洛伦兹关系．

方程(14)，附加以条件(16)，表示了所谓规范变换．规范变换可用来简化场矢表达式．例如，在电荷密度 ρ 为零的区域里，ϕ 满足齐次波动方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = 0, \tag{17}$$

这时可选择 χ，使标势 ϕ 为零．按照(14b)和(16)，这只须取

$$\chi = c\int \phi dt. \tag{18}$$

于是单从矢势 $\boldsymbol{A}$[1] 即可导出场 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，关系式如下(取消 $\boldsymbol{A}$ 上的

---

1) 方程(19)用三个标量波函数($\boldsymbol{A}$ 的三个笛卡儿分量)表出真空中无电荷区中的场．然而，由于(20)的关系，这三个标量波函数不是独立的．可以证明，在这种区域中，场确实单单从两个实标量波函数即可导出(例如，见 S. A. Schelkunoff, *Electromagnetic Waves*, New York, Van Nostrand, 1943, 382; H. S. Green and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, A, **66** (1953), 1129; A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.*, A, **231** (1955), 251).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一撇)：

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A},\quad E=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}},\tag{19}$$

而洛伦兹条件这时化为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0.\tag{20}$$

§ 2.1.2 推迟势

现在我们来讨论矢势和标势的非齐次波动方程(11)和(12)的解(服从关系式(10))，并首先证明，这些方程为下列函数所满足：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}dV',\tag{21}$$

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}dV'.\tag{22}$$

式中

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\tag{23}$$

是 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 点到 $\boldsymbol{r}'(x',y',z')$ 点体积元 dV' 的距离，而积分遍及整个空间.

为证明(22)式满足标势的非齐次波动方程，我们设想以 $\boldsymbol{r}$ 点为中心，以 a 为半径作一小球，而把(22)式分成两部分：

$$\phi=\phi_1+\phi_2,\tag{24}$$

其中 ϕ_1 代表球内地区对积分的贡献，而 ϕ_2 代表其余空间的贡献. 因为对于球外每一点 $\boldsymbol{r}'(x',y',z')$, $R\neq 0$，故可在积分号下对 ϕ_2 进行微商. 通过一步步计算即可证明，ϕ_2 满足齐次波动方程

$$\nabla^2\phi_2-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}_2=0,\tag{25}$$

这原应如此，因为 ϕ_2 系由一组球面波叠加组成(参见方程§1.3(12))。ϕ_1 情况则须另行处理，因为被积函数在球心 $R=0$ 有一奇异点.

可以注意，如果使小球半径足够小，我们就能让(假设 ρ 是 $\boldsymbol{r}$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

和 t 的连续函数)球内所有各点 $\mathbf{r}'$ 的 $\rho(\mathbf{r}',t-R/c)$ 和球心的 $\rho(\mathbf{r},t)$ 之差小于任何预定值．因此，当半径 a 趋向于零时，$\nabla^2\phi_1$ 将越来越接近一个电荷密度为 ρ 的均匀带电球体的静电势，即当 a 足够小时，

$$\nabla^2\phi_1=-4\pi\rho(\mathbf{r},t). \tag{26}$$

又，当 $a\to 0$ 时，$\ddot{\phi}_1\to 0$．因为，如果 a 足够小，$\ddot{\phi}_1$ 就可写成

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1&=\ddot{\rho}(\mathbf{r},t)\int_{R<a}\frac{dV'}{R}\\&=4\pi\ddot{\rho}\int_0^a R\,dr\\&=2\pi a^2\ddot{\rho},\end{aligned} \tag{27}$$

而此值随 a 趋向于零．因此由(24)—(26)得到，当 $a\to 0$ 时，

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}=\nabla^2(\phi_1+\phi_2)-\frac{1}{c^2}(\ddot{\phi}_1+\ddot{\phi}_2)\to-4\pi\rho(\mathbf{r},t), \tag{28}$$

所以(22)式满足标势的非齐次波动方程．以完全类似的方式可以证明，(21)式的各个笛卡儿分量是相应标量波动方程的一个解，这个标量波动方程的非齐次项含的不是 ρ，而是 $\mathbf{j}/c$ 的相应分量．因此，(21)式满足矢势的非齐次波动方程．此外，由于连续方程(13)，这些解也满足洛伦兹关系(10)．

(21)和(22)两式有一个简单的物理解释．它们表明，$\mathbf{A}$ 和 ϕ 可以看成是由空间各个体积元的贡献所产生，其中体积元 dV' 对 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的贡献分别为

$$\frac{1}{c}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}\ \text{和}\ \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}.$$

这里 R/c 正好是光从 $\mathbf{r}'$ 点传播到 $\mathbf{r}$ 点所需的时间，所以每个贡献必须在前这个时间离开体积元才能在规定时间 t 到达观察点．由于这个原因，人们把(21)和(22)叫做**推迟势**[1]．

1) 从方程上看，把解设成**超前势**形式(以 $t+R/c$ 代替 $t-R/c$)也是可能的．超前势代表收拢来的球面波的效应，而推迟势代表发出去的球面波的效应．

如果牺牲某种形式上的对称性，我们可以只注意推迟势形式的解．当从热

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(21)和(22)代表波动方程(11)和(12)的一个特解，即同给定电流和给定电荷相关联的解. (11)和(12)的通解由这个特解加上齐次波方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}} = 0, \tag{29}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = 0 \tag{30}$$

的通解(仍旧要服从洛伦兹条件)而得到.

§ 2.2 极化和磁化

§ 2.2.1 用极化强度和磁化强度表示矢势和标势

在第一章中，我们对场的研究是借助于物质关系式 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$. 这些关系式的含义是：场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在物质中每一点产生某些位移 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$，这些位移和它们成正比. 现在我们把这些"乘式关系"放在一边，而借助下列"加式关系"来描写物质和场的相互作用:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}. \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 叫做**电极化强度**，$\boldsymbol{M}$ 叫做**磁极化强度**或**磁化强度**. 这两个量的物理意义后面我们就会明白；这里我们仅仅看到，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 在真空中都等于零，因此这些量简单而直观地代表着物质对场的影响.

假定物质是不导电的 ($\sigma = 0$)，并且只考虑无电流无电荷 ($\rho = \boldsymbol{j} = 0$) 地区中的场. 借助 (1) 和 (2) 式从麦克斯韦方程 § 1.1(1)—(4) 式中消去 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$，得到

力学方面来考虑物质和辐射的相互作用时，则可看到物理状态有一不对称性，它支持了这一选择(参见 M. Born, *Natural Philosophy of Cause and Chance*, Oxford, Clarendon Press, 1949; Dover Publications, New York, 1964; 特别是 p. 26).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{j}}, \tag{3}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}=0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\tilde{\rho}, \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{6}$$

式中自由电流密度$\tilde{\boldsymbol{j}}$和自由电荷密度$\tilde{\rho}$的定义如下:

$$\tilde{\boldsymbol{j}}=\dot{\boldsymbol{P}}+c\operatorname{curl}\boldsymbol{M}, \tag{7}$$

$$\tilde{\rho}=-\operatorname{div}\boldsymbol{P}. \tag{8}$$

方程(3)—(6)在形式上等同于前节所讨论的真空中的场方程. 因此,和真空情况中一样,我们可以引进一个矢势 $\boldsymbol{A}$ 和一个标势 ϕ,使得

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}-\operatorname{grad}\phi. \tag{10}$$

此外,如果同前,我们再引进洛伦兹条件

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}=0, \tag{11}$$

则对照 § 2.1(11) 和 (12) 两式,即可写出 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 的方程如下:

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}}=-\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{j}}, \tag{12}$$

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}=-4\pi\tilde{\rho}. \tag{13}$$

条件 (11) 与方程 (12) 和 (13) 是一致的,只要

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{j}}=0; \tag{14}$$

以 (7) 和 (8) 式代入,并利用矢量恒等式 div curl $\equiv 0$,即可看到此式可恒等满足.

方程 (12) 和 (13) 的解可以用极化强度和磁化强度表出. 从 § 2.1(21) 和 (22) 出发,将 (7) 和 (8) 代入,得到

$$\phi=-\int\frac{1}{R}[\operatorname{div}'\boldsymbol{P}]dV', \tag{15}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\boldsymbol{A}=\int\frac{1}{R}\left[\mathrm{curl}'\,\boldsymbol{M}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{P}}\right]dV'. \tag{16}$$

式中微分算符 div′ 和 curl′ 是对体积元 dV' 所在积分变点 $\boldsymbol{r}'$ 的坐标 (x', y', z') 来运算的，而方括号表示推迟值，意指在各括号内宗量 t 须以 $t-R/c$ 代替。

通过一步步计算，可证明下列二恒等式成立：

$$\mathrm{div}'[\boldsymbol{P}]=[\mathrm{div}'\boldsymbol{P}]+\frac{1}{cR}\boldsymbol{R}\cdot[\dot{\boldsymbol{P}}], \tag{17a}$$

$$\mathrm{curl}'[\boldsymbol{M}]=[\mathrm{curl}'\boldsymbol{M}]+\frac{1}{cR}\boldsymbol{R}\times[\dot{\boldsymbol{M}}], \tag{17b}$$

式中

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'. \tag{18}$$

因此(15)和(16)式可以写成为

$$\phi=-\int\left\{\frac{1}{R}\mathrm{div}'[\boldsymbol{P}]-\frac{1}{cR^2}\boldsymbol{R}\cdot[\dot{\boldsymbol{P}}]\right\}dV', \tag{19}$$

$$\boldsymbol{A}=\int\left\{\frac{1}{R}\mathrm{curl}'[\boldsymbol{M}]-\frac{1}{cR^2}\boldsymbol{R}\times[\dot{\boldsymbol{M}}]+\frac{1}{cR}[\dot{\boldsymbol{P}}]\right\}dV'. \tag{20}$$

从上面各个积分的第一项可以分出一个界面积分。为此，利用矢量恒等式

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{R}\boldsymbol{P}\right)=\frac{1}{R}\mathrm{div}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{R}, \tag{21a}$$

$$\mathrm{curl}\left(\frac{1}{R}\boldsymbol{M}\right)=\frac{1}{R}\mathrm{curl}\,\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}\times\mathrm{grad}\frac{1}{R}. \tag{21b}$$

取一任意有限域，对这些关系式进行积分，并应用高斯定理，从而得到

$$\int\frac{1}{R}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})dS=\int\left\{\frac{1}{R}\mathrm{div}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{R}\right\}dV, \tag{22a}$$

$$\int\frac{1}{R}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M})dS=\int\left\{\frac{1}{R}\mathrm{curl}\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}\times\mathrm{grad}\frac{1}{R}\right\}dV, \tag{22b}$$

左边的积分遍及域的整个界面，$\boldsymbol{n}$ 是界面的单位外向法线。

现在假定物质(即 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 不等于零的空间区域)保持在一个

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

有限的闭合面内. 如果这时积分(19)和(20)遍及这闭合面内的整个体积，则(22)式中的面积分为零，(19)和(20)式遂可表成如下形式:

$$\phi = \iint \left\{ [\boldsymbol{P}] \cdot \mathrm{grad}' \frac{1}{R} + \frac{1}{cR^2} \boldsymbol{R} \cdot [\dot{\boldsymbol{P}}] \right\} dV', \tag{23}$$

$$\boldsymbol{A} = \iint \left\{ [\boldsymbol{M}] \times \mathrm{grad}' \frac{1}{R} - \frac{1}{cR^2} \boldsymbol{R} \times [\dot{\boldsymbol{M}}] + \frac{1}{cR} [\dot{\boldsymbol{P}}] \right\} dV'. \tag{24}$$

从(23)和(24)式能察及 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的物理意义. 为了说明此点，我们考虑这样一种情况，其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 除去在 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的一个无限小体积元内以外，在其他各处皆为零. 这个假定在形式上可借助狄喇克 δ 函数(见附录 4)表出:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}', t) = \boldsymbol{p}(t)\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}', t) = \boldsymbol{m}(t)\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0). \tag{26}$$

(23)和(24)这时变成

$$\phi = [\boldsymbol{P}] \cdot \mathrm{grad}_0 \frac{1}{R} + \frac{1}{cR^2} \boldsymbol{R} \cdot [\dot{\boldsymbol{P}}], \tag{27}$$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{m}] \times \mathrm{grad}_0 \frac{1}{R} - \frac{1}{cR^2} \boldsymbol{R} \times [\dot{\boldsymbol{m}}] + \frac{1}{cR} [\dot{\boldsymbol{P}}], \tag{28}$$

现在式中

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_0|, \tag{29}$$

而 grad_0 意指算符 grad 是对 $\boldsymbol{r}_0$ 点的坐标 x_0, y_0, z_0 来运算的.

方程(27)和(28)有一个简单的解释. 让我们考虑两个固定电荷 $-e$ 和 $+e$ 的静电势，这两个电荷所在之点相对于某固定点 $Q_0(\boldsymbol{r}_0)$ 的位置矢量分别是 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ 和 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$. 两个电荷产生的库伦势 $\phi(\boldsymbol{R})$ 为(见图 2.1)

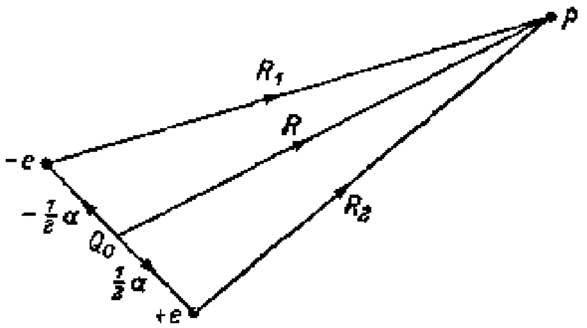


图 2.1 电偶极子电势计算中所用的符号

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\phi = \frac{e}{R_2} - \frac{e}{R_1}. \tag{30}$$

如 a 足够小，则可按 $\boldsymbol{a}$ 分量的幂级将 $1/R_2$ 展开，从而得到

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{grad}\,\frac{1}{R_1} + \cdots\cdots, \tag{31}$$

式中算符 grad 是对电荷 $-e$ 所在点的坐标来运算的． 如果略去 (31) 式中的各高次项，则 (30) 式变成

$$\phi = e\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{grad}\,\frac{1}{R_1} = e\,\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{R}_1}{R_1^3}. \tag{32}$$

现在假设 a 逐渐减小而同时 e 无限增大，使得 $e\boldsymbol{a}$ 趋近一定值 $\boldsymbol{p}$:

$$\lim_{a\to 0} e\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}. \tag{33}$$

这时 R_1 趋近 R，因而 (32) 式在极限下变成为

$$\phi = \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{grad}_0\,\frac{1}{R}. \tag{34}$$

此式就是 (27) 式在 $\boldsymbol{p}$ 与时间无关这一特别情况下的结果．

如果这两个电荷随时间改变，但在各个时刻仅仅符号不同，则 (30) 式易为

$$\phi = \frac{e(t - R_2/c)}{R_2} - \frac{e(t - R_1/c)}{R_1}, \tag{35}$$

通过同样的取极限步骤，得到

$$\phi = [\boldsymbol{p}] \cdot \mathrm{grad}_0\,\frac{1}{R} + \frac{1}{cR^2}\boldsymbol{R} \cdot [\dot{\boldsymbol{P}}],$$

这正是 (27) 式． 这样，(23) 式可以解释成是一个每单位体积电矩为 $\boldsymbol{P}$ 的电偶极子分布所产生的标势．(28)式中的最后一项可以证明是这些偶极子所产生的磁势．

同样可以证明，(28) 式是一个磁矩为 $\boldsymbol{m}(t)$ 的磁偶极子的矢势，当然，这种磁偶极子等效于一个无限小的闭合电路，其面积 A 与 $\boldsymbol{m}$ 垂直，载有电流 $c\boldsymbol{m}/A$[1]． 因此，(24) 式中的前二项可以解

1) 关于安培无限小电流的讨论，可见任何标准电学教本，或 Max Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933), pp. 305—306.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

释成是一个每单位体积磁矩为 $\boldsymbol{M}$ 的磁偶极子分布所产生的矢势

§ 2.2.2 赫兹矢量

我们可以不用矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ，而借助另一对同 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 关系要简单得多的势函数 Π_e 和 Π_m 来表示场. 它们通常称为赫兹矢量或极化势[1]，可由下列关系引进之：

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\dot{\Pi}_e+\operatorname{curl}\Pi_m, \tag{36}$$

$$\phi=-\operatorname{div}\Pi_e. \tag{37}$$

可见，Π_e、Π_m 和 $\boldsymbol{A}$、ϕ 的数学关系，与 $\mathbf{P}$、$\mathbf{M}$ 和 $\hat{j}/c$、$\hat{\rho}$ 的数学关系相同.

洛伦兹条件现在自动就满足了，而 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 的方程(12)和(13)也将得到满足，只要 Π_e 和 Π_m 是下列非齐次波动方程的解：

$$\nabla^2\Pi_e-\frac{1}{c^2}\ddot{\Pi}_e=-4\pi\boldsymbol{P}, \tag{38}$$

$$\nabla^2\Pi_m-\frac{1}{c^2}\ddot{\Pi}_m=-4\pi\boldsymbol{M}. \tag{39}$$

按照 § 2.1，这二个方程的特别解可表成推迟势形式如下：

$$\Pi_e=\int\frac{[\boldsymbol{P}]}{R}dV', \tag{40}$$

$$\Pi_m=\int\frac{[\boldsymbol{M}]}{R}dV'. \tag{41}$$

场矢量可直接用 Π_e 和 Π_m 通过简单微商来表出. 由(9)和(36)，有

---

1) Π_e 和 Π_m 与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$）变换性质相同，即它们构成一个六矢量（二级反对称张量）. 原先，赫兹引进了某一势函数来表示一个振动偶极子的电磁场（H. Hertz, *Ann. d. Physik.*, **36** (1889), 1.），Π_e 和 Π_m 乃是这一势函数的推广. 赫兹势的矢量性质系由 A. Righi, *Nuovo Cimento*, **2** (1901), 104 指出，他并且引进了对应的磁势. 赫兹矢量的一般理论和有关的规范变换则归于 F. Kottler, *Ann. d. Physik*, (4), **71** (1923), 462 和 A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.*, A **231** (1955), 250. 亦见 W. H. McCrea, *ibid.*, **240** (1957), 447.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{curl}\left(\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_e + \operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_m\right), \tag{42}$$

而由(10),(36)和(37)式,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_e + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_m\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}_e \\ &= \operatorname{curl}\left(-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_m + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e\right) + \left(\nabla^2\boldsymbol{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\Pi}}_e\right),\end{aligned} \tag{43}$$

其中利用了恒等式 $\operatorname{grad}\operatorname{div} \equiv \operatorname{curl}\operatorname{curl} + \nabla^2$. 按(38)式,第二个括弧里的项等于 $-4\pi\boldsymbol{P}$; 因此,利用(1)式即可得到

$$\boldsymbol{D} = \operatorname{curl}\left(-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_m + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e\right). \tag{44}$$

最后,由(2)、(42)和(39)式,得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \operatorname{curl}\left(\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_e + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_m\right) + \left(\nabla^2\boldsymbol{\Pi}_m - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\Pi}}_m\right) \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_m + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}_m.\end{aligned} \tag{45}$$

§ 2.1 中已经证明,当场给定时,和它相关联的势——$\boldsymbol{A}$和ϕ不是唯一的;从可能的一对$(\boldsymbol{A}, \phi)$通过规范变换而导出的任何其他一对$(\boldsymbol{A}', \phi')$,都将代表同一个场. 赫兹矢量也不是唯一的. 它们可以经受下列变换而使场矢量同时保持不变:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}_e' &= \boldsymbol{\Pi}_e + \operatorname{curl}\boldsymbol{F} - \operatorname{grad} G, \\ \boldsymbol{\Pi}_m' &= \boldsymbol{\Pi}_m - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{F}}.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

式中矢函数$\boldsymbol{F}$和标函数G是齐次波动方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{F} - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{F}} &= 0, \\ \nabla^2 G - \frac{1}{c^2}\ddot{G} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

的任何解.将(46)代入(42)和(43),可立即证明场矢量在变换(46)之下不变. $\boldsymbol{A}$和ϕ这时依照§ 2.1(14)被变换成$\boldsymbol{A}'$和ϕ',其中

$$\chi = -\frac{1}{c}\dot{G}.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

此外,把(46)代入(38)和(39),可证 Π_e' 和 Π_m' 也满足赫兹矢量的非齐次波动方程.

§2.2.3 一个线性电偶极子的场

为了后面的应用，现在考虑一个线性电偶极子在真空中产生的场，写下其场方程的完全显式解. 设此电偶极子位于 $\boldsymbol{r}_0$ 点，并沿着单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 所规定的方向振动. 这样一个偶极子可以用一个电极化强度

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)=p(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}. \tag{48}$$

来表征,其中 p 是一个时间函数, δ 是狄喇克 delta 函数. 一般的偶极子,其取向 $\boldsymbol{n}$ 也是时间的函数,这种偶极子等效于三个线性偶极子,它们的矩矢量朝着三个相互垂直的方向.

按照(40)式,与(48)式相关联的电赫兹矢量是

$$\boldsymbol{\Pi}_e=\frac{p(t-R/c)}{R}\boldsymbol{n}, \tag{49}$$

式中 R 是 $\boldsymbol{r}_0$ 点离 $\boldsymbol{r}$ 点的距离.

因为 $\boldsymbol{\Pi}_m=0$, 而 $\boldsymbol{\Pi}_e$ 满足(除在原点外)真空的齐次波动方程,所以方程(42)—(45)变成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}=\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e, \tag{50}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{\Pi}}_e. \tag{51}$$

利用恒等式 curl curl=grad div$-\nabla^2$ 和关系式 $\nabla^2\boldsymbol{\Pi}_e=\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\Pi}}_e$, (50)式可改写成如下形式:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}_e-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\Pi}}_e. \tag{52}$$

由(49),经过简单计算,可得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}_e=-\left\{\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right\}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}_e=\left\{\frac{3[p]}{R^5}+\frac{3[\dot{p}]}{cR^4}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^3}\right\}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$-\left\{\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right\}\boldsymbol{n},$$

$$\operatorname{curl}\Pi_e=\left\{\frac{[\dot{p}]}{R^3}+\frac{[\ddot{p}]}{cR^2}\right\}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{R}),$$

同前，式中方括号表示推迟值．代入(52)和(51)式，就得到所求的场矢量公式：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}=\left\{\frac{3[p]}{R^5}+\frac{3[\dot{p}]}{cR^4}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^3}\right\}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}$$

$$-\left\{\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right\}\boldsymbol{n}, \qquad (53)$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}=\left\{\frac{[\dot{p}]}{cR^3}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^2}\right\}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{R}). \qquad (54)$$

以后我们也要用到球面极坐标的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 表达式．设以 $\boldsymbol{n}$ 方向为 z 轴(见图 2.2)，并以 $\boldsymbol{i}_R$，$\boldsymbol{i}_\theta$ 和 $\boldsymbol{i}_\phi$ 分别代表 R，θ 和 ϕ 增大方向上的单位矢量，则

$$\boldsymbol{R}=R\boldsymbol{i}_R,\quad \boldsymbol{n}=(\cos\theta)\boldsymbol{i}_R-(\sin\theta)\boldsymbol{i}_\theta,$$

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R})=R\cos\theta,\quad (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{R})=(R\sin\theta)\boldsymbol{i}_\phi, \qquad (55)$$

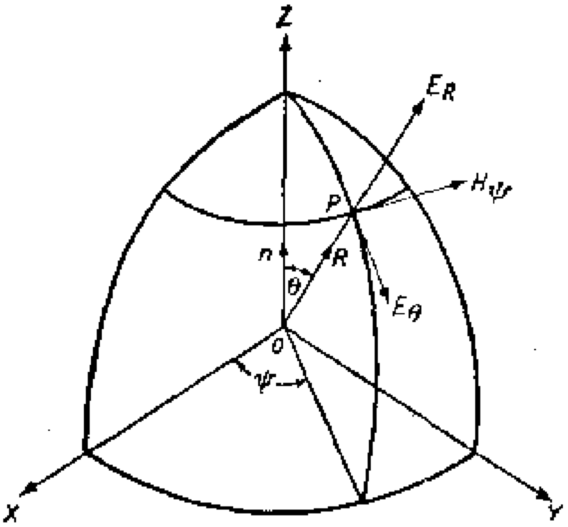


图 2.2　线性电偶极子的场的计算，偶极子矩矢量沿 z 轴

并由(53)和(54)式得到

$$\boldsymbol{E}=E_R\boldsymbol{i}_R+E_\theta\boldsymbol{i}_\theta,\quad \boldsymbol{H}=H_\phi\boldsymbol{i}_\phi, \qquad (56)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$
\left.\begin{aligned}
E_R &= 2\left(\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right)\cos\theta,\\
E_\theta &= \left(\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right)\sin\theta,\\
H_\psi &= \left(\frac{[\dot{p}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right)\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{57}
$$

这样，电矢量处在通过偶极子轴的子午面上，而磁矢量与此面垂直.

特别重要的是场所在地区距离偶极子远得很，以致上列各式中除 $1/R$ 项以外，其他均可略去. 这个**波带**(或**辐射带**)由下列条件来表征:

$$
R \gg c\left|\frac{p}{\dot{p}}\right|, \quad R \gg c\left|\frac{\dot{p}}{\ddot{p}}\right|. \tag{58}
$$

在这个区域内，

$$
E_\theta \sim H_\psi \sim \frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\sin\theta, \tag{59}
$$

其他分量可以略去. 因此，在波带中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 大小相等，方向相互垂直，并同垂直于径矢 $\boldsymbol{R}$，而 $\boldsymbol{R}$ 现在和坡印廷矢量方向一致. 因此，在这个波带内，线性电偶极子场的结构同平面波的相似. 不过，在各"波面"(以 $\boldsymbol{r}_0$ 点为中心的球面)上，场矢量现在是逐点改变的，其大小从赤道到两极逐渐减小，至振子轴方向而为零. 因此偶极子在它的轴的方向上不发射能量.

现在让我们计算每秒通过各球波面所辐射的能量. 这用坡印廷矢量的大小 S 对此球面进行积分即可求得. 在波带内，

$$
S = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}| = \frac{c}{4\pi}E_\theta H_\psi = \frac{[\ddot{p}]^2}{4\pi c^3R^2}\sin^2\theta. \tag{60}
$$

因此每秒通过球面所辐射的能量总计为 ($d\sigma$ 代表球面元)

$$
\int S d\sigma = \frac{[\ddot{p}]^2}{4\pi c^3R^2}\int_0^\pi \sin^2\theta\cdot 2\pi R^2\sin\theta d\theta = \frac{2[\ddot{p}]^2}{3c^3}. \tag{61}
$$

现考虑一特别情况，即 $p(t)$ 是正弦周期函数，其角频率为 ω:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$p(t) = p_0 e^{-i\omega t}, \tag{62}$$

式中 p_0 是一复常数,而根据约定,(62)式的实部代表 p. (58)式的两个条件现在简化成单一条件

$$R \gg \lambda/2\pi, \quad (\lambda = 2\pi c/\omega), \tag{63}$$

而由(59)得到,波带中场的非零分量为

$$E_\theta = H_\phi \sim -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 \sin\theta \frac{e^{-i\omega(t-R/c)}}{R}, \tag{64}$$

根据约定,这里应取右边式子的实部. 在波带中,每秒通过球面单位面积的能量是

$$S = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{|p_0|^2}{R^2} \sin^2\theta\cos^2[\omega(t - R/c) - \alpha], \tag{65}$$

式中 α 是 p_0 的位相.

对一个比周期 $T = 2\pi/\omega$ 大得多的时间间隔取时间平均,则(65)化为

$$\langle S\rangle = \frac{|p_0|^2}{8\pi R^2}\frac{\omega^4}{c^3}\sin^2\theta. \tag{66}$$

因此每秒通过整个球面的能量(时间平均值)是

$$\int \langle S\rangle d\sigma = \frac{1}{3}\frac{|p_0|^2\omega^4}{c^3}. \tag{67}$$

§2.3 洛伦兹-洛伦茨公式和初等色散理论[1]

§2.3.1 介电极化率和磁极化率

用极化和磁化的观念说明电势,在物质的原子理论中极为重要. 从这种理论的观点看来,联系 **E** 同 **D**、**P**,**H** 同 **B**、**M** 的那两个“加式关系”(§2.2(1)和(2)),比物质方程的“乘式关系”(§1.1(10)和(11)式)具有更直接的物理意义.

在原子理论中,物质被看成是由处于真空之中、相互作用着的

1) 这一节,我们离开了我们绎演的处理方法,以便在表述那些代替麦克斯韦微分方程的积分方程(引进于§2.4)之前,能对各现象获得一个较清楚的了解. 这节着重说明而不求严格,因为严格的论述要涉及大部分微观物质理论,将使我们远远越出本书的合理界限.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

粒子(原子和分子)所组成. 这些物理客体产生的场，在物质内部局部变化甚大. 这个内场将被任何外加场所调变;这时，通过对物质内总场取平均，可推导出物质的性质. 只要取平均的区域比粒子的线度大得多，每个粒子的电磁性质就可以简单地用一个电偶极子和一个磁偶极子来描写；这时次级场就是这些偶极子产生的场(具有推迟效应). 这其实正是我们刚才把物质看作是一个连续分布同场相互作用时所描述的情况：它相当于原子理论的一级近似(用于缓慢的空间变化). 在这一近似下，当场足够弱时[1]，可假定 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 成正比:

$$\boldsymbol{P}=\eta \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{M}=\chi \boldsymbol{H}. \tag{1}$$

因子 η 叫做介电极化率，χ 叫做磁极化率，后者是实用磁学里通用的一个概念. 以(1)代入 § 2.2 中的方程(1)和(2)，并同 § 1.1 中的物质方程(10)和(11)相比较，即可看到介电常数 ε 和磁导率 μ 分别与介电极化率和磁极化率有下列关系:

$$\varepsilon=1+4\pi\eta, \quad \mu=1+4\pi\chi. \tag{2}$$

通过(2)式，“乘式”和“加式”两种处理方法在形式上即完全等效. 但是对各个常数的这种形式比较，并没有利用微观结构的任何结果. 虽然涉及微观理论结果的详细讨论已越出本书的范围，但介绍一些有关的概念和公式亦将有益. 依靠这些概念和公式，我们对后面 § 2.4 引进的那二个积分方程(代替常用的麦克斯韦微分方程)的物理内容，将可获得一个比较清楚的了解.

最简单的假设，一步就进入微观理论的，是把物质看作由某种物理客体—分子—所组成，这些客体是可极化的，所以在外场作用下它们就带有了电矩和磁矩. 在一级近似下，可以假定这些矩的分量是场的分量的线性函数;一般，矩矢的方向和场的方向并不重合. 这个假设有许多结果，这里只能简略加以研究. 我们将限于讨论各向同性的非磁性物质，并将首先考查在一个由同样分子组成

---

1) 从原子水平看，这样大小的场算是强场，在这个场中，电子的静电势在等于原子直径的距离内所改变之值，同原子的电离势相比已趋可观，这就是说，其强度达每厘米几百万伏. 实际上，实际材料在低得多的场强下即发生电击穿.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的物质中，电学常数对密度的依赖关系．我们还将研究折射率对频率的依赖关系．所作论证，除§2.4以外，都只能大加简化．§2.4将对主要结果——洛伦兹-洛伦茨公式给出一个严格的、虽然是更加形式的推导．

§2.3.2 有效场

首先，我们必须把作用在一个分子上的有效场 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ 和平均场即宏观场 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 加以区别，后者是对包括大量分子的区域取平均而得到的场．这两个场之差是由分子间隙造成的，因此它依赖于每单位体积的分子数(分子数密度 N)．

为估计 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之差，现考虑一个特别的分子，并设想以它为中心作一小球，但球的半径比分子的线度要大得多．我们将分别考虑球内物质和球外物质对中心分子所产生的作用．

在决定球外物质的作用时，我们完全可以忽略物质的分子结构，而把它作为连续体处理．于是我们可以假定，在球外，平均电场产生的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 是常量．至于球内分子的作用，我们将假定，它们在中心分子上不产生任何合场，这可就一些重要的特别情况(包括无规分布情况)加以证明．因此，我们可以把中心分子看作是处在这样一个球区之中，区内是真空，区外是被均匀极化的媒质．然后，我们须决定这个构型的电势 ϕ，它是球形突变面上自由电荷产生的，因为 $\boldsymbol{P}$ 值在面内为零，在面外为常数．

为了决定 ϕ，我们引入"互补"构型的电势 $\tilde{\phi}$，这是一个四周为真空所包围的均匀极化小球．这两个构型合在一起，是一个均匀极化的物质，无边无界．因此，边界产生的电势为零，因而我们有

$$\phi + \tilde{\phi} = 0. \tag{3}$$

现在电势 $\tilde{\phi}$ 由§2.2(23)立即可得(令其中 $\boldsymbol{P}$ 为常数)．由此

$$\phi = -\tilde{\phi} = -\boldsymbol{P}\cdot\int \operatorname{grad}' \frac{1}{R}\, dV'. \tag{4}$$

因为

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以(4)中 grad′ 可换成 −grad，即

$$\phi = -\tilde{\phi} = \boldsymbol{P} \cdot \operatorname{grad} \int \frac{dV'}{R} = -\boldsymbol{P} \cdot \operatorname{grad}\phi_0, \tag{5}$$

式中

$$\phi_0 = -\int \frac{dV'}{R}. \tag{6}$$

(6)式可以解释成是一个电荷密度为 −1 的均匀带电球体的电势．因此它满足泊松方程

$$\nabla^2\phi_0 = 4\pi. \tag{7}$$

同电势(5)相关联的场强，其各个分量为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[P_x\frac{\partial\phi_0}{\partial x} + P_y\frac{\partial\phi_0}{\partial y} + P_z\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right] \\ &= P_x\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} + P_y\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x\partial y} + P_z\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x\partial z}, \end{aligned} \tag{8}$$

等等．在球心处，由于对称性，

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\phi_0}{\partial z\partial x} = 0, \tag{9}$$

而

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}. \tag{10}$$

利用(7)，可知(10)中各项均等于 $4\pi/3$；于是(8)式表明，球外物质对有效场场强的贡献为

$$-\nabla\phi = \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}. \tag{11}$$

这个场加上平均场 $\boldsymbol{E}$，就是球心地方的总场，它也就是作用在中心分子上的有效场．因此得到

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}. \tag{12}$$

对于可磁化物质，$\boldsymbol{H}'$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 之间有一个相应的关系．然而，因为我们将只讨论非磁性物质，所以我们将总是取 $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}$.

下一步，我们必须使极化强度 $\boldsymbol{P}$ 同密度建立起关系．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 2.3.3 平均极化率：洛伦兹-洛伦茨公式

下面我们将假定，正如已经解释过的那样，每个分子在场作用下所建立的电偶极矩 $\boldsymbol{p}$，是和有效场 $\boldsymbol{E}'$ 成正比[1]：

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}'. \tag{13}$$

这里假定分子是各向同性的[2]；但是，由于我们注意的只是所有可能分子取向的平均效果，所以并不一定要假定各个单个分子是各向同性。因此 α 将被看成是代表平均极化率。因为 $\boldsymbol{p}$ 的因次是 $[el]$，$\boldsymbol{E}'$ 的因次是 $[el^{-2}]$（e = 电荷，l = 长度），故可知 α 的因次是 $[l^3]$，即体积的因次。

同前，设 N 是每单位体积的分子数，则每单位体积的总电矩

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\alpha \boldsymbol{E}'. \tag{14}$$

从 (12) 和 (14) 式消去 $\boldsymbol{E}'$，得到 (1) 式的第一式，同时介电极化率获得下列显式：

$$\eta = \frac{N\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha}. \tag{15}$$

把这个 η 再代入 (2) 式的第一式，就得到介电常数表达式如下：

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{8\pi}{3} N\alpha}{1 - \frac{8\pi}{3} N\alpha}. \tag{16}$$

反过来，从 (16) 可得知平均极化率对 ε 和 N，或（如果采用麦克斯韦关系式 $\varepsilon = n^2$）对 n 和 N 的依赖关系：

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{3}{4\pi N}\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}. \tag{17}$$

---

1) 我们只限于讨论所谓无极分子，这种分子没有永久矩，即当场不存在时，其矩为零。

2) 一般，极化率 α 是一个二秩张量。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

出于奇特的巧合，关系式(17)是由两个几乎同名[1]的科学家——洛伦兹和洛伦茨独立发现的，而且实际上是同时地，因此这个关系式叫做洛伦兹-洛伦茨公式．可以看出，这个公式是连接麦克斯韦唯象理论同微观物质理论的一个桥梁．

人们常常不用平均极化率α而采用另一个叫做克分子折射度的量A（在单原子物质的情况下，这个量又叫做原子折射度）．这个量实质上是一个克分子[2]物质的总极化率，其定义为

$$A=\frac{4\pi}{3}N_m\alpha. \tag{18}$$

式中$N_m=6.02\times10^{23}$是阿氏常数[3]，即一个克分子中所包含的分子数．设W是分子量，ρ是密度，p是压力，T是绝对温度，则克分子体积是

$$\frac{N_m}{N}=\frac{W}{\rho}=\frac{RT}{p}, \tag{19}$$

其中应用了玻义耳定律．因此克分子折射度可以写成另一种形式：

$$A=\frac{W}{\rho}\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{RT}{p}\frac{n^2-1}{n^2+2}. \tag{20}$$

此式表明，A的因次和数量级是克分子体积．

对于气体，n^2近于1，所以

---

1) H. A. Lorentz, *Wiedem. Ann.*, **9** (1880), 641; L. Lorenz, *Wiedem. Ann.*, **11** (1881), 70.

在这之前，R. Clausius, *Mechanische Wärmtheorie*, **2** (Braunschweig, *2nd ed.* 1879), p. 62 和 O. F. Mossotti, *Mem. Soc. Sci. Modena*, **14** (1850), p. 49，曾分别对静场情况推导出一个类似公式．这些作者假设，原子是小的导电球体，它们在介质中的相互距离比它们的直径大得多；他们试图根据这个假设来解释绝缘体的介电性质，从而导出了下列表达式，用介电常数ε表出小球的数密度g：

$$g=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}.$$

2) 一个克分子，或称一个摩耳(mole)，是物质的一种计量，当以克为单位时，其重量等于物质的分子量．

3) 这是国际采纳的名字；然而，德文文献中采用的是Loschmidt常数，这是为了纪念首先从实验数据估计出此常数数值的物理学家Loschmidt.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\alpha \sim \frac{n^2-1}{4\pi N}, \quad A \sim \frac{W}{\rho}\frac{n^2-1}{3} = \frac{RT}{p}\frac{n^2-1}{3}. \tag{21}$$

公式(20)给出折射率(对任一特别颜色的光而言)对密度的显依赖关系．当密度改变时，倘若各向同性保持不变，则此式仍应成立．在气体情况下，确实看到 n^2-1 和 ρ 非常接近(21)中第二式所要求的正比关系．而即使在高压下，当 n 和 1 相差已趋可观时，克分子折射度也基本保持不变，如表 4 所示．当气体凝聚成液体时，发现克分子折射度实际还保持不变(表 5)．

表 4 空气在不同压力下和 14.5℃ 左右的克分子折射度 A(钠 D 光)

压力(大气压)	n	A
1.00	1.0002929	4.606
42.13	1.01241	4.661
96.16	1.02842	4.713
136.21	1.04027	4.743
176.27	1.05213	4.772

表 5 不同化合物的克分子折射度 A(钠 D 光)：n 和 A 两行中记录值第一个是液态的，第二个是蒸气的．蒸气的密度没有给出，而是由已知的氢气密度根据理想气体定律算出

物质	化学式	W	n	ρ	A
氧	O_2	32	1.221 1.000271	1.124	4.00 4.05
盐酸	HCl	36.5	1.245 1.000447	0.95	5.95 6.68
水	H_2O	18	1.334 1.000249	1.00	3.71 3.70
二硫化碳	CS_2	76	1.628 1.00147	1.264	21.33 21.99
丙酮	C_3H_6O	58	1.3589 1.00108	0.791	16.14 16.16

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

从(20)可以证明，在良好近似程度上，两种物质的混合物的克分子折射度，等于各物质的贡献之和．这样，如果使折射度 A_1 和 A_2 的两种液体混合在一起，并设在单位体积内第一种液体的分子有 N_1 个，第二种的有 N_2 个，则混合物的克分子折射度将是

$$A=\frac{N_1A_1+N_2A_2}{N_1+N_2}. \tag{22}$$

这个结果经鉴定证明，同实验符合得也相当好［参见表 6］.

表 6　水和硫酸混合物在 15℃ 的克分子折射度(钠 D 光)

重量 (%)	$\frac{N_1}{N_1+N_2}$	W	n	ρ	A (由(22)内插得到)	A (由(20)计算得到)
0	0	18.00	1.3336	0.9991	3.72	3.72
19.98	0.044	21.52	1.3578	1.1381	4.19	4.15
39.76	0.109	26.72	1.3817	1.2936	4.80	4.81
59.98	0.216	35.28	1.4065	1.4803	5.86	5.86
80.10	0.425	52.00	1.4308	1.6955	7.95	7.93
100	1	98	1.4277	1.8417	13.68	13.68

最后，我们看看化合物的克分子折射度 A 对其原子成员的原子折射度的依赖关系．设分子中包含 N_1 个折射度 A_1 的原子，N_2 个 A_2 的，等等，显然

$$A=N_1A_1+N_2A_2+\cdots. \tag{23}$$

这个公式同实验符合得也挺好，如表 8 中所见．各原子成员的折射度列于表 7.

表 7　各种元素的原子折射度(钠 D 光)

元　素	化 学 式	原 子 量	A
氢	H	1	1.02
碳	C	12	2.11
氧	O	16	2.01
硫	S	32	8.23
氯	Cl	35.5	5.72

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 8　各种化合物的克分子折射度(钠 D 光)

物　质	化学式	A (由(20)计算)	A (由(23)计算)
盐　酸	HCl	6.68	6.74
水	H_2O	3.72	4.05
二硫化碳	CS_2	21.97	18.57
丙　酮	C_3H_6O	16.14	14.46

此项结果符合程度之良好，以我们简单的考虑而论，实已超过原所能预料. 另一方面，在一些情况下，事实上有必要作某些修正；例如，在氮的情况，就必须按照氮原子所进入的化合物而给以不同的原子折射度. 极化率 α 这个量，包括必要的修正在内，是一个十分确定的原子参量，它亦可用在其他现象，如范德瓦耳斯内聚力、表面吸附现象等等的研究. 不过，这些只有用量子力学来处理方能圆满.

§ 2.3.4　初等色散理论

§ 1.2 中曾经指出，相速连同折射率不能象我们早先形式考虑所提示的那样，是媒质的常数，而实际上，这两个量肯定和频率有关. 折射率随频率的改变，构成了色散现象. 要对色散进行充分探讨，需要深入研究物质的原子理论，但是利用关于分子结构的一、二个基本结果，可以给出一个简化的色散介质模型(主要由洛伦兹给出的).

一个分子是由若干重粒子(形成分子的那些原子的原子核)，和围绕它们旋转的一些轻粒子(电子)所组成. 电子带负电，原子核带正电. 在中性分子中，电子的电荷和原子核的电荷正好抵消. 然而，正(核的)电荷中心和负(电子的)电荷中心可能不相重合：这种系统就具有一电偶极子，因而我们称之为极分子. 为简单起见，我们这里将不讨论极分子，虽然它们在物理现象和化学现象中起着重大的作用.

如果一个无极分子被置于电场作用之下，则电子和核发生位

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

移，由而产生一偶极矩．单位体积内所有分子偶极矩的矢量和，实质就是前一节形式上引进的那个极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$.

为了确定极化强度和折射率对场频的依赖关系，我们必须先求出各个带电粒子离开它平衡位置的位移 $\boldsymbol{r}$. 我们可以假定，每个电子受下列洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$（见 § 1.1 方程 (34)）的作用：

$$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}'+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}'\right),$$

式中 e 是电子的电荷，$\boldsymbol{v}$ 是电子的速度．我们将假定，电子的速度比真空中的光速 c 小得多，因而在洛伦兹力表达式中，磁场的贡献可予忽略．严格定出核和电子在电力作用下的有效位移，是一个复杂的量子力学问题．然而，有一点看来是合理的，而且实际它也被严格的理论所确认，这就是：电子的行为，在很好的近似程度上，好像是它被一个准弹性恢复力

$$\boldsymbol{Q}=-q\boldsymbol{r}$$

束缚到平衡位置上一样．因此，设 m 代表电子的质量，则电子的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}+q\boldsymbol{r}=e\boldsymbol{E}'.\tag{24}$$

设 ω 为入射场的角频率，

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}_0'e^{-i\omega t},\tag{25}$$

并以

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0e^{-i\omega t}\tag{26}$$

作为 (24) 的试探解，由而得到所求的稳定解为

$$\boldsymbol{r}=\frac{e\boldsymbol{E}'}{m(\omega_0^2-\omega^2)},\tag{27}$$

式中

$$\omega_0=\sqrt{\frac{q}{m}}\tag{28}$$

叫做共振（或吸收）频率．按照 (27)，电子是随入射场的频率来振动的．

每一电子对极化强度各贡献一个电矩 $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{r}$. 原子核也会

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

有贡献;但因核的质量比电子的质量大得多,故其贡献在一级近似下可予忽略. 另暂假定,一个分子中只有一个电子起作用,其共振频率为 ω_0, 则总极化强度为

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = Ne\boldsymbol{r} = N\frac{e^2}{m}\cdot\frac{\boldsymbol{E}'}{(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{29}$$

以(29)式同(14)式相比较,得到

$$N\alpha = N\frac{e^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}, \tag{30}$$

从而用原子参量表出"极化率密度". 由此可见,原来 α 这个量并非常数,不是像在(17)式那样,如果 ε 代表的是静介电常数,α 它就该是一常量. 方便的办法是引进一个与频率有关的介电常数——$\varepsilon(\omega)$,由麦克斯韦关系式 $\varepsilon = n^2$ 来定义,其中 n 是折射率,是一个 ω 的函数——$n(\omega)$. 这样,静介电常数就是 $\varepsilon(0) = n^2(0)$;按照(17),它对应于极限值 $N\alpha(0)$,而由(30),

$$N\alpha(0) = \frac{Ne^2}{m\omega_0^2};$$

以此代入(16)式,即得到静介电常数 $\varepsilon(0)$.

当 $\omega \neq 0$ 时,从(30)式看来,函数 $N\alpha(\omega)$ 随 ω 单调增大,而在 $\omega = \omega_0$ 时变成无穷大(共振点);当 $\omega > \omega_0$ 时,它随 ω 的增大而从负方趋近于 0. 把(30)代入(17),得到折射率对频率的显依赖关系如下:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4\pi}{3}\frac{Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{31}$$

对于气体,n 接近 1,故可令左边分母中的 $n^2+2\sim 3$, 由此得到

$$n^2-1 \sim 4\pi N\alpha = \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{32}$$

可见,n 是频率的递增函数. 这种色散称为正常色散. 此外,当 $\omega \lessgtr \omega_0$ 时,$n \gtrless 1$,并且 n 随 ω 的增大而趋近于 1(见图 2.3).

在共振频率($\omega = \omega_0$)处,n 和 α 实际上不是象我们公式所提示的那样,变成无穷大. 这个奇异点的产生仅仅是形式上的,因为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

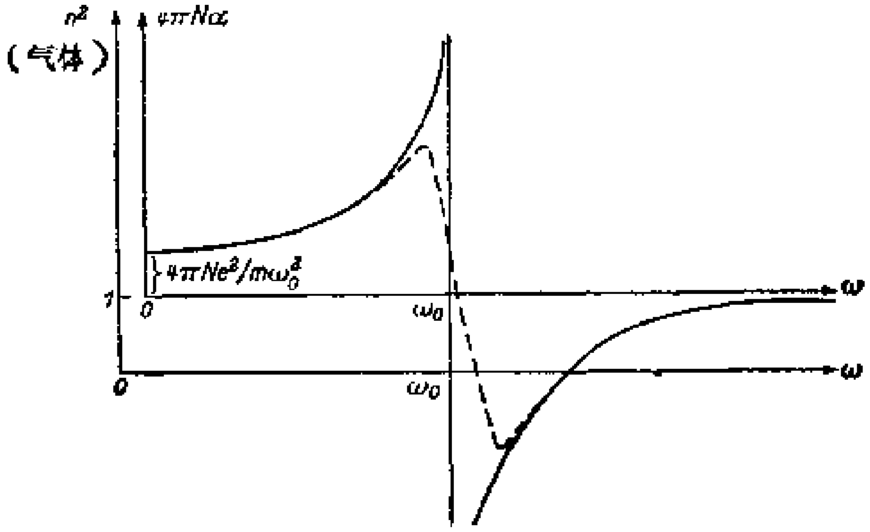


图 2.3 色散曲线

实线：略去了阻尼作用

虚线：考虑了阻尼作用（二纵坐标这时各代表 n^2 和 $4\pi N\alpha$ 的实部）

我们忽略了阻尼的作用．事实上，阻尼是整个过程中一个必不可少的因素，因为振动的电子要发射电磁波，而波要带走能量．但是也还有其他一些原因可造成能量的损耗（例如，由于原子之间的碰撞）．在形式上，阻尼的计人可以通过在运动方程（24）中加上一项代表阻力的项 $g\dot{\boldsymbol{r}}$ 来办到：

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + g\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}'. \tag{33}$$

这时取代（27）而得到

$$\boldsymbol{r} = \frac{e\boldsymbol{E}'}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega g}. \tag{34}$$

极化强度，因而还有 $N\alpha$，变成一个复量．可以证明（参见金属理论中的类似情况，那里采用一个复折射率——第十三章），这个复函数的模（除去一个由于吸收引起的小因子）是实际的"极化率密度"，这在图 2.3 中用虚线画出．这曲线在 ω 略小于 ω_0 的地方有一个很锐的极大，而在 ω 略大于 ω_0 的地方有一个很锐的极小．在极大和极小之间，函数随频率的增加而减小，我们称之为**反常色散**区．这里，波长短的光线比波长长的光线要折射得少一些，这导致一种和通常相反的棱镜色序．对于我们的目的来说，反常色散区并不重要，因为自由原子的吸收频率几乎全都落在紫外光谱区．因

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

此，可见光谱区的折射率总大于1.

以上我们假定，系统只有一个共振频率. 一般说来，即使是在同种分子组成的体系中，也会有许多这种频率. 这时，(31)和(32)式不再适用，必须由更普遍的表达式来代替. 如果仍然暂且略去原子核的运动，则取代(31)式而有

$$\frac{4\pi}{3}N\alpha=\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4\pi}{3}N\frac{e^2}{m}\sum_k\frac{f_k}{\omega_k^2-\omega^2},\tag{35}$$

式中 Nf_k 是对应于共振频率 ω_k 的电子数. 对于气体($n\sim1$)，(35)式可改写成如下形式：

$$n^2-1=4\pi N\alpha=\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2-\nu^2}=\sum_k\frac{\rho_k}{c^2}\frac{\lambda^2\lambda_k^2}{\lambda^2-\lambda_k^2},\tag{36}$$

式中

$$\rho_k=N\frac{e^2}{\pi m}f_k,\quad \nu_k=\frac{\omega_k}{2\pi}=\frac{c}{\lambda_k},\quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{c}{\lambda}.\tag{37}$$

利用恒等式

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_k^2}=1+\frac{\lambda_k^2}{\lambda^2-\lambda_k^2},$$

则(36)变成

$$n^2-1=a+\sum_k\frac{b_k}{\lambda^2-\lambda_k^2},\tag{38}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a&=\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2}=\frac{1}{c^2}\sum_k\rho_k\lambda_k^2,\\ b_k&=\frac{c^2\rho_k}{\nu_k^4}=\frac{1}{c^2}\rho_k\lambda_k^4.\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

对于表示出整个可见范围的折射率，通常取一、二个紫外共振频率即可. 例如，科赫(J. Koch)[1] 曾发现，在 $\lambda=0.436$ 微米到 $\lambda=8.68$ 微米之间，氢、氧以及空气的折射率服从下列公式：

$$n^2-1=a+\frac{b}{\lambda^2-\lambda_0^2},\tag{40}$$

1) J. Koch, *Nov. Act. Soc. Ups.*, (4), **2** (1909), p. 61.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 a, b 和 λ_0 各常数列于表 9.

表 9 氢、氧以及空气在 0°C 和 760mmHg 下的色散常数，波长范围从 $\lambda=0.436$ 微米到 $\lambda=8.68$ 微米

气体	$a\times10^6$	$b\times10^3$	λ_0^2 (10^{-8}厘米^2)	ν_0 (10^{15}秒$^{-1}$)
氢……	27216	211.2	0.007760	3.40
氧……	52842	369.9	0.007000	3.55
空气……	57642	327.7	0.005685	3.98

在不包含共振频率的光谱范围内，公式(38)可再行简化而同时保持良好的准确性。对于所有眼睛看起来是透明的物质，可见光谱区就是这种光谱范围。设以 ν_v 代表短波一边的各个吸收频率(紫的)，以 ν_r 代表长波一边的各个吸收频率(红的)，并将(36)分别展成 ν 和 λ 的幂级数，则

$$\left.\begin{aligned} n^2-1 &= A+B\nu^2+C\nu^4+\cdots-\frac{B'}{\nu^2}-\frac{C'}{\nu^4}-\cdots \\ &= A+\frac{Bc^2}{\lambda^2}+\frac{Cc^4}{\lambda^4}+\cdots-\frac{B'\lambda^2}{c^2}-\frac{C'\lambda^4}{c^4}-\cdots, \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &A=\sum_v\frac{\rho_v}{\nu_v^2},\quad B=\sum_v\frac{\rho_v}{\nu_v^4},\quad C=\sum_v\frac{\rho_v}{\nu_v^6},\cdots \\ &B'=\sum_r\rho_r,\quad C'=\sum_r\rho_r\nu_r^2,\cdots \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

在这种无吸收的光谱范围，对于气体来说，n 和 1 差得很小，故可以以 $2(n-1)$ 代替 (n^2-1)。此外，红外共振频率所致各项 B', $C'\cdots$通常没有明显作用。因此，如果只保留到 $1/\lambda^2$ 项，则(41)化为科希公式[1]

$$n-1=A_1\left(1+\frac{B_1}{\lambda^2}\right), \quad (43)$$

式中

1) L. Cauchy, *Bull. des. sc. math.*, **14** (1830), 9; *Sur la dispersion de la lumière* (*Nouv. exerc. de math.*, 1836).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$A_l = \frac{A}{2}, \quad B_l = \frac{Bc^2}{A}. \qquad (44)$$

表 10 中给出了一些比较重要的气体的 A_l 值和 B_l 值。另外，为了说明科希公式的准确性，表 11 将空气折射率的观测值和科希公式计算值进行了比较。

表 10 各种气体的科希色散公式常数 A_l 和 B_l

气 体	$A_l \times 10^5$	$B_l \times 10^5$
氩 · ·	27.92	5.6
氮 · ·	29.19	7.7
氦 · ·	3.48	2.3
氢 · ·	13.6	7.7
氧 · ·	26.63	5.07
空气 ·	28.79	5.67
乙烷 ·	73.65	9.08
甲烷 ·	42.6	14.41

表 11 空气折射率的观测值和科希色散公式 (43) 计算值

$\lambda \times 10^5$cm	$(n-1)\times 10^4$ 观测值	$(n-1)\times 10^4$ 计算值	差
7.594	2.905	2.907	0.002
6.563	2.916	2.917	0.001
5.896	2.926	2.926	0.000
5.378	2.935	2.935	0.000
5.184	2.940	2.940	0.000
4.861	2.948	2.948	0.000
4.677	2.951	2.954	0.003
4.308	2.966	2.967	0.001
3.969	2.983	2.983	0.000
3.728	2.995	2.996	0.001
3.441	3.016	3.017	0.001
3.180	3.040	3.041	0.001
3.021	3.056	3.058	0.002
2.948	3.065	3.067	0.002

在高密度物质，即液体或固体情况下，在 (35) 式第二项的分母中，n 不再允许用 1 代替。但仍然能够把 (35) 化为同前形式。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因为

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4\pi}{3}N\alpha,$$

故

$$n^2-1=\frac{12\pi N\alpha}{3-4\pi N\alpha}, \tag{45}$$

式中

$$4\pi N\alpha=\frac{Ne^2}{\pi m}\sum_k\frac{f_k}{\nu_k^2-\nu^2}=\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2-\nu^2}. \tag{46}$$

通常，只要计入有限几个吸收频率即可，结果(45)式的 n^2-1是一个 ν^2 的有理函数，因此可被分解成部分分式．为此须求出分母的零值，即下列方程的根：

$$3-4\pi N\alpha=3-\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2-\nu^2}=0. \tag{47}$$

如果以 $\bar{\nu}_k$ 代表各根，则(45)可化为如下形式：

$$n^2-1=\sum_k\frac{\bar{\rho}_k}{\bar{\nu}_k^2-\nu^2}, \tag{48}$$

此式在形式上和气体公式(36)相同．

例如，如果只有一个吸收频率，则频率 $\bar{\nu}_1$ 将是方程

$$3-\frac{\rho_1}{\nu_1^2-\nu^2}=0 \tag{49}$$

的根，由此

$$\left.\begin{aligned}\bar{\nu}_1^2&=\nu_1^2-\frac{1}{3}\rho_1,\\ \bar{\rho}_1&=\rho_1,\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

方程(48)称为塞耳迈尔(Sellmeir)色散公式，它也可写成(38)的形式．

到现在，我们一直忽略了核运动的作用．事实上，它只有在很长波长(红外)才重要．理由很简单．电矩和平均极化率可近似地分成为二部分，一部分同电子相联系，另一部分同原子核相联系，即

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_e+\boldsymbol{p}_n, \tag{51}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

其中

$$\boldsymbol{p}_e = \alpha_e \boldsymbol{E}', \quad \boldsymbol{p}_n = \alpha_n \boldsymbol{E}'. \tag{52}$$

电子将紧跟场的步调，几无间顿，一直可达颇高频率，在许多情况下整个可见光谱的频率都包括在内．相反，原子核的质量非常大，它们在高频区跟不上场的变化，也就是说，对于可见光，$\alpha_n \sim 0$．这由色散公式(41)也可看出．在这一公式中，n^2-1 由两组项表出，一组属于高频(紫)振动 ν_v，另一组属于低频(红)振动 ν_r．现在假定，原子核和电子所受的准弹性束缚力，数量级全都相同．这个假定是合理的，它也由量子力学严格得到．因此，电子和原子核振动频率的数量级将有如下关系：

$$m\nu_e^2 \sim M\nu_n^2, \tag{53}$$

其中 m 是电子质量，M 是原子核质量，ν_e 和 ν_n 分别是电子和原子核的振动频率．为了扩大公式(41)和(42)的范围，把核的运动也包括进来，我们可以简单地假定，紫振动是属于电子，而红振动属于原子核．这时，(37)式因子 ρ_h 也必须分作两类，一类归于电子振动，一类归于原子核振动，二者的数量级关系为

$$m\rho_e \sim M\rho_n. \tag{54}$$

因此，色散公式(41)的各个系数(42)数量级如下：

$$\left.\begin{aligned} B &\sim \frac{A}{\nu_e^2}, & C &\sim \frac{A}{\nu_e^4}, \\ B' &\sim \frac{m}{M}A\nu_e^2, & C' &\sim \left(\frac{m}{M}\right)^2 A\nu_e^4, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

结果，

$$n^2-1 \sim A\left\{1 + a\frac{\nu^2}{\nu_e^2} + b\frac{\nu^4}{\nu_e^4} + \cdots - \frac{m}{M}\left[a'\frac{\nu_e^2}{\nu^2} + b'\frac{m}{M}\frac{\nu_e^4}{\nu^4} + \cdots\right]\right\}, \tag{56}$$

式中 $a, b\cdots, a', b'\cdots$ 都是1左右的数值．第一行诸项对应于电子部分的极化率 α_e，第二行诸项则对应于原子核部分的极化率 α_n；因为 m/M 很小($\sim 1/1840$)，可见第二行各项可予以忽略，如果频率 ν 和紫外共振频率 ν_e 之比不是非常小的话．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，对于光学频率(即对应可见光的频率)，极化强度主要只来自于α_e(正如前面计算所假定的那样)，而对于静电场，极化强度是来自于$\alpha_e+\alpha_n$.

这一节的论述是完全以经典力学为基础的．当根据量子力学进行类似计算时，场和物质的相互作用仍然可以用虚振子的观念来描述，但是，即使当只有一个电子时，振子数也有无穷多个．方程(35)仍然适用，但强度因子f_k不再是指某一类电子的数目，而是指属于某一电子或某一组电子的虚振子数．在大多数情况下，只有有限几个f_k因子具有显著的值，其他均可略去．事实上，全部形式理论几乎没有由于量子力学的引进而受到影响，只不过是，依靠量子力学，可以计算给定电子系统的f_k因子.

§ 2.4　用积分方程处理电磁波的传播[1)]

在本章之初，我们扼要介绍了一种用积分方程处理电磁波传播的方法，此后几节，我们引入了进行这种处理所要用到的几个辅助量．现在我们来表述这些积分方程，并讨论它们的一些结果．这完全可以在本书通篇所论涉的宏观理论范围内来进行．在这一范围内，这些积分方程是和麦克斯韦方程等效的，它们是从跨越有限距离相互作用(这些相互作用的传递当然需要时间)的观点对电磁现象所给的数学描写．在一些情况下，这一处理方法较之大家更为习惯的微分方程处理方法，可更具成效．一个确定的优点是，它使宏观现象和前节所讨论的那些分子现象联系起来.

1) 本节所述理论主要出自下列作者: W. Esmarch, *Ann. d. Physik*, **42** (1913), 1257; C. W. Oseen, *ibid.*, **48** (1915), 1; W. Boethe, *Beiträge zur Theorie der Brechung und Reflexion* (Dissertation, Berlin, 1914), and *Ann. d. physik*, **64** (1921), 693. R. Lundblad 曾对这理论作过一个详细报告，载于 *Univ. Årsskrift, Upsala* (1920). 又见, C. G. Darwin, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **23** (1924), 137, 和 H. Hoek, *Algemeene theorie der optische activiteit van isotrope media* (Thesis, Leiden, 1939).

N. Bloembergen and P. S. Pershan, *Phys. Rev.*, **128** (1962), 619. 曾讨论了这一理论的某些推广，其中考虑了媒质的非线性性质(发生在场特别强的时候).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如前所说，一个物质可以认为是由这样性质的分子所组成，它们对入射波作用的反应象偶极子一样。所发射的偶极波，都将在任何其他偶极子上产生作用力，并且还将决定可测量的平均场。我们将假定这些偶极子均匀地分布于媒质各处，而且将以它们每单位体积的电矩平均值 $\boldsymbol{P}$ 作为基本量。实际上，分子的分布决不会是完全均匀的（即有密度涨落），因而各个粒子的电矩也围绕平均值有涨落。由此产生的现象，在本理论中通过进一步计算（即不仅计算平均值，而且计算其均方偏差）可给以说明。这种计算在某些问题中是很重要的，例如，象瑞利首先对天空蓝色所作的解释[1]。但是，理论的这个扩大这里就不能讨论了[2]。

§ 2.4.1 基本积分方程

我们考虑电磁波在一个均匀的、各向同性的、非磁性媒质中的传播。在媒质内部，作用在第 j 个偶极子上的电场 $\boldsymbol{E}'_j$ 和磁场 $\boldsymbol{H}'_j$ 可分成两部分，一部分是入射场 $\boldsymbol{E}^{(i)}$，$\boldsymbol{H}^{(i)}$（它以真空速度 c 进行传播），一部分是所有偶极子的贡献：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}'_j &= \boldsymbol{E}^{(i)} + \sum_l{}' \boldsymbol{E}_{jl},\\ \boldsymbol{H}'_j &= \boldsymbol{H}^{(i)} + \sum_l{}' \boldsymbol{H}_{jl},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

取和范围包括除去第 j 个偶极子以外的所有其他偶极子。在第 j 个偶极子的所在点 $\boldsymbol{r}_j$，第 l 个偶极子产生的场可由 § 2.2 (49)—(51)得到：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{jl} &= \text{curl curl}\,\frac{\boldsymbol{p}_l(t - R_{jl}/c)}{R_{jl}},\\ \boldsymbol{H}_{jl} &= \frac{1}{c}\,\text{curl}\,\frac{\dot{\boldsymbol{p}}_l(t - R_{jl}/c)}{R_{jl}}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

1) 后面 § 13.5 讨论球形粒子（处于真空之中）的光散射时，还要提到瑞利理论。如果粒子很小，则散射辐射强度对波长的依赖关系，和本处均匀媒质中自发密度涨落的情况相同（即与波长 4 次方成反比）。不过，涨落理论除了提供这一结果外，还给出散射强度对密度涨落的依赖关系。

2) 它的讨论可见 M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933), § 81.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中$\boldsymbol{p}_l(t)$代表第 l 个偶极子的电矩，$R_{jl}=|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_l|$，而算符 curl 是对第 j 个偶极子的坐标 x_j，y_j，z_j 来运算的。

如前所说，偶极子的分布在良好近似程度上可作为连续分布来处理，即可以认为各偶极子的电矩是位置(和时间)的连续函数：$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)$。同样，也可以假定分子数密度$N$是位置的连续函数$N(\boldsymbol{r})$。于是，每单位体积的总电矩 $\boldsymbol{P}$ 由 § 2.3(14) 给出：

$$\boldsymbol{P}=N\boldsymbol{p}=N\alpha\boldsymbol{E}'. \tag{3}$$

由于 § 2.3 中所解释的原因，磁力的贡献在(3)式中已予忽略。又由于假定物质是非磁性的(即 $\boldsymbol{M}=0$)，因而在即将建立的动力学平衡条件中，将不牵涉有效场 $\boldsymbol{H}'$。

以(2)式代入(1)式，并利用(3)过渡到连续分布，得到[1]

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^{(i)}+\int \text{curl curl}\, N\alpha\frac{\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}dV', \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}^{(i)}+\frac{1}{c}\int \text{curl}\, N\alpha\frac{\dot{\boldsymbol{E}}'(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}dV', \tag{5}$$

式中

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|.$$

如果观察点 $\boldsymbol{r}$ 在媒质外边，则积分范围包括整个媒质。如果观察点在媒质里边，则被原子占据的那个小地区必须先排除在外；我们设想它是个半径为 a 的小球 σ。最后我们再按通常方法过渡到极限 $a\to 0$。

方程(4)是一个 $\boldsymbol{E}'$ 的积分-微分方程。当解得 $\boldsymbol{E}'$ 时，即可由(5)得到 $\boldsymbol{H}'$。这两个方程和各向同性非磁性物质的麦克斯韦方程实质上是等效的。对磁性物质的推广可借助第二赫兹矢量得到。

§ 2.4.2 厄瓦耳特-欧西恩消光定理和洛伦兹-洛伦茨公式的严格推导

方程(4)中有效电场同入射电场的关系颇为复杂，只有在某些

1) 这里须取各场之和而不得用势相加，即(4)中算符 curl curl 须置于积分号内而不得放在积分号外。因为作用在分子上的场(如(3)所示)是由对所有一个个场取和而得到。各场在场源处的奇异点，导致各场的和同与总势(与各场相关联的势的和)相关联的场之间有一差值。参见下文(15)式。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

特别情况这一方程才可有显解．不过，从它还是能导出某些基本结果，如洛伦兹-洛伦茨公式，反射定律和折射定律，菲涅耳公式．在证明此点之前，我们将先建立关于(4)式之解的一个重要的一般结果．

设 Σ 代表媒质的界面．对于媒质里边的观察点，基本方程(4)可以写成

$$\boldsymbol{P} = N\alpha(\boldsymbol{E}^{(i)} + \boldsymbol{E}^{(d)}), \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{E}^{(d)}$ 代表各偶极子的贡献：

$$\boldsymbol{E}^{(d)} = \int_{\sigma}^{\Sigma} \text{curl curl}\,\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}', t - R/c)}{R} dV'. \tag{7}$$

积分所包括的体积的界面已于式中标明．

下面假设入射场 $\boldsymbol{E}^{(i)}$ 是单色的，角频率为 ω，即

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = \boldsymbol{A}^{(i)}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}, \tag{8}$$

此外再取这样一个波作为 $\boldsymbol{P}$ 的试探解，它也是单色的，且频率相同，但传播速度不同(设为 c/n)：

$$\boldsymbol{P} = (n^2 - 1)k_0^2\,\boldsymbol{Q}(r)e^{-i\omega t}, \tag{9}$$

式中 k_0 同前，等于 ω/c，而 $\boldsymbol{Q}$ 满足

$$\nabla^2\boldsymbol{Q} + n^2k_0^2\boldsymbol{Q} = 0. \tag{10}$$

(9)中常数因子 $(n^2 - 1)k_0^2$ 的引入是为了简化后面的公式．常数 n 必须看成是一个未知数，而定出这个常数乃是本节分析的主要目的之一．

现在再假定，$\boldsymbol{Q}$ 在媒质中没有源，即在媒质里边

$$\text{div}\boldsymbol{Q} = 0. \tag{11}$$

乍一看来，基本积分-微分方程(6)能有(9)这种形式的解，似乎有点奇怪，因为 $\boldsymbol{E}^{(i)}$ 代表一个以真空速度 c 传播的波，而(9)中 $\boldsymbol{P}$ 的传播速度却又设为 c/n．然而，下面即将证明，偶极子场 $\boldsymbol{E}^{(d)}$ 可以表成为两项之和，其中一项服从真空波动方程，正好和入射波消掉，而另一项满足传播速度是 c/n 的波动方程．因此，可以认为，入射波在媒质内任一点因同偶极子场相互干涉而被消灭，取而代之的另一个波具有不同的传播速度(一般说，方向也不同)．这个结

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

果称为消光定理，首先由厄瓦耳特[1]和欧西恩[2]建立，但厄瓦耳特讨论的是晶体媒质，而欧西恩讨论的是各向同性媒质。最近，赛恩(J. J. Sein)等人证明，在麦克斯韦电磁理论范围内也可以表述出一个类似的消光定理[3]。

为证明消光定理，我们把(6)改写成不含时间的形式：

$$\boldsymbol{Q} = N\alpha\left\{\frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\boldsymbol{A}^{(i)} + \boldsymbol{A}^{(d)}\right\}, \tag{12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{(d)} &= (n^2-1)k_0^2\boldsymbol{A}^{(d)}e^{-i\omega t},\\ \boldsymbol{A}^{(d)} &= \int_\sigma^\Sigma \text{curl curl}\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}')G(R)dV',\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

而

$$G = \frac{e^{ik_0R}}{R}. \tag{14}$$

附录5证明，当小球 σ 的半径足够小时，

$$\int_\sigma^\Sigma \text{curl curl}\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}')G(R)dV' = \text{curl curl}\int_\sigma^\Sigma \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}')G(R)dV' - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}). \tag{15}$$

函数 G 代表一个真空中的球面波，所以它满足波动方程

$$\nabla^2 G + k_0^2 G = 0. \tag{16}$$

因此，由(10)和(16)可知，(15)右边积分号内的 $\boldsymbol{Q}G$ 可表成如下形式：

$$\boldsymbol{Q}G = \frac{1}{(n^2-1)k_0^2}(\boldsymbol{Q}\nabla^2 G - G\nabla^2\boldsymbol{Q}), \tag{17}$$

积分并利用格林定理，得到

1) P. P. Ewald (Dissertation, München, 1912); *Ann. d. Physik*, **49** (1916), 1.
2) C. W. Oseen, *Ann. d. Physik*, **48** (1915), 1.
3) J. J. Sein, *Opt. Comm.*, **2** (1970), 170; J. de Goede and P. Mazur, *Physica*, **58** (1972), 568; D. N. Pattanayak and E. Wolf, *Opt. Comm.*, **6** (1972), 217; E. Wolf in *Coherence and Quantum Optics*, ed. L. Mandel and E. Wolf (New York, Plenum Press, 1973), 339.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\int_{\sigma}^{\Sigma} \boldsymbol{Q}(\mathbf{r}')G(R)dV' = \frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\left[\iint_{\Sigma}\left\{\boldsymbol{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \nu'}\right\}dS' - \int_{\sigma}\left\{\boldsymbol{Q}\frac{dG}{dR} - G\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial R}\right\}dS'\right], \tag{18}$$

式中 $\partial/\partial\nu'$ 表示沿界面 Σ 的外向法线取微商。经过一步步计算，得到(参见§ 8.3.1)当 $a\to 0$时，σ 面积分项的极限值为 $-4\pi\boldsymbol{Q}(r)$，所以

$$\int_{\sigma}^{\Sigma} \boldsymbol{Q}(\mathbf{r}')G(R)dV' \to \frac{1}{(n^2-1)k_0^2} \times \left\{\iint_{\Sigma}\left(\boldsymbol{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \nu'}\right)dS' + 4\pi\boldsymbol{Q}\right\} \tag{19}$$

从 (13)，(15) 和 (19) 得到，在极限时

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(d)} &= \int_{\sigma}^{\Sigma} \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{Q}(\mathbf{r}')G(R)dV' \\ &= \frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\Big[4\pi \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{Q} \\ &\quad + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_{\Sigma}\left\{\boldsymbol{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \nu'}\right\}dS'\Big] - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{Q}(r).\end{aligned} \tag{20}$$

下一步我们利用恒等式

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{Q} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{Q} - \nabla^2\boldsymbol{Q}.$$

右边第一项因 (11) 而为零，而第二项由 (10) 等于 $n^2k_0^2\boldsymbol{Q}$. 以此代入 (20) 式，最后得到偶极场表达式如下:

$$\boldsymbol{A}^{(d)} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)\boldsymbol{Q} + \frac{1}{(n^2-1)k_0^2} \times \operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_{\Sigma}\left\{\boldsymbol{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \nu'}\right\}dS'. \tag{21}$$

按照(10)，右边第一项代表一个以速度 c/n 传播的波，而第二项可以看出是代表一个和 G 一样以真空速度 c 传播的波. 因此，如前所说，基本方程 (12) 各项分成了两组，每组代表一个波，各以不同的速度进行传播. 这只有当每组分别为零时才有可能，因此

$$\frac{4\pi}{3}N\alpha = \frac{n^2-1}{n^2+2}, \tag{22}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

并且

$$\mathbf{A}^{(i)} + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_{\Sigma}\left\{Q\frac{\partial G}{\partial\nu'} - G\frac{\partial Q}{\partial\nu'}\right\}dS' = 0. \tag{23}$$

关系式(23)表明,在媒质内任一点,入射波

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = \boldsymbol{A}^{(i)}e^{-i\omega t}$$

通过同一部分偶极场相互干涉而消光. 取而代之的是另一个波,即

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{N\alpha}\boldsymbol{P} = \frac{1}{N\alpha}(n^2-1)k_0^2\boldsymbol{Q}e^{-i\omega t} = \frac{4\pi}{3}(n^2+2)k_0^2\boldsymbol{Q}e^{-i\omega t}, \tag{24}$$

这个波在媒质内传播,速度为 c/n. n 则由(22)式用分子数密度 N 和极化率 α 表出. 我们将认得,这个关系式就是 § 2.3.3 中试行引进的那个洛伦兹-洛伦茨公式.

积分-微分方程(23)的通解,原则上可通过把它化成面 Σ 上 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\partial\boldsymbol{Q}/\partial\nu'$ 的两个耦合弗雷得霍姆(Fredholm)积分方程来得到. 然后以这些作为边界条件解方程(10),即可得到媒质内任一点的 $\boldsymbol{Q}$. 解(10)可依循标准方法,或采用格林函数,或应用亥姆霍兹-基尔霍夫积分公式(§ 8.3 方程(7)).

现在,我们必须使有效场 $\boldsymbol{E}'$ 同麦克斯韦理论的普通场 $\boldsymbol{E}$ 联系起来. 为此,我们写下电位移 $\boldsymbol{D}$ 的两个定义:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = n^2\boldsymbol{E} \tag{25a}$$

和

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}. \tag{25b}$$

消去 $\boldsymbol{D}$,得到

$$\boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{n^2-1}\boldsymbol{P}. \tag{26}$$

另由(3)和(22),

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{N\alpha}\boldsymbol{P} = \frac{4\pi}{3}\frac{n^2+2}{n^2-1}\boldsymbol{P},$$

所以,利用(26),得到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}, \tag{27}$$

结果和 § 2.3(12)式一致．最后由(26)和(9)式可以看出，当用 $\boldsymbol{Q}$ 表示时，媒质($n \neq 1$)里边的电场

$$\boldsymbol{E} = 4\pi k_0^2 \boldsymbol{Q} e^{-i\omega t}. \tag{28}$$

要决定媒质外边的电场，须回到(4)．这时，方程中的积分范围包括整个媒质，所以算符 curl curl 可拿到相应积分号外边．此外，因为在媒质外边 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$，所以那里 $\boldsymbol{P} = 0$，因而由(27)可知，在形式上 $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$．这时，取代(6)式得到

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(i)} + \boldsymbol{E}^{(r)},$$

其中

$$\boldsymbol{E}^{(r)} = \text{curl curl} \int \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}', t - R/c)}{R} dV'. \tag{29}$$

同前，仍讨论时谐情况，以(9)代入，并利用(17)和格林定理，则

$$\boldsymbol{E}^{(r)} = \boldsymbol{A}^{(r)} e^{-i\omega t},$$

式中

$$\boldsymbol{A}^{(r)} = \text{curl curl} \int_{\Sigma} \left\{ \boldsymbol{Q} \frac{\partial G}{\partial \nu'} - G \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \nu'} \right\} dS', \tag{30}$$

$\boldsymbol{Q}$ 就是前面 Σ 面上的那一函数．

以上我们仅仅讨论了电场．要求出磁场，我们只须把 $\boldsymbol{E}'$ 代入(5)，计算其中积分即可．这可按照上列计算如法泡制，但这时计算稍稍简单一些，因为(5)中算符 curl 可拿到积分号外边，这一点由附录 5 的讨论显然可见．当把所得到的 $\boldsymbol{H}$ 表达式同 $\boldsymbol{E}$ 表达式进行比较时，我们发现这些解同麦克斯韦方程一致．因为这些计算并无疑难之处，而且也没有揭示出任何重要的新特性，所以这里不再给出．

从物理上看，物质中的场由极化强度来表征，比由电位移来表征更自然．而具有巨大意义的是，上面根据这一物理见解所进行的探讨，其方法如此绝妙，使我们通过积分-微分方程(4)，严格推导出了洛伦兹-洛伦茨公式和消光定理．这个卓有成效的方法迄

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

今很少用于处理更专门的问题[1]，但是第十三章将给出它的一个应用实例。

§ 2.4.3 借助厄瓦耳特-欧西恩消光定理处理平面波的折射和反射

现在把公式(23)所表达的消光定理应用到平面单色波进入一均匀媒质时的情况，这个媒质占据 $z<0$ 那半个空间。我们将看到，它导致折射定律和反射定律，并导致菲涅耳公式。

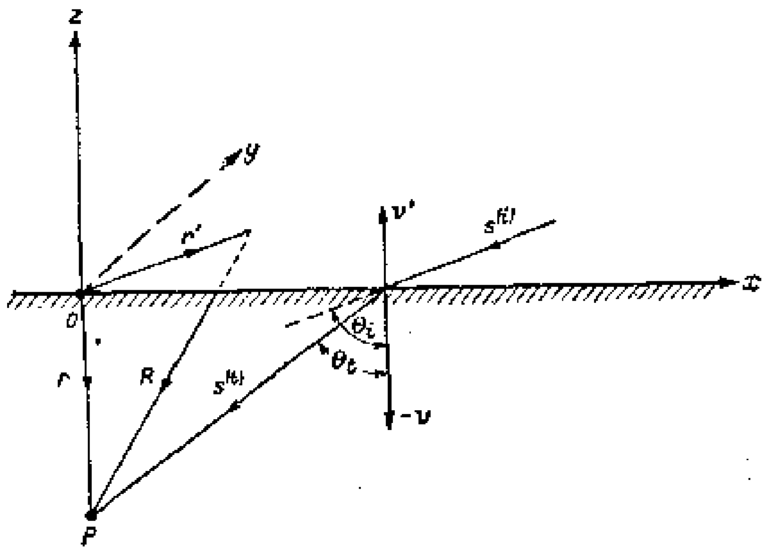


图 2.4 平面波进入作为偶极子系统的均匀媒质

设入射波取如下形式：

$$\boldsymbol{E}^{(i)}=\boldsymbol{A}^{(i)}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}=\boldsymbol{A}_0^{(i)}e^{i[k_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(i)})-\omega t]}, \tag{31}$$

式中 $k_0=\omega/c$，$\boldsymbol{A}_0^{(i)}$ 是一常矢量，$\boldsymbol{s}^{(i)}$ 是传播方向上的单位矢量。

我们选取 z 轴通过观察点 P，并先假定 P 点在媒质内，离界面 Σ 的距离为 r（见图2.4）。然后选取 x 轴，使 $\boldsymbol{s}^{(i)}$ 在 xz 平面上。因此，如果 θ_i 代表入射角，则

$$s_x^{(i)}=-\sin\theta_i,\quad s_y^{(i)}=0,\quad s_z^{(i)}=-\cos\theta_i. \tag{32}$$

按照前节分析，我们将假定透射波的频率和入射波的一样，但

1) D. R. Hartree, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **25** (1929), 97, 曾经把这个方法应用到电磁波在分层媒质中的传播.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

速度不同，是 c/n，n 已由洛伦兹-洛伦茨公式用极化率和密度表出．我们取一个平面波作为透射波的试探解，用单位矢量 $\mathbf{s}^{(t)}$ 代表这个波的传播方向，并假定 $\mathbf{s}^{(t)}$ 在 xz 平面上：

$$s_x^{(t)} = -\sin\theta_t,\quad s_y^{(t)} = 0,\quad s_z^{(t)} = -\cos\theta_t. \tag{33}$$

于是(28)式变成

$$\boldsymbol{E} = 4\pi k_0^2 \boldsymbol{Q} e^{-i\omega t} = 4\pi k_0^2 \boldsymbol{Q}_0 e^{i[k_0 n(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(t)})-\omega t]}, \tag{34}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_0$ 是一常矢量．由于条件(11)，$\boldsymbol{Q}_0$ 和 $\mathbf{s}^{(t)}$ 是正交的．

如果我们只考虑这样的观察点P，它们离界面 $z=0$ 的距离要比波长大得多，即如果设

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = k_0 r \gg 1, \tag{35}$$

则积分-微分方程的解很容易得到．这个条件仅为简化计算而设，并非对该积分-微分方程的物理效用加以限制[1]．

现在，Σ 面积分中的两项微商为

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}(\mathbf{r}')}{\partial \nu'} = \frac{\partial}{\partial \nu'} \boldsymbol{Q}_0 e^{ink_0(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{s}^{(t)})} = ink_0\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \nu'}\cdot\mathbf{s}^{(t)}\right)\boldsymbol{Q}_0 e^{ink_0(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{s}^{(t)})}, \tag{36a}$$

$$\frac{\partial G(R)}{\partial \nu'} = \frac{\partial}{\partial \nu'}\frac{e^{ik_0R}}{R} = ik_0\frac{\partial R}{\partial \nu'}G\left(1+\frac{i}{k_0R}\right). \tag{36b}$$

(36b)中最后一项由于条件(35)可予以忽略，因而(23)中的积分变成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \int_\Sigma\left(\boldsymbol{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \nu'}\right)dS' \\ &= ik_0\boldsymbol{Q}_0\int_\Sigma\left\{\frac{\partial R}{\partial \nu'} - n\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \nu'}\cdot\mathbf{s}^{(t)}\right)\right\}\frac{e^{ik_0[R+n(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{s}^{(t)})]}}{R}dS'. \end{aligned}\tag{37}$$

矢量 $\mathbf{r}$，$\mathbf{r}'$ 和$\boldsymbol{R}$的各个分量是(见图 2.4)

$\mathbf{r}$:	0,	0,	$-r$,
$\mathbf{r}'$:	x',	y',	0,
$\boldsymbol{R}$:	$-x'$,	$-y'$,	$-r$,

1) 对于折射和反射问题，积分一微分方程(23)的精确解已由 E. Lalor 和 E. Wolf 给出，见 *J. Opt. Soc. Amer.*, **62**, 1165 (1972).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以

$$\left.\begin{aligned} &R=\sqrt{x'^2+y'^2+r^2}, && \boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}^{(t)}=-x'\sin\theta_t,\\ &\frac{\partial R}{\partial \nu'}=\frac{r}{R} && \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial \nu'}\cdot\boldsymbol{s}^{(t)}=s_z^{(t)}=-\cos\theta_t.\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

代入(37)，则

$$\boldsymbol{J}=ik_0Q_0\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}+n\cos\theta_t\right)e^{ik_0(R-nx'\sin\theta_t)}dx'dy'.\tag{39}$$

为便于分析，现引进一个角 ϕ 和一个相关联的单位矢量 $\boldsymbol{s}$，其定义为

$$n\sin\theta_t=\sin\phi,\tag{40}$$

$$s_x=-\sin\phi,\quad s_y=0,\quad s_z=-\cos\phi.\tag{41}$$

因为 k_0r 已假定比 1 大得多，所以(39)式中的指数也要比 1 大得多，而当 (x', y') 在积分区内逐点变动时，指数项将振荡得很快并多次易号。在这些条件下，可应用下列公式(得自稳定相原理，见附录 3 方程(20))求得 $\boldsymbol{J}$ 的良好近似值：

$$\iint_D g(x',y')e^{ik_0f(x',y')}dx'dy'\sim\frac{2\pi i}{k_0}\times\sum_j\frac{\sigma_j}{\sqrt{|\alpha_j\beta_j-\gamma_j^2|}}g(x'_j,y'_j)e^{ik_0f(x'_j,y'_j)},\tag{42}$$

式中 (x'_j, y'_j) 是积分区 D 中 f 具有稳定值的那些点，而

$$\alpha_j=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\right)_{x'_j,y'_j},\quad \beta_j=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)_{x'_j,y'_j},\quad \gamma_j=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial y'}\right)_{x'_j,y'_j}\tag{43a}$$

和

$$\sigma_j=\left.\begin{aligned}&+1 \quad 当\ \alpha_j\beta_j>\gamma_j^2,\ \alpha_j>0,\\ &-1 \quad 当\ \alpha_j\beta_j>\gamma_j^2,\ \alpha_j<0,\\ &-i \quad 当\ \alpha_j\beta_j<\gamma_j^2.\end{aligned}\right\}\tag{43b}$$

在本例情况下，如果采用(40)和(41)，则

$$g=\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}+\frac{\sin\phi}{\sin\theta_t}\cos\theta_t\right),\quad f=R-x'\sin\phi,\tag{44}$$

因而

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+r^2}}-\sin\phi,\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+r^2}}.$$

要 f 是稳定的，须

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial y'}=0.$$

由此可见（注意，在计算偏微商时，平方根须取正号），只有当

$$x'=x_1',\quad y'=y_1',$$

其中

$$x_1'=r\tan\phi,\quad y'=0 \tag{45}$$

时，f 才是稳定的．在这一点，(43)和(44)中各式的值如下：

$$\alpha_1=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\right)_{x_1',y_1'}=\frac{\cos^3\phi}{r},\quad \beta_1=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)_{x_1',y_1'}=\frac{\cos\phi}{r},\quad \gamma_1=0, \tag{46a}$$

$$\sigma_1=1, \tag{46b}$$

$$R_1=(R)_{x_1',y_1'}=\frac{r}{\cos\phi}, \tag{46c}$$

$$f(x_1',y_1')=r\cos\phi=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}, \tag{46d}$$

$$g(x_1',y_1')=\frac{\cos\phi}{r}\,\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\sin\theta_t}. \tag{46e}$$

这时由公式(42)得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}+n\cos\theta_t\right)e^{ik_0(R-nx'\sin\theta_t)}dx'dy'$$

$$=\frac{2\pi i}{k_0}\,\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi\sin\theta_t}\,e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})},$$

所以(39)变成

$$\boldsymbol{J}=\int_\Sigma\left\{\boldsymbol{Q}\frac{\partial G}{\partial\nu'}-G\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\nu'}\right\}dS'=-2\pi\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi\sin\theta_t}\boldsymbol{Q}_0e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})}. \tag{47}$$

现在我们把此式代入表达入射波消光的积分-微分方程(23)．由于

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{Q}_0e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})}=ik_0(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{Q}_0)e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})},$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\text{curl curl}\, \boldsymbol{Q}_0 e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})} = -k_0^2 \boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{Q}_0) e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})}.$$

因此(23)式化为

$$\boldsymbol{A}_0^{(i)} e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(i)})} = -2\pi k_0^2 \frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi \sin\theta_t} \boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{Q}_0) e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})}. \quad (48)$$

此式对于界面上所有 $\boldsymbol{r}$ 点都必须是一个恒等式，因此

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^{(i)}, \quad (49)$$

而

$$\boldsymbol{A}_0^{(i)} = -2\pi k_0^2 \frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi \sin\theta_t} \{\boldsymbol{s}^{(i)} \times (\boldsymbol{s}^{(i)} \times \boldsymbol{Q}_0)\}. \quad (50)$$

方程(49)表达了折射定律§1.5(8)。因为它意指

$$\phi = \theta_i, \quad (51)$$

由(40)式即有

$$n \sin\theta_t = \sin\theta_i. \quad (52)$$

此外，(41)和(42)表明，矢量 $\boldsymbol{s}^{(t)}$ 在 $\boldsymbol{s}^{(i)}$ 和 Σ 面法线所决定的平面上。

方程(50)表达了入射波(31)和透射波(34)的振幅关系。设以 T_0 代表透射波的(矢量)振幅，

$$\boldsymbol{T}_0 = 4\pi k_0^2 \boldsymbol{Q}_0, \quad (53)$$

并展开矢量三重积 $\boldsymbol{s}^{(i)} \times (\boldsymbol{s}^{(i)} \times \boldsymbol{Q}_0)$，则(50)变成

$$\boldsymbol{A}_0^{(i)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta_i+\theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} [\boldsymbol{T}_0 - \boldsymbol{s}^{(i)}(\boldsymbol{s}^{(i)} \cdot \boldsymbol{T}_0)]. \quad (54)$$

设 $A_\perp$, $A_\parallel$ 和 $T_\perp$, $T_\parallel$ 分别代表 $\boldsymbol{A}_0^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{T}_0$ 对入射面的垂直分量和平行分量。忆及 $\boldsymbol{A}_0^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{s}^{(i)}$ 正交，$\boldsymbol{T}_0$ 和 $\boldsymbol{s}^{(t)}$ 正交，而 $\boldsymbol{s}^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{s}^{(t)}$ 相互倾斜成一个角度 $(\theta_i-\theta_t)$，则由(54)得到

$$A_\perp = \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta_i+\theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} T_\perp, \quad (55a)$$

$$A_\parallel = \frac{1}{2} \frac{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} T_\parallel. \quad (55b)$$

我们会认得，这些关系式就是折射的菲涅耳公式§1.5(20a)。

最后我们讨论观察点在媒质外边时($z>0$)的情况。计算是完全类似的，只是这时在相应各式中 $z'=-r$ 须换成 $z=r$。这

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

就等于把(46d)中的 s_z 换成 $-s_z$，即 $\phi=\theta_i$ 换成 $\phi=\theta_r$，其中

$$\theta_r=\pi-\theta_i. \tag{56}$$

这时我们不用单位矢量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}^{(i)}$ 而引进单位矢量 $\boldsymbol{s}^{(r)}$，其各分量为

$$s_x^{(r)}=-\sin\theta_r=-\sin\theta_i,\quad s_y^{(r)}=0,\quad s_z^{(r)}=-\cos\theta_r=\cos\theta_i, \tag{57}$$

因而取代(47)得到

$$\boldsymbol{J}'=\int_\Sigma\left\{\boldsymbol{Q}\frac{\partial G}{\partial\nu'}-G\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\nu'}\right\}dS'=-2\pi\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\cos\theta_i\sin\theta_t}\boldsymbol{Q}_0e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(r)})}. \tag{58}$$

这时由(30)得到反射波不含时间的部分为

$$\boldsymbol{A}_0^{(r)}e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(r)})}=2\pi k_0^2\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\cos\theta_i\sin\theta_t}\{\boldsymbol{s}^{(r)}\times(\boldsymbol{s}^{(r)}\times\boldsymbol{Q}_0)\}e^{ik_0(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(r)})}. \tag{59}$$

(59)代表一个平面波，它沿单位矢量 $\boldsymbol{s}^{(r)}$ 所规定的方向传播，这个方向和入射波方向 $\boldsymbol{s}^{(i)}$ 的关系由(56)给定；关系式(56)表达了**反射定律**，和§1.5(7)一致。

反射波的振幅 $\boldsymbol{A}_0^{(r)}$ 用透射波的振幅表示时为

$$\boldsymbol{A}_0^{(r)}=-\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\cos\theta_i\sin\theta_t}[\boldsymbol{T}_0-\boldsymbol{s}^{(r)}(\boldsymbol{s}^{(r)}\cdot\boldsymbol{T}_0)]. \tag{60}$$

设以 $R_\perp$ 和 $R_\parallel$ 代表 $\boldsymbol{A}_0^{(r)}$ 对入射面的垂直分量和平行分量，并利用(55)，由而得到

$$R_\perp=-\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\cos\theta_i\sin\theta_t}T_\perp=-\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}A_\perp, \tag{61a}$$

而

$$R_\parallel=-\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)\cos(\theta_r-\theta_t)}{\cos\theta_i\sin\theta_t}T_\parallel=\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}A_\parallel. \tag{61b}$$

关系式(61)就是**反射的菲涅耳公式**§1.5(21a)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第三章　几何光学基础

§ 3.1　对于极短波长的近似处理

与可见光传播相关联的电磁场,其特点是振动非常之快(频率数量级为10^{14}秒),或者说是波长非常之短(数量级为10^{-5}厘米).因此可以预期,在这种情况下,完全忽略波长的有限大小,可以得到光传播定律的良好一级近似. 人们发现,对很多光学问题而言,这样处理是完全适合的;事实上,那些偏离这个近似理论的现象(所谓衍射现象,在第八章中研究),只有通过细心安排的实验才能观察到.

在光学中，可以忽略波长、即相当于$\lambda_0 \to 0$极限情况的这一分支,通常称为几何光学[1],因为在这种近似处理下,光学定律可以用几何学的语言来表述. 这时，能量可以看作是沿着一定的曲线(光线)传输. 光线锥的物理模型可以这样得到，即取一个幅度可忽略的光源，让它的光通过不透明屏上一个很小的开孔. 到达屏后空间的光将充满一个区域，它的边界(光锥的边)乍看起来好象是清晰的. 但是更仔细地考察就会发现,在边界附近,从阴影到照明区，光强是迅速而又连续地由暗变亮，同时这种变化不是单调的,而是具有一种振荡特征，表现在出现一系列亮带和暗带，称为衍射条纹. 光强发生这种迅速变化的区域，大小只有波长的数量级. 因此,只要这个区域的大小与孔的线度相比可以忽略,我们就

1) 关于几何光学的历史发展，在下列著作中有所介绍: M. Herzberger, *Strahlenoptik* (Berlin, Springer, 1931) 179; *Z. Instrumentenkunde*, **52** (1932), 429—435, 485—493, 534—542, C. Carathéodory, *Geometrische Optik*(Berlin, Springer, 1937) 和 E. Mach, *The Principles of Physical Optics A Historical and Philosophical Treatment* (First German edition, 1913, English Translation: London, Methuen, 1926; reprinted by Dover Publications, New York, 1953).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

可以说光线锥的边缘是清晰的[1]. 当把孔减小到波长线度时，就会出现需要更细致研究的现象. 然而，如果只考虑波长可以忽略的极限情况，则对孔的大小就没有限制了. 这时，我们可以说，一个无限小的孔确定一个无限细的光锥——光线. 后面将要证明，光线锥的截面变化是各点光强变化的一种量度. 此外我们将看到，可以给每条光线一个偏振态，并研究它沿光线的变化.

我们还将看到，当波长很小时，场的一般性质和平面波的相同，而且在几何光学近似范围内，以前对入射到界平面上的平面波所确立的那个折射定律和反射定律，在更普遍条件下也仍然有效. 因此，如果一条光线射到一个锐界面(例如透镜表面)上，它就分裂成一条反射光线和一条透射光线，并且偏振态的变化以及反射率和透射率都可以用相应的平面波公式来计算.

上面所谈各点意味着，当波长足够小时，所有光学现象都可由几何学的考虑导出，办法是定出光线路径，并计算出相关联的强度和偏振. 现在我们来看看当 $\lambda_0 \to 0$ 时麦克斯韦方程组所包含的内容[2]，从而表述出相应的各项定律.

§ 3.1.1 程函方程的推导

现在我们考虑各向同性非导体媒质中一个一般的时谐场:

---

1) 在 $\lambda_0 \to 0$ 极限情况下边缘变锐这一点，是基尔霍夫首先指出的，见 G. Kirchhoff, *Vorlesungen ü Math. Phys.*, **2** (*Mathematische Optik*), (Leipzig, Teubner, 1891), p. 33. 亦见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950), p. 79, 和 A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic Press, 1954), § 35.

2) 索末菲等采用了 Debye 的建议，首先证明几何光学的基本方程（程函方程(15b)）可由 $\lambda_0 \to 0$ 极限情况的(标量)波动方程导出，见 A. Sommerfeld and J. Runge, *Ann. d. Physik*, **35** (1911), 289. 这个证明的推广(考虑电磁场的矢量特性)则归于下列工作: W. Ignatowsky, *Trans. State Opt. Institute (Petrograd)*, **1** (1919), III; V. A. Fock, *ibid.*, **3** (1924), 3; S. M. Rytov, *Compt. Rend. (Doklady) Acad. Sci. URSS*, **18** (1938), 263; N. Arley, *Det. Kgl. Danske Videns Selsk.*, **22** (1945), No. 8; F. G. Friedlander, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **43** (1947), 284; K. Suchy, *Ann. d. Physik.*, **11** (1952), 113, *ibid.*, **12** (1953), 423, and *ibid.*, **13** (1953), 178, R. S. Ingarden and A. Krzywicki, *Acta Phys. Polonica*, **14** (1955), 255.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 代表位置的复矢函数，并且象 § 1.4.3 中所解释的那样，右边表达式的实部被理解为代表场.

复矢量 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 将满足不含时间的麦克斯韦方程组，这组方程用(1)代入 § 1.1(1)—(4) 式即可得到. 在没有电流和电荷的区域 ($\boldsymbol{j}=\rho=0$)，这些方程是

$$\text{curl}\,\boldsymbol{H}_0+ik_0\varepsilon\boldsymbol{E}_0=0,\tag{2}$$

$$\text{curl}\,\boldsymbol{E}_0-ik_0\mu\boldsymbol{H}_0=0,\tag{3}$$

$$\text{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E}_0=0,\tag{4}$$

$$\text{div}\,\mu\boldsymbol{H}_0=0.\tag{5}$$

式中利用了物质关系式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，并且同前，$k_0=\omega/c=2\pi/\lambda_0$，$\lambda_0$ 是真空波长.

在第一章中我们看到，在折射率 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 的媒质中，一个均匀平面波沿单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 规定的方向传播时，其表达式为

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}e^{ik_0n(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r})},\quad \boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{h}e^{ik_0n(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r})},\tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 是常数，一般是复矢量. 对于真空中的一(单色)电偶极场，则有 (参见 § 2.2)

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}e^{ik_0r},\quad \boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{h}e^{ik_0r},\tag{7}$$

r 是距偶极子的距离. 这里 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 不再是常矢量，但是在距偶极子足够远的地方 ($r\gg\lambda_0$)，如果使偶极矩适当地归一化，这些矢量就与 k_0 无关.

这些例子提示我们，在距离场源很多波长的地区，场的更普遍类型可表成如下形式:

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})e^{ik_0\mathscr{S}(\boldsymbol{r})},\quad \boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})e^{ik_0\mathscr{S}(\boldsymbol{r})},\tag{8}$$

其中 $\mathscr{S}(\boldsymbol{r})$ 为"光程"，是位置的实标函数，而 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})$ 是位置的矢函数，它们一般可能是复数[1]. 以 (8) 式作为麦克斯韦方程组的试探解，即可得到 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$ 和 $\mathscr{S}$ 的一组关系式. 下面将要证明，当

1) 如果需要把所有可能的偏振态包括进来，复数的 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 就是必要的. 按照 §1.4 (75) 式，实数的 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 对应于线偏振的场.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

k_0很大（波长很小）时，这些关系式要求$\mathscr{S}$应满足某一微分方程，这个方程和振幅矢量 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 无关.

利用熟知的矢量恒等式，由（8）式，得到

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H}_0 = (\operatorname{curl} \boldsymbol{h} + ik_0 \operatorname{grad}\mathscr{S} \times \boldsymbol{h})e^{ik_0\mathscr{S}}, \tag{9}$$

$$\operatorname{div} \mu\boldsymbol{H}_0 = (\mu \operatorname{div} \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}\mu + ik_0\mu\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}\mathscr{S})e^{ik_0\mathscr{S}}, \tag{10}$$

$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_0$ 和 $\operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E}_0$ 的展式与此类似．因此，(2)—(5) 式变成

$$\operatorname{grad}\mathscr{S} \times \boldsymbol{h} + \varepsilon\boldsymbol{e} = -\frac{1}{ik_0}\operatorname{curl}\boldsymbol{h}, \tag{11}$$

$$\operatorname{grad}\mathscr{S} \times \boldsymbol{e} - \mu\boldsymbol{h} = -\frac{1}{ik_0}\operatorname{curl}\boldsymbol{e}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\mathscr{S} = -\frac{1}{ik_0}(\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\log\varepsilon + \operatorname{div}\boldsymbol{e}), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}\mathscr{S} = -\frac{1}{ik_0}(\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}\log\mu + \operatorname{div}\boldsymbol{h}). \tag{14}$$

我们对 k_0 非常大时的解感兴趣．因此，只要方程右边 $1/ik_0$ 的乘积因子不是特别大，就可以把它们统统略掉，这时各方程化为

$$\operatorname{grad}\mathscr{S} \times \boldsymbol{h} + \varepsilon\boldsymbol{e} = 0, \tag{11a}$$

$$\operatorname{grad}\mathscr{S} \times \boldsymbol{e} - \mu\boldsymbol{h} = 0, \tag{12a}$$

$$\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\mathscr{S} = 0, \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}\mathscr{S} = 0. \tag{14a}$$

我们可以只注意（11a）和（12a）式，因为以 $\operatorname{grad}\mathscr{S}$ 标乘这两式就得到（13a）和（14a）式．（11a）和（12a）式可以看作是 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 的笛卡儿分量 e_x, h_x……的六个联立线性齐次标量方程．只有满足一致性条件（其结合行列式为零），这些联立方程才有非零解．从（11a）和（12a）式中消去 $\boldsymbol{e}$ 或 $\boldsymbol{h}$，即可直接得到这个条件．以（12a）的 $\boldsymbol{h}$ 代入（11a），得到

$$\frac{1}{\mu}[(\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\mathscr{S})\operatorname{grad}\mathscr{S} - \boldsymbol{e}(\operatorname{grad}\mathscr{S})^2] + \varepsilon\boldsymbol{e} = 0.$$

式中第一项因（13a）而为零，而由于 $\boldsymbol{e}$ 不处处为零，因而方程化为

$$(\operatorname{grad}\mathscr{S})^2 = n^2, \tag{15a}$$

写成显式，即

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial z}\right)^2=n^2(x,y,z), \tag{15b}$$

同前，这里 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 代表折射率。函数 $\mathscr{S}$ 常叫做程函[1]，而(15b)称为程函方程；它是几何光学的基本方程[2]。而

$$\mathscr{S}(\mathbf{r})=\text{常数}$$

可称为几何波面或几何波阵面[3]。

这里，程函方程是用一阶的麦克斯韦方程组推导出来的，但是它也可以由电场矢量或磁场矢量的二阶波动方程来推导。为此，将(1)和(8)式代入§1.2中波动方程(5)式，经过一步步计算，最后得到

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{e},\mathscr{S},n)+\frac{1}{ik_0}\mathbf{L}(\boldsymbol{e},\mathscr{S},n,\mu)+\frac{1}{(ik_0)^2}\mathbf{M}(\boldsymbol{e},\varepsilon,\mu)=0, \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\boldsymbol{e},\mathscr{S},n)&=\{n^2-(\operatorname{grad}\mathscr{S})^2\}\boldsymbol{e}\\
\mathbf{L}(\boldsymbol{e},\mathscr{S},n,\mu)&=\{\operatorname{grad}\mathscr{S}\cdot\operatorname{grad}\log\mu-\nabla^2\mathscr{S}\}\boldsymbol{e}\\
&\quad-2\{\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\log n\}\operatorname{grad}\mathscr{S}\\
&\quad-2\{\operatorname{grad}\mathscr{S}\cdot\operatorname{grad}\}\boldsymbol{e},\\
\mathbf{M}(\boldsymbol{e},\varepsilon,n)&=\operatorname{curl}\boldsymbol{e}\times\operatorname{grad}\log\mu-\nabla^2\boldsymbol{e}\\
&\quad-\operatorname{grad}(\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\log\varepsilon).
\end{aligned}$$

类此，将(1)和(8)代入§1.2中 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程(6)，就得到含 $\boldsymbol{h}$ 的相应方程(或者更简单地，利用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$、ε 和 $-\mu$ 同时互换时麦克斯韦方程保持不变这一特性)，结果是

---

1) 程函(eikonal)这个名词(出自希腊文 $\varepsilon\iota\kappa\tilde{\omega}\nu$ = 像)是 H. Bruns 于1895年引入的，用以描写某些有关的函数(参见179页)，而今这个名词已在更广的意义上来使用。

2) 程函方程也可看作是§1.2中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程(5)和(6)的特征线方程，而且它严格描写了这些波动方程的解的不连续态的传播。然而，在几何光学中，我们不涉及不连续态的传播，而只研究时谐解(或近乎时谐的解)。附录6证明，这两种解释在表达形式上是等同的。

还可认出，程函方程就是变分问题 $\delta\int n\,ds=0$ 的哈密顿-雅科毕方程。在光学方面，相应问题可一直追溯到费马(参见§3.3.2和附录1)。

3) 以后，当无混淆之弊时，我们将去掉"几何"二字。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{h},\mathscr{S},n)+\frac{1}{ik_0}\mathbf{L}(\boldsymbol{h},\mathscr{S},n,\varepsilon)+\frac{1}{(ik_0)^2}\mathbf{M}(\boldsymbol{h},\mu,\varepsilon)=0. \tag{17}$$

当 k_0 足够大时，第二项和第三项一般可以忽略；因而 $\mathbf{K}=0$，再次给出程函方程. 后面我们将看到，(16) 和 (17) 中 $1/(ik_0)$ 的一次项也具有一物理解释.

可以证明，在许多重要情况下，场矢量的空间部分 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 可展成渐近级数，形式如下[1]：

$$\boldsymbol{E}_0=e^{ik_0\mathscr{S}}\sum_{m\geqslant 0}\frac{\boldsymbol{e}^{(m)}}{(ik_0)^m},\quad \boldsymbol{H}_0=e^{ik_0\mathscr{S}}\sum_{m\geqslant 0}\frac{\boldsymbol{h}^{(m)}}{(ik_0)^m}, \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{e}^{(m)}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(m)}$ 是位置的函数，而函数 $\mathscr{S}$ 同前[2]. 几何光学则对应于这些展开式的首项.

§ 3.1.2 光线和几何光学的强度定律

由 (8)，以及由 § 1.4 的 (54) 和 (55) 式可以得到，电能密度和磁能密度的时间平均值 $\langle w_e\rangle$ 和 $\langle w_m\rangle$ 为

$$\langle w_e\rangle=\frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*,\quad \langle w_m\rangle=\frac{\mu}{16\pi}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}^*. \tag{19}$$

分别用 (11a) 和 (12a) 代替上式的 $\boldsymbol{e}^*$ 和 $\boldsymbol{h}$，得到

$$\langle w_e\rangle=\langle w_m\rangle=\frac{1}{16\pi}[\boldsymbol{e},\boldsymbol{h}^*,\mathrm{grad}\mathscr{S}], \tag{20}$$

方括号表示标量三重积. 因此，在几何光学的精度范围内，电能密

---

1) 这里我们假定，每一点只有一个几何波阵面通过. 在某些情况下，例如，当媒质中存在障碍物，波在它们上面发生反射时，每一点就可能有几个波阵面通过. 这时，合场由上列类型的各个级数相加来表示.

2) 这种渐近展开式的理论主要出自 Luneburg 的工作，见其《电磁波的传播》讲义 [R. K. Luneburg, *Propagation of Electromagnetic Waves* (mimeographed lecture notes, New York University, 1947—1948)]. 亦见 M. Kline, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4** (1951), 225; *ibid.*, **8** (1955), 595 和 W. Braunbeck, *Z. Naturforsch.*, **6** (1951), 672. M. Kline 和 I. W. Kay《电磁理论和几何光学》一书对此理论作了详细介绍 [M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, (1965))].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

度和磁能密度的时间平均值是相等的.

坡印廷矢量的时间平均值可由 (8) 式和 § 1.4(52) 式得到

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathscr{R}(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{h}^*).$$

利用 (12a), 则

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu}\{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*)\operatorname{grad}\mathscr{S} - (\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\mathscr{S})\boldsymbol{e}^*\}.$$

后一项因(13a)式而为零,剩下前一项以 $\langle w_e \rangle$ 表达式 (19) 和麦克斯韦关系式 $\varepsilon\mu = n^2$ 代入,即有

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{2c}{n^2}\langle w_e \rangle \operatorname{grad}\mathscr{S}. \tag{21}$$

因 $\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle$,故 $2\langle w_e \rangle$ 代表总能量密度的时间平均值 $\langle w \rangle$(则 $\langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle$). 此外,由于程函方程, $(\operatorname{grad}\mathscr{S})/n$ 是一单位矢量,设为 $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{s} = \frac{\operatorname{grad}\mathscr{S}}{n} = \frac{\operatorname{grad}\mathscr{S}}{|\operatorname{grad}\mathscr{S}|}, \tag{22}$$

而(21)表明, $\boldsymbol{s}$ 是在平均坡印廷矢量的方向上. 同前,令 $c/n = v$, 则 (21) 变成

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = v\langle w \rangle \boldsymbol{s}. \tag{23}$$

因此,平均坡印廷矢量的方向垂直于几何波阵面,而它的大小等于平均能量密度和速度 $v = c/n$ 之积. 这个结果类似于 § 1.4 中平面波的关系式 (9), 它表明,在几何光学的精度范围内, 平均能量密度是以速度 $v = c/n$ 来传播的.

现在,我们可以把几何光线定义为几何波阵面 $\mathscr{S}$=常数的正

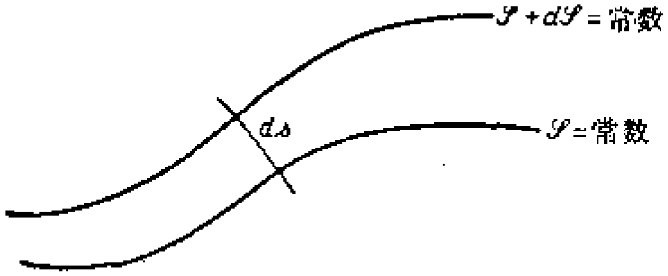


图 3.1 关系式 $n\boldsymbol{s} = \operatorname{grad}\mathscr{S}$ 意义的图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

交轨线. 我们将把它们看作是一些定向曲线，它们的方向处处都与平均坡印廷矢量的方向相重合[1]. 设 $\mathbf{r}(s)$ 代表某一光线上点 P 的位置矢量，并作为光线弧长 s 的函数，则 $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{s}$，而光线方程可写成为

$$n\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad}\mathscr{S}. \tag{24}$$

从(13a)和(14a)可以看出，电矢量和磁矢量在每一点都和光线垂直.

(24)式的意义从下列说明可以看得更加清楚. 考虑相邻二个波阵面 $\mathscr{S}$ = 常数和 $\mathscr{S} + d\mathscr{S}$ = 常数(图 3.1). 于是

$$\frac{d\mathscr{S}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\text{grad}\mathscr{S} = n. \tag{25}$$

因此，这两个波阵面之间的法线距离 ds 与折射率成反比，即与 v 成正比.

现沿某一曲线 C 取积分 $\int_C n\,ds$，此积分称为曲线 C 的光学长度. 设用方括号表示联接 P_1、P_2 两点的光线的光学长度，则

$$[P_1P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n\,ds = \mathscr{S}(P_2) - \mathscr{S}(P_1). \tag{26}$$

我们已经看到，平均能量密度是以速度 $v = c/n$ 沿光线传播的，因而

$$n\,ds = \frac{c}{v}ds = c\,dt,$$

式中 dt 是能量沿光线行经距离 ds 所需的时间. 因此

$$[P_1P_2] = c\int_{P_1}^{P_2} dt, \tag{27}$$

即光学长度 $[P_1P_2]$ 等于光的真空速度和光从 P_1 传播到 P_2 所需时间之积.

光的强度 I 前已定义为坡印廷矢量的时间平均的绝对值. 因

1) 这个光线定义只适用于各向同性媒质. 后面(十四章)我们将看到，在各向异性媒质中，波阵面法线的方向和坡印廷矢量的方向，一般说来并不重合.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

此由 (23) 式有

$$I = |\langle \boldsymbol{S} \rangle| = v\langle w \rangle, \tag{28}$$

而能量守恒定律 § 1.4(57) 给出

$$\operatorname{div}(I\boldsymbol{s}) = 0. \tag{29}$$

为了说明这个关系式的含义，我们在某一波阵面 $\mathscr{S}(\boldsymbol{r}) = a_1$ (a_1 是一常数) 上取一面元 dS_1，用它所发出的所有光线构成一个窄管，这些光线和另一波阵面 $\mathscr{S}(\boldsymbol{r}) = a_2$ 相交的相应面元设为 dS_2 (图 3.2)。对窄管体积取 (29) 式的积分，并应用高斯定理，得到

$$\int I\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = 0, \tag{30}$$

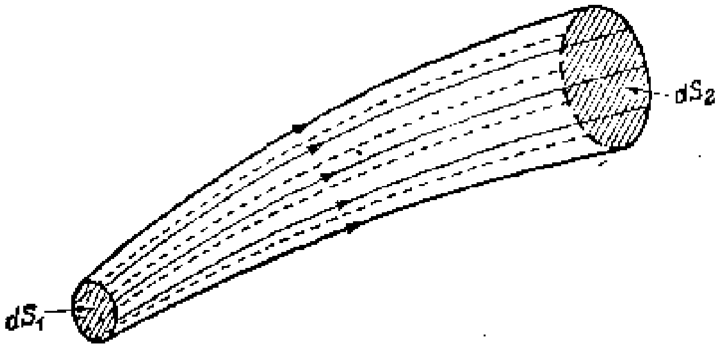


图 3.2 几何光学的强度定律图示

$\boldsymbol{\nu}$ 代表窄管表面的外向法线。由于

在 dS_2 上，　$\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$，

在 dS_1 上，　$\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu} = -1$，

在其他各处，$\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$，

因而 (30) 化为

$$I_1 dS_1 = I_2 dS_2, \tag{31}$$

I_1 和 I_2 分别代表 dS_1 和 dS_2 上的强度。由此可见，IdS 沿一个光线管保持不变。这个结果表达了几何光学的强度定律。

后面我们将看到，在均匀媒质中，光线是直线。这时强度定律可表成稍为不同的形式。先假定 dS_1 以及 dS_2 的周界是由曲率线线段组成 (见图 3.3)。设 R_1 和 R_1' 是线段 A_1B_1 和 B_1C_1 的主曲率半径 (参见 § 4.6.1)，则

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

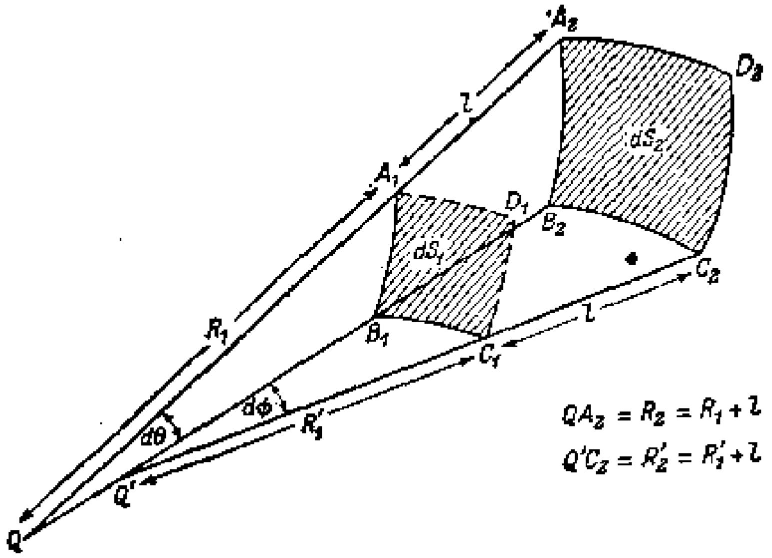


图 3.3 直线光线情况下几何光学的强度定律图示

$$A_1B_1 = R_1 d\theta, \quad B_1C_1 = R_1' d\phi,$$

式中 $d\theta$ 和 $d\phi$ 是 A_1B_1 和 B_1C_1 对各自曲率中心 Q 和 Q' 的张角. 因此,

$$dS_1 = A_1B_1 \times B_1C_1 = R_1R_1' d\theta d\phi; \tag{32}$$

同样, 对于 dS_2(通过 dS_1 的这束光线和波阵面族中另一个面所交的面元),有

$$dS_2 = A_2B_2 \times B_2C_2 = R_2R_2' d\theta d\phi. \tag{33}$$

设 l 是 dS_1 和 dS_2 之间的光线长度,则

$$R_2 = R_1 + l, \quad R_2' = R_1' + l,$$

结果

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{dS_1}{dS_2} = \frac{R_1R_1'}{R_2R_2'} = \frac{R_1R_1'}{(R_1 + l)(R_1' + l)}. \tag{34}$$

如果面元 dS_1 和 dS_2 的周界是由任意曲线组成, (34) 将依然有效. 这一点可立即看出,只要把这种面元再分成若干小面元,令每个小面元的周界由曲率线线段组成, 而后将这些小面元的贡献相加.

如 $R_1 \ll l$, $R_1' \ll l$, 则 (34) 式化为

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1R_1'}{l^2}. \tag{35}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这个公式在讨论辐射散射问题时常要用到.

两个主曲率半径之积的倒数 $1/RR'$ 叫做曲面的高斯曲率(或第二曲率). (34)式表明, 直线光线上任一点的强度系与通过该点的波阵面的高斯曲率成正比. 特别是, 如果所有(直线)光线有一公共交点, 则波阵面都是球面, 以该交点为共同球心. 这时, $R_1 = R_1'$, $R_2 = R_2'$, 我们就得到(抹去下标)平方反比定律

$$I = \frac{\text{常数}}{R^2}. \tag{36}$$

现在回到一般情况, 考虑任意一束光线 (曲线的或直线的). 我们可写出一个显式,用函数 $\mathscr{S}$ 表示出沿每条光线的强度变化. 以(22)的 $\mathbf{s}$ 代入(29), 并利用恒等式 $\operatorname{div} u\mathbf{v} = u \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^2$, 由而得到

$$\frac{I}{n}\nabla^2\mathscr{S} + \operatorname{grad}\mathscr{S}\cdot\operatorname{grad}\frac{I}{n} = 0.$$

此式又可写成

$$\nabla^2\mathscr{S} + \operatorname{grad}\mathscr{S}\cdot\operatorname{grad}\log\frac{I}{n} = 0. \tag{37}$$

现在让我们引入算符

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \operatorname{grad}\mathscr{S}\cdot\operatorname{grad}, \tag{38}$$

式中 τ 是一个参量,它确定光线上各点的位置. 于是(37)式可写成为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{I}{n} = -\nabla^2\mathscr{S}.$$

由此进行积分,得到

$$I = n e^{-\int^{\tau}\nabla^2\mathscr{S}d\tau}.$$

但是由(38)、(15)和(25)式可知

$$d\tau = \frac{d\mathscr{S}}{(\operatorname{grad}\mathscr{S})^2} = \frac{1}{n^2}d\mathscr{S} = \frac{1}{n}ds, \tag{39}$$

所以,最后得到一条光线上任意两点的强度之比如下:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{n_2}{n_1}e^{-\int_{\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_2}\frac{\nabla^2\mathcal{S}}{n^2}d\mathcal{S}}=\frac{n_2}{n_1}e^{-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\nabla^2\mathcal{S}}{n^2}ds}, \tag{40}$$

式中积分是沿这光线来取的[1].

§ 3.1.3 振幅矢量的传播

我们已经看到，当波长足够小时，能量的传输可用一个简单的流体动力学模型来代表，而这个模型又可完全用实标函数$\mathcal{S}$来描写，函数$\mathcal{S}$则是程函方程(15)的解．几何光学，按照它的传统词义，就是指这种近似的能量传播图象，它只采用了光线和波阵面的概念．换句话说，偏振性质未包括在内．之所以有此限制，无疑是由于这一事实，即关于光线和波阵面的简单几何光学定律，人们早在光的电磁理论建立之前，就由实验得知了．然而，可以(而且从我们的观点来看，这也十分自然)把几何光学的含意加以扩大，以便把有关“振幅矢量”$\boldsymbol{e}$和$\boldsymbol{h}$传播的某些几何定律也包括进来．这些定律很容易从波动方程(16)—(17)导出．

因$\mathcal{S}$满足程函方程，故$\mathbf{K}=0$，可见当k_0足够大(λ_0足够小)时，(16)和(17)两式中只需保留$\mathbf{L}$项．因此，在这一近似下，振幅矢量和程函通过关系式$\mathbf{L}=0$相联系．如果再采用(38)式所引入的算符$\partial/\partial\tau$，则方程$\mathbf{L}=0$变成

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathcal{S}-\frac{\partial\log\mu}{\partial\tau}\right)\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\log n)\operatorname{grad}\mathcal{S}=0, \tag{41}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathcal{S}-\frac{\partial\log\varepsilon}{\partial\tau}\right)\boldsymbol{h}+(\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}\log n)\operatorname{grad}\mathcal{S}=0. \tag{42}$$

这些就是所求的振幅输运方程，它们决定$\boldsymbol{e}$和$\boldsymbol{h}$沿每条光线的变化．下面我们分别来考查这些矢量的大小变化和方向变化，这样能够对这些方程的含意得到最好的了解．

---

1) M. Kline 曾经证明，强度比(40)可以用另一个包含相关波阵面主曲率半径的积分来表出，见 M. Kline, *Comm. Pure and Appl. Maths.*, **14** (1961), 473. Kline 的公式是公式(34)对非均匀媒质的自然推广．亦见 M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965), P. 184.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

以 $\boldsymbol{e}^*$ 标乘 (41) 式，将所得方程和其复共轭方程相加，由而得到

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*)+\left(\nabla^2\mathscr{S}-\frac{\partial\log\mu}{\partial\tau}\right)\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*=0. \tag{43}$$

由于恒等式 $\operatorname{div}u\mathbf{v}=u\operatorname{div}\mathbf{v}+\mathbf{v}\operatorname{grad}u$，上式圆括弧内的两项可合并如下：

$$\nabla^2\mathscr{S}-\frac{\partial\log\mu}{\partial\tau}=\nabla^2\mathscr{S}-\operatorname{grad}\mathscr{S}\cdot\operatorname{grad}\log\mu=\mu\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\mathscr{S}\right). \tag{44}$$

沿某一光线取 (43) 的积分，得到这光线上任意两点的 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*$ 之比如下[1)]：

$$\frac{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*)_2}{(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*)_1}=e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\mathscr{S}\right)d\tau}=e^{-\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\mathscr{S}\right)ds}. \tag{45}$$

同样，

$$\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}^*)_2}{(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}^*)_1}=e^{-\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\operatorname{div}\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\mathscr{S}\right)ds}. \tag{46}$$

其次，考虑复单位矢量

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*}},\quad \mathbf{v}=\frac{\boldsymbol{h}}{\sqrt{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}^*}} \tag{47}$$

沿每条光线的变化. 将 (47) 代入 (41)，得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\log(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*)}{\partial\tau}+\nabla^2\mathscr{S}-\frac{\partial\log\mu}{\partial\tau}\right]\boldsymbol{u}$$
$$+(\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\log n)\operatorname{grad}\mathscr{S}=0.$$

---

1) 此式也可写成另一形式：

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*}{\mu}\right)_2=\left(\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*}{\mu}\right)_1 e^{-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\nabla^2\mathscr{S}}{n}ds}. \tag{45a}$$

将 (43) 改写成

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\log\left(\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*}{\mu}\right)\right]=-\nabla^2\mathscr{S},$$

并沿某一光线取积分，即可得到 (45a). 事实上，(45a) 只是强度变化关系式 (40) 的另一表达形式，因为如果以

$$I=\frac{2c}{n}\langle w_e\rangle=\frac{c\varepsilon}{8\pi n}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*)$$

和麦克斯韦公式 $\varepsilon\mu=n^2$ 代入 (40)，即得到 (45a).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

方括号内诸项因(43)而为零,结果

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}=n\frac{d\mathbf{u}}{ds}=-(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\log n)\operatorname{grad}\mathscr{S},\tag{48}$$

同样,

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau}=n\frac{d\mathbf{v}}{ds}=-(\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\log n)\operatorname{grad}\mathscr{S},\tag{49}$$

这就是所求的 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 沿每条光线变化的定律[1]. 特别是,对于一个均匀媒质($n=$ 常数),(48)和(49)式化为 $d\mathbf{u}/ds=d\mathbf{v}/ds=0$,因而这时 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 沿各条光线保持不变.

最后我们指出,对均匀媒质中的时谐均匀平面波而言,$\mathscr{S}=n\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}$,并且 $\mathbf{e}$、$\mathbf{h}$、ε 和 μ 都是常数,因而(16)中 $\mathbf{K}=\mathbf{L}=\mathbf{M}=0$. 因此这种波不管频率如何,总严格遵守几何光学的各项定律.

§ 3.1.4 推广和几何光学的适用范围

前几节的讨论只适用于严格的单色场. 这种场可以看作是一任意场的某一傅里叶分量,由一个谐振子或一组频率相同的谐振子所产生.

在光学中,通常遇到的是这样的光源,它所发射的光,频率范围虽然很窄,但仍有一定的宽度. 这种光源可以看成是由频率落在这一范围的大量谐振子所组成. 要得到场中某代表点 P 处的强度,必须把各个振子(元光源)所产生的场一一相加:

$$\boldsymbol{E}=\sum_n\boldsymbol{E}_n,\quad \boldsymbol{H}=\sum_n\boldsymbol{H}_n.\tag{50}$$

---

1) 从非欧几里得几何学来看,关系式(48)和(49)有一个重要解释. 如果我们考虑相关的非欧几里得空间,其线元

$$ds'=nds=n\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

则几何光线相当于这个空间中的短程线,并且从(48)和(49)可以证明,$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 二矢量沿每条光线传递时各与其自身平行(在 Levi-Civita 平行性的意义上). 参见, F. Bortolotti, *Rend. R. Acc. Naz. Linc.*, **6a**, **4** (1926), 552; R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (mimeographed lecture notes, Brown University, Providence, R. I., 1944, p. 55—59; printed version published by University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964, p. 51—55); M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965), p. 180—183.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

于是强度(用实数表示)

$$I(P)=|\langle \boldsymbol{S}\rangle|=\frac{c}{4\pi}|\langle \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\rangle|=\frac{c}{4\pi}\left|\sum_{n,m}\langle \boldsymbol{E}_n\times\boldsymbol{H}_m\rangle\right|$$

$$=\frac{c}{4\pi}\left|\sum_{n}\langle \boldsymbol{E}_n\times\boldsymbol{H}_n\rangle+\sum_{n\neq m}\langle \boldsymbol{E}_n\times\boldsymbol{E}_m\rangle\right|. \tag{51}$$

在许多光学问题中，通常可设(51)中第二项和为零(这时我们说各个振子的场是不相干的),因而

$$I(P)=\frac{c}{4\pi}\left|\sum_{n}\langle \boldsymbol{E}_n\times\boldsymbol{H}_n\rangle\right|=\left|\sum_{n}\langle \boldsymbol{S}_n\rangle\right|, \tag{52}$$

式中 $\boldsymbol{S}_n$ 代表第 n 个元光源所属的坡印廷矢量. 目前我们不可能来讨论,在什么条件下才能略去(51)中的第二项,后面在谈到部分相干问题时(第十章)将对此给以详细说明.

设 δS 是与某一特定元光源相关联的一个波阵面的一小部分. 每一元光源各向 δS 发去一束光线,各光束的中心光线形成一个圆锥,设其立体角为 $\delta\Omega$(图 3.4). 如果这个圆锥的半对顶角足够小,则可忽略 $\boldsymbol{S}_n$ 的方向变化,(52)式即可写成

$$I(P)=\sum_{n}|\langle \boldsymbol{S}_n\rangle|=\sum_{n}I_n. \tag{53}$$

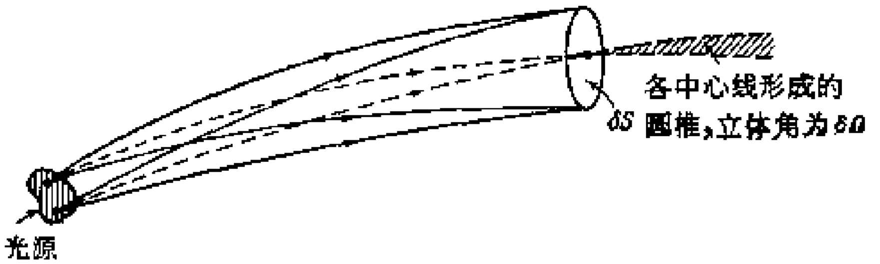


图 3.4 非相干扩展光源情况下几何光学的强度定律图示

我们可以认为元光源(振子)的数目如此之大，以致把它们作为连续分布来处理不会产生什么误差. 这时，每个元光源的贡献为无穷小,但总效应是有限的. 这时,(53)的和(积分) $I(P)$ 与 $\delta\Omega$ 成正比:

$$I(P)=B\delta\Omega,$$

而每单位时间内通过面元 δS 的总能通量(取时间平均)

$$\delta F=B\delta\Omega\delta S. \tag{54}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这个公式在光度学里是很重要的，我们后面将要用到它.

现在我们必须简单谈谈几何光学的适用范围. 在推导程函方程时，我们曾假设(11)、(12)两式右边的项可以忽略. 假定 ε、μ 和 $|\text{grad}\mathscr{S}|$ 这三个无因次量都在 1 左右，则可看出，只要在线度为波长量级的区域内，$\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 改变的大小比 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的大小小得多，这种忽略就是合理的. 但这个条件在某些地区，例如在阴影边界处是不成立的，因为这种边界两边强度变化很大，因而 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 变化也很大. 在强度分布形成很锐极大的那些点附近(例如，在焦点处，见 § 8.8)，同样可以预期几何光学不能正确描述场的特性.

在推导复振幅矢量 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的输运方程时，我们曾假定$\mathscr{S}$满足程函方程，并且 $\lambda_0|\mathbf{M}(\boldsymbol{e},\varepsilon,\mu)|$ 和 $\lambda_0|\mathbf{M}(\boldsymbol{h},\mu,\varepsilon)|$ 分别比 $|\mathbf{L}(\boldsymbol{e},\mathscr{S},n,\mu)|$ 和 $|\mathbf{L}(\boldsymbol{h},\mathscr{S},n,\varepsilon)|$ 小得多. 这就不仅要求对 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的一阶微商，而且还要求对它们的二阶微商加上某些限制. 这些条件颇为复杂，此处不拟加以研究.

当然，可以在场矢量展开式(18)中保留一些高次项，以获得更高级近似[1]. 然而，在仪器光学问题中，这样做的实际好处是有疑问的，因为离特殊地区越近，须包括的项就越多，而在特别重要的那些点(例如，焦点或焦散面)，这些展开式通常完全失效. 研究这种地区的强度分布，更行之有效的方法将在衍射各章中加以讨论.

最后，我们着重指出，几何光学模型的简单性基本上出自这一事实，即场的局部行为一般来说象一个平面波. 在光学波长范围，简单几何模型不适用的那种地区只是少数例外. 事实上，对于大

---

1) J. B. Keller [*J. Appl. Phys.*, **28** (1957), 426; 又 *Calculus of Variations and its Application*, ed. L. M. Graves (New York, McGraw-Hill, 1958), 27] 曾经提出，高次项所代表的贡献，其特性可借助另一模型来加以研究，这个模型是普通几何光学模型的推广. 这一理论引入了衍射光线的概念，这种光线服从推广的费马原理. 每一条衍射光线各以一个适当的场与之相关联，并假定这个场满足几何光学场所遵守的各项传播定律. 关于这理论的某些应用，在下列论文中有所介绍: J. B. Keller, *Trans. Inst. Radio Eng.*, A.P.—**4** (1956), 312; J.B. Keller, R. M. Lewis and B. D. Seckler, *J. Appl. Phys.*, **28** (1957), 570. 亦见 M. Kline and I W. Kay, *loc. cit.*

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

多数光学问题来说，几何光学至少能给更精细的探讨提供一个很好的起点．

§ 3.2 光线的一般性质

§ 3.2.1 光线的微分方程

前面我们把光线定义为几何波阵面$\mathscr{S}(x,y,z)=$常数的正交轨线．并且我们看到，如果 $\mathbf{r}$ 是一条光线上某代表点的位置矢量，s 是从它上面某固定点量起时光线的长度，则

$$n\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\operatorname{grad}\mathscr{S}. \tag{1}$$

这个方程用函数$\mathscr{S}$确定光线，但是从这个方程很容易推导出另一个微分方程，它直接用折射率函数 $n(\mathbf{r})$ 来确定光线．

取（1）对 s 的微商，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)&=\frac{d}{ds}(\operatorname{grad}\mathscr{S})\\&=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\mathscr{S})\\&=\frac{1}{n}\operatorname{grad}\mathscr{S}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\mathscr{S})(\text{由}(1))\\&=\frac{1}{2n}\operatorname{grad}[(\operatorname{grad}\mathscr{S})^2]\\&=\frac{1}{2n}\operatorname{grad}\ n^2,(\text{由 § 3.1(15)})\end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=\operatorname{grad}\ n. \tag{2}$$

这是矢量形式的光线微分方程．特别来说，在**一均匀媒质**中，$n=$常数，则（2）式化为

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=0,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此

$$\boldsymbol{r} = s\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是常数矢量. (3)式是一个矢量直线方程,这直线沿着矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向并通过 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}$ 点. 因此在均匀媒质中，光线的形状是直线.

作为一个颇有意义的例子，我们来看看球面对称媒质中的光线形状. 所谓球面对称,就是指媒质各点的折射率仅仅依赖于各点到某固定点 O 的距离 r:

$$n = n(r). \tag{4}$$

实际上地球大气就近似这种情况，如果把地球的曲率考虑进来的话.

考虑矢量 $\boldsymbol{r} \times [n(r)\boldsymbol{s}]$ 沿光线的变化,有

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{r} \times n\boldsymbol{s}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times n\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \times \frac{d}{ds}(n\boldsymbol{s}). \tag{5}$$

因 $d\boldsymbol{r}/ds = \boldsymbol{s}$，故右边第一项为零. 第二项由于(2)可写成 $\boldsymbol{r} \times \mathrm{grad}\, n$. 但由(4),

$$\mathrm{grad}\, n = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{dn}{dr},$$

因而(5)式右边第二项也为零. 因此

$$\boldsymbol{r} \times n\boldsymbol{s} = \text{常数}. \tag{6}$$

这个关系式意味着,所有光线都是平面曲线,各处在通过原点的某一平面上,并且沿每条光线,

$$nr \sin\phi = \text{常数}, \tag{7}$$

式中 ϕ 是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和光线上 $\boldsymbol{r}$ 点处切线的夹角(见图3.5). 因为 $r \sin\phi$ 代表从原点到该切线的垂直距离 d,故(7)式也可写成

$$nd = \text{常数}. \tag{8}$$

这个关系有时叫做布给(Bouguer)公式,它和动力学中著名的角动量守恒公式(一个质点在中心力场中运动时角动量守恒)形式类似.

为获得球面对称媒质中光线的显表达式，我们回顾一下在初等几何中,如果 (r, θ) 是一平面曲线的极坐标,则曲线上某点 P 的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

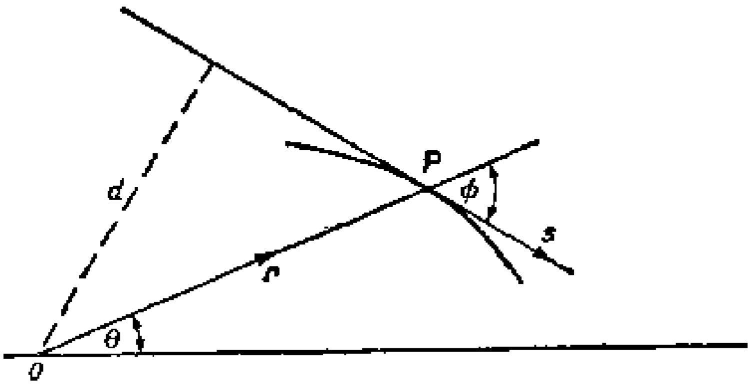


图 3.5 球面对称媒质中光线的博格公式 nd = 常数图示.

径矢与 P 点切线的夹角 ϕ 由下式给出[1]:

$$\sin\phi=\frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta)+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}. \tag{9}$$

由 (7) 和 (9),

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r}{c}\sqrt{n^2r^2-c^2}, \tag{10}$$

式中 c 为一常数. 因此,球面对称媒质中的光线方程可写成如下形式:

$$\theta=c\int^r\frac{dr}{r\sqrt{n^2r^2-c^2}}. \tag{11}$$

现在让我们回到一般情况,考虑一条光线的曲率矢量,即矢量

$$\boldsymbol{K}=\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}, \tag{12}$$

它的大小 $1/\rho$ 是曲率半径的倒数; $\boldsymbol{\nu}$ 是光线上某代表点处的单位主法线.

由 (2) 和 (12) 可以得到

$$n\boldsymbol{K}=\text{grad}\ n-\frac{dn}{ds}\boldsymbol{s}. \tag{13}$$

此式表明,折射率梯度矢量位于光线的密切平面上.

---

1) 例如,见 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. I (Glasgow, Blackie, 2nd edition, 1942), p. 265.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如以 $\boldsymbol{K}$ 标乘(13)式并应用(12)式,则可得到

$$|\boldsymbol{K}| = \frac{1}{\rho} = \boldsymbol{\nu} \cdot \operatorname{grad} \log n. \tag{14}$$

因 ρ 总是正的,故此式表示当我们沿主法线前进时,折射率是增大的,即光线弯向折射率高的一边(图 3.6).

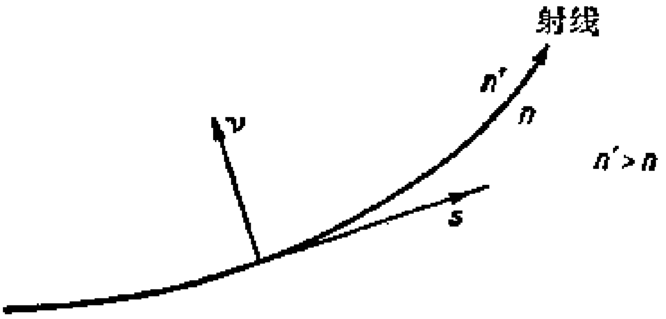


图 3.6 非均匀媒质中光线的弯曲

§ 3.2.2 折射定律和反射定律

前面我们一直假定,折射率函数 n 是连续的. 现在我们必须讨论光线通过折射率不同的两个均匀媒质的分界面时的行径. § 1.1.3 曾经推导了关于场矢量通过突变面时变化的边界条件. 索末菲和朗格(J. Runge)指出(见前引文献),用与此类似的论证很容易确定出相应的光线行径.

由(1)利用恒等式 curl grad $=0$ 可以得到,矢量 $n\boldsymbol{s}=nd\boldsymbol{r}/ds$(有时称为光线矢量)满足关系式

$$\operatorname{curl} n\boldsymbol{s} = 0. \tag{15}$$

象 § 1.1.3 中一样,我们用一过渡层代替突变面 T,在这个过渡层中,ε、μ 和 n 迅速而又连续地从它们靠 T 这边的值改变到它们靠 T 那边的值. 然后,我们取一个平面元面积,令其 P_1Q_1、P_2Q_2 二边平行于 T,P_1P_2、Q_1Q_2 二边垂直于 T(图 3.7). 设 $\boldsymbol{b}$ 代表此元面积的单位法线,并对此面积取(15)的积分,再应用斯托克斯定理,则有

$$\int (\operatorname{curl} n\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{b}\, dS = \int n\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{r} = 0, \tag{16}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

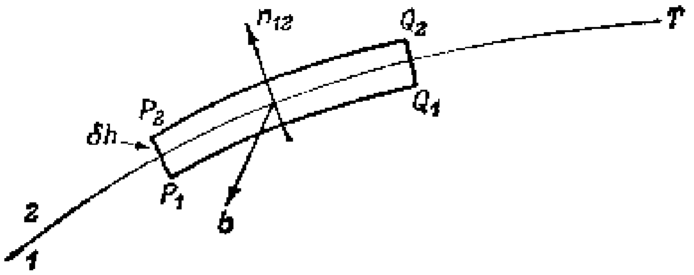


图 3.7 折射定律和反射定律的推导

第二个积分沿边界曲线 $P_1Q_1Q_2P_2$. 和推导 § 1.1(23) 式时做法完全相似，过渡到极限，令高度 $\delta h\to 0$，由而得到

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(n_2\boldsymbol{s}_2-n_1\boldsymbol{s}_1)=0, \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是界面的单位法线，由第一媒质指向第二媒质. (17) 式意指，光线矢量 $n\boldsymbol{s}$ 在通过界面时其切线分量是连续的，换句话说，即矢量 $\boldsymbol{N}=n_2\boldsymbol{s}_2-n_1\boldsymbol{s}_1$ 垂直于界面.

设 θ_1 和 θ_2 分别代表入射光线和折射光线与界面法线 $\boldsymbol{n}_{12}$ 的夹角（见图 3.8a). 由 (17) 得到

$$n_2(\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{s}_2)=n_1(\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{s}_1), \tag{18}$$

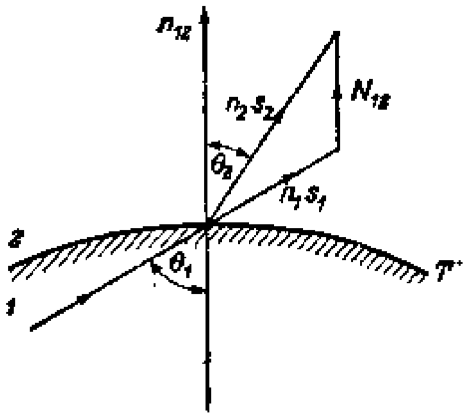


图 3.8(a) 折射定律图示

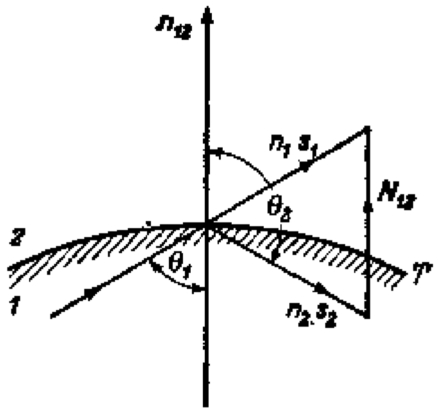


图 3.8(b) 反射定律图示

因而

$$n_2\sin\theta_2=n_1\sin\theta_1. \tag{19}$$

(18)式意指，折射光线位于入射光线和界面法线所在的平面(入射面)上，而 (19) 式表明，折射角的正弦与入射角的正弦之比等于二折射率之比 n_1/n_2. 这两个结果表达了折射定律(斯涅耳定律). 这

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

个定律我们已在§1.5中就平面波这一特殊情况作过推导。但那时讨论的是一个波长任意的平面波射到一个平的折射面上，而这里的分析可应用于形状更一般的波和折射面，只要波长足够小($\lambda_0 \to 0$)。这一条件意味着，在实用上，入射波和界面的曲率半径都必须比入射光的波长大得多。

和§1.5所处理的情况一样，我们还须预期将有另一个波——反射波传播回到第一媒质中。令(18)和(19)中的 $n_1 = n_2$(见图3.8b)，结果得到，反射光线在入射面上，并且 $\sin\theta_2 = \sin\theta_1$；因此

$$\theta_2 = \pi - \theta_1. \tag{20}$$

最后两个结果表达了反射定律。

§3.2.3 光线汇和它们的焦点特性

在各向同性媒质中，所有能实现的光线系统都要满足关系式(15)，即

$$\operatorname{curl} n\boldsymbol{s} = 0, \tag{21}$$

它们以此与其他更一般的曲线族相区别。在均匀各向同性媒质中，n 是常数，因而(21)式化为

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{s} = 0. \tag{22}$$

在非均匀各向同性媒质中，光线也可用一个与 n 无关的关系式来表征。将(21)式按恒等式 $\operatorname{curl} n\boldsymbol{s} = n \operatorname{curl} \boldsymbol{s} \times (\operatorname{grad} n) \times \boldsymbol{s}$ 展开，并以 $\boldsymbol{s}$ 标乘两边，即可得之。因此，在任何各向同性媒质中，光线系统必须满足

$$\boldsymbol{s} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{s} = 0. \tag{23}$$

一个曲线系统，如果在它所分布的那部分空间中每点一般只有一条曲线通过，这曲线系统就叫做线汇。如果还存在一个面族，与线汇中每条曲线相正交，这线汇就称为法线汇；如果不存在这种面族，就称之为斜线汇。对普通几何光学(光传播)来说，只有法线汇具有重要性，但是在电子光学(见附录2)中，斜线汇也起着重要作用。

如果线汇的每条曲线都是直线，则称之为直线汇；(23)和(22)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式分别是曲线为法线汇和法直线汇的必要而且充分的条件[1].

让我们在某一正交曲面 ($\mathscr{S}(x, y, z)$ = 常数) 上选择一组曲线坐标线 u, v. 对于这曲面上每一点 $Q(u, v)$, 线汇中都有一条曲线与之对应, 这就是和 $\mathscr{S}$ 相交于 Q 点的那条曲线. 设 $\boldsymbol{r}$ 代表这曲线上某点 P 的位置坐标, 则 $\boldsymbol{r}$ 可看作是坐标 (u, v) 和 Q、P 间曲线弧长 s 的函数 (图 3.9).

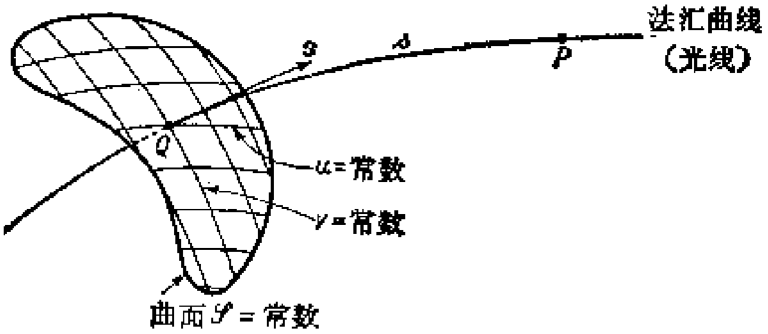


图 3.9 关于法线汇的符号

考虑线汇中近邻的两条曲线, 它们分别通过 $\mathscr{S}$ 上的 (u, v) 点和 $(u+du, v+dv)$ 点, 并来考查这两条曲线上是否具有相距为二级小或更高级小的点(人们说曲线在这种点是一级切割的). 这种性质的点叫做焦点, 它们必须在一级程度上满足方程

$$\boldsymbol{r}(u, v, s) = \boldsymbol{r}(u+du, v+dv, s+ds). \tag{24}$$

将 (24) 式展开, 得到

$$\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv + \boldsymbol{s} ds = 0, \tag{25}$$

式中 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 是对 u、v 的偏微商. 条件 (25) 表示, $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$ 和 $\boldsymbol{s}$ 应该是三个共面矢量. 这就是说, 这三个矢量的成标三重积为零, 即

$$[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{s}] = 0. \tag{26}$$

在给定的一条曲线 (u, v) 上, 焦点的个数取决于满足 (26) 式的 s 值的数目. 设 $\boldsymbol{r}$ 是 s 的 m 次多项式, 则因 $\boldsymbol{s} = d\boldsymbol{r}/ds$, 可见 (26) 是 s 的 $3m-1$ 次方程. 特别来说, 当线汇是直线汇时, $\boldsymbol{r}$ 是 s 的线性函数 $(m=1)$, 这表明直线汇的每条光线有二个焦点.

---

1) 关于曲线线汇, 更详细的讨论可见 C. E. Weatherburn, *Differential Geometry of Three Dimensions* (Cambridge University Press), Vol. I (1927), Chapter X; Vol. II (1930), Chapter XIII.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果 u 和 v 取所有可能值，则焦点将描绘出一个曲面，由(26)式代表，称为焦面；在光学中，它叫做焦散面．线汇的任一曲线在它各个焦点处与焦面相切．焦面上任何一点的切面称为焦平面．

我们将主要研究均匀媒质中的光线，即直线汇．这种线汇的某些其它性质将在§4.6和象散光线锥问题结合起来讨论．

§3.3 几何光学的其它基本定理

现在我们借助前几节所建立的各个关系式来推导有关光线和波阵面的一些定理．

§3.3.1 拉格朗日积分不变式

先假定折射率 n 是位置的连续函数．象§3.2(16)式的做法一样，对任一开曲面取 curl $n\mathbf{s}$ 法线分量的积分，并应用斯托克斯定理，由而得到

$$\oint n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r}=0, \tag{1}$$

式中积分环绕曲面的闭合边界曲线 C．(1)式称为拉格朗日积分不变式[1]，它意指场中任意两点 P_1、P_2 之间的积分

$$\int_{P_1}^{P_2} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} \tag{2}$$

与积分路线无关．

借助折射定律很容易证明，当曲线 C 从折射率不同的两个均匀媒质的分界面上穿过时，(1)式也仍然成立．为证明此点，设 C_1 和 C_2 是曲线 C 在折射面 T 两边的部分（图3.10)，并用折射面 T 上另一条曲线 K 把 C 同面 T 的两个交点连接起来．分别对迴路 C_1K 和 C_2K 取积分(1)式，而后相加，结果得到

1) 有时叫做邦加不变式．事实上，它只是邦加所讨论的更普遍得多的积分不变式的一维特殊情况．邦加的讨论见其所作 *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, **3** (Paris, Gauthier-Villars, 1899). 参见 E. Cartan, *Leçons sur les Invariants Integraux* (Paris, Hermann, 1922). 亦见本书附录1，方程(65)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

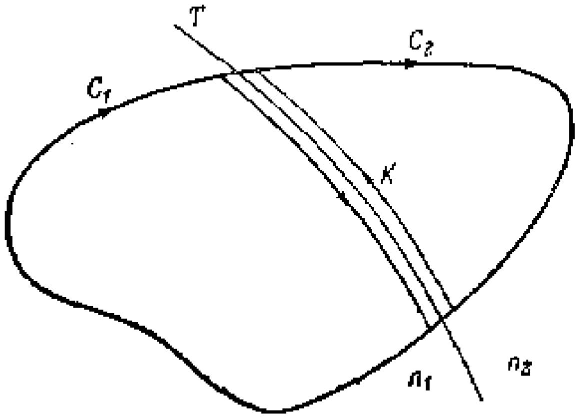


图 3.10 当存在折射率突变面时拉格朗日积分不变式的推导

$$\int_{C_1} n_1 \boldsymbol{s}_1 \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} n_2 \boldsymbol{s}_2 \cdot d\boldsymbol{r} + \int_K (n_2 \boldsymbol{s}_2 - n_1 \boldsymbol{s}_1) \cdot d\boldsymbol{r} = 0. \quad (3)$$

沿 K 的那个积分为零，因为按照折射定律，矢量 $\boldsymbol{N} = n_1\boldsymbol{s}_1 - n_2\boldsymbol{s}_2$ 在 K 上每一点都垂直于面 T，结果(3)式化为(1)式.

§3.3.2 费马原理

费马原理通常又叫做最短光程原理[1]. 这一原理说道：一条实际光线在任何两点 P_1 和 P_2 之间的光学长度

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (4)$$

比连接这两点的任何其它曲线的光学长度都要短，这些比较曲线应该在属于这光线的某正则邻域内. 所谓正则邻域，是指可以被光线这样覆盖的一个邻域，其中每一点有一条(也只有一条)光线通过. 例如，在点源 P_1 周围，在没有光线因折射或反射，或弯曲而相互交叉的区域，就形成这种覆盖.

在证明这一定理之前可提及一点，即费马原理可表述成一种较弱的、但适用范围更广的形式. 按照这个表述，实际光线和其他

1) 由 §3.1(27)式，

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = C \int_{P_1}^{P_2} dt,$$

因此它又称为最小时间原理.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

曲线(不再限制处于正则邻域)的区别在于其积分是一个稳定值[1]。

为证明费马原理，我们取一光线锥，并将光线 $\bar{C}$ 的 P_1P_2 段与连接 P_1、P_2 的任一其它曲线 C 进行比较(图 3.11)。设光锥的二个近邻正交轨线(波阵面)与曲线 C 相交于 Q_1 和 Q_2，与光线 $\bar{C}$ 相交于 $\bar{Q}_1$ 和 $\bar{Q}_2$。此外，设 Q_2' 是轨线 $Q_2\bar{Q}_2$ 与通过 Q_1 的那条光线 $\bar{C}'$ 的交点。

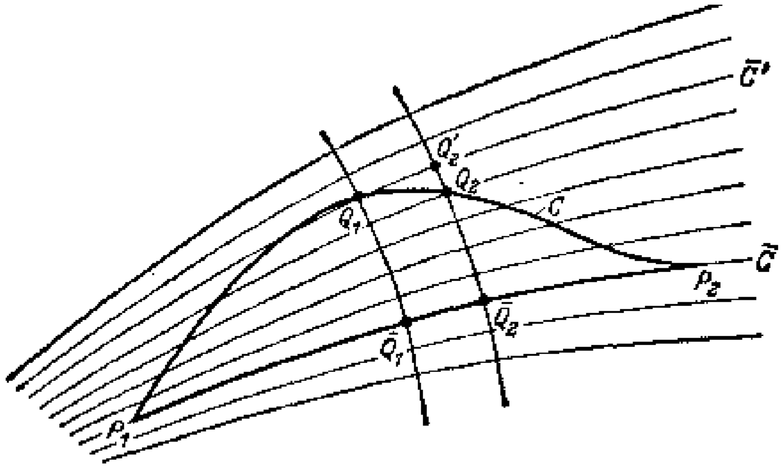


图 3.11　费马原理图示

对小三角形 $Q_1Q_2Q_2'$ 应用拉格朗日积分关系式，有

$$(n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r})_{Q_1Q_2}+(n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r})_{Q_2Q_2'}-(nds)_{Q_1Q_2'}=0. \qquad (5)$$

由标积定义可知

$$(n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r})_{Q_1Q_2}\leqslant(nds)_{Q_1Q_2}.$$

再者，由于 $\mathbf{s}$ 和波阵面上的 $d\mathbf{r}$ 相垂直，因而

$$(n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r})_{Q_2Q_2'}=0.$$

又因 Q_1, Q_2' 和 $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ 分别是二波阵面上的对应点，故由§ 3.1(25)可知

$$(nds)_{Q_1Q_2'}=(nds)_{\bar{Q}_1\bar{Q}_2}.$$

---

1) 要得到积分具有稳定值的曲线，一般须用附录 I 中所介绍的变分法。该处证明，这种曲线满足欧勒微分方程(附录 I(7)式)。在本章情况下，这些方程就是光线方程§ 3.2(2)式，如附录 I§11 所证。

C. Carathéodory (见前引文献)曾经强调，这稳定值决不是一个真的极大。因此，在费马原理的弱表述中，说稳定值而不说极值是合适的。相反，极小的表述则相当于雅科毕意义上的"强极小"(附录 I，§ 10)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

将上列三式代入(5)，得到

$$(nds)_{\bar{Q}_1\bar{Q}_2} \leqslant (nds)_{Q_1Q_2}, \tag{6}$$

经积分后，有

$$\int_{\bar{C}} nds \leqslant \int_C nds. \tag{7}$$

式中等号只有当 C 上每一点 $\boldsymbol{s}$ 和 $d\boldsymbol{r}$ 的方向都重合时才能成立，即要求比较曲线是一条实在光线．但这一情况已被排除，因为我们假定邻域中任一点最多只有一条光线通过．因此光线的光学长度小于比较曲线的光学长度，这就是费马原理．

很容易看出，当不满足正则条件时，光线的光学长度就可能不再是一个极小．例如，在均匀媒质中一个点源 P_1 经平面镜反射所产生的光线场(图 3.12)．这时每一点 P_2 有两条光线通过；直接光线 P_1P_2 的光学长度是一个绝对极小，而反射光线 P_1MP_2 只有同它附近某有限邻域中的曲线相比，其光学长度才是一个极小．一般来说，当点源 P_1 的光线在均匀媒质边界上受到折射或反射时，正则邻域将止于各光线所形成的包络面(焦散面)处．点源 P_1 的某条光线与包络面切触之点 P_1'，叫做这光线上 P_1 的**共轭点**．要光线

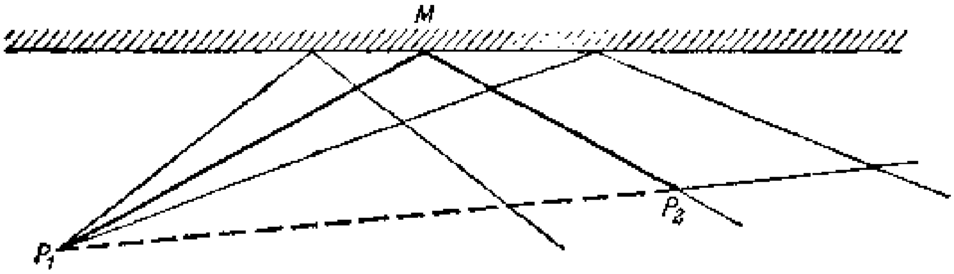


图 3.12　点源的光经平面镜反射所产生的光线场

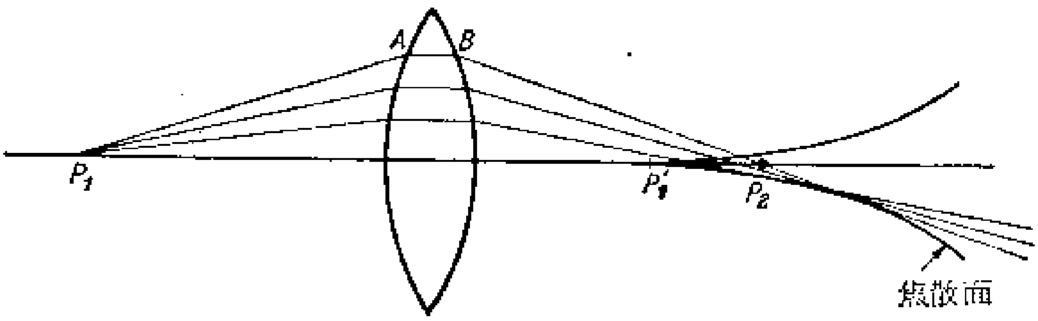


图 3.13　轴上点源的光线经一透镜后所形成的焦散面

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

P_1P_2 的光学长度是极小，P_2 必须在 P_1 和 P_1' 之间，即 P_1 和 P_2 必须在焦散面同侧．例如，拿一个未校正的透镜来说（图 3.13），从 P_1 发出的中央光线只有在焦散面尖顶点 (P_1')（P_1 的高斯象）之前，其光学长度才具有极小性质．对包络面后面的任何点 P_2 来说，直路 $P_1P_1'P_2$ 的光学长度大于折路 P_1ABP_2 的光学长度．

§ 3.3.3 马吕斯 (Malus) 和杜平 (Dupin) 定理和一些有关定理

前面我们把光线定义为波面 $\mathscr{S}(x, y, z)$＝常数的正交轨线，$\mathscr{S}$ 则是程函方程 § 3.1(15) 式的解．当几何光学的各项定律须由麦克斯韦方程导出时，这种引进光线的方法是很自然的．然而，在历史上，作为光线理论的几何光学，是在不同的光线定义上来发展的．那时，光线被定义为线积分 $\int nds$ 具有稳定值的曲线．在这种表述下，几何光学就可以完全沿着变分法的轨道来发展[1]．

变分方法的分析十分重要，因为这种分析常常揭示出物理学不同学科之间的类似．特别来说，几何光学就和运动质点力学有密切的类似；这一点已由哈密顿的著名研究探讨得很清楚了．哈密顿的研究在近代物理学上，特别是在应用到德布罗意波动力学上，显示了巨大价值．为了不致打断这里的光学讨论，我们另辟几节（附录 1、2）去叙述变分学的有关部分和哈密顿类似．这里我们只来证明，如何从拉格朗日积分不变式推导出在几何光学发展中起

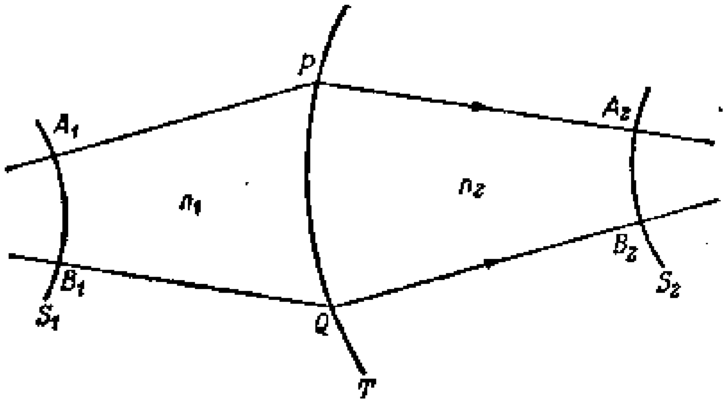


图 3.14 马吕斯和杜平定理图示

1) 关于这种处理，系统的论述可见 C. Carathéodory 著作（见前引文献）．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

过重要作用的几个定理.

考虑均匀媒质中的一组光线：如果它们具有一个共同的交点，例如当它们发自一个点源时，我们就说它们形成一个**共心光锥**. 这种光锥构成一个法线汇，因为以共同交点为中心的球面与此光锥的各条光线都是正交的. 1808 年，马吕斯[1] 证明，直线光线的共心光锥经曲面折射或反射后，所产生的光锥(一般不再是共心光锥)将仍旧构成一法线汇. 后来，杜平(1816)，奎特勒特(Quetelet, 1825)和格戈恩(J. D. Gergonne, 1825)推广了马吕斯的结果. 这些研究导致下列定理，有时称为**马吕斯和杜平定理：一法直线汇经任意次折射或反射后仍然是一法线汇**[2].

我们只要对单次折射证明这定理成立就足够了. 设二均匀媒质以曲面 T 为界，折射率各为 n_1 和 n_2(图 3.14)，并设媒质(n_1)中有一束法直线汇的光线在界面 T 上受到折射.

设 S_1 是第一区域中的某一正交轨面(波阵面)，A_1 和 P 是第一媒质中某代表光线与 S_1 和 T 的交点，并设 A_2 是折射光线上的任一点. 如果 A_1 点移到波阵面上另一点 B_1，则 P 点将移到折射面上另一点 Q. 现在在过 Q 点的折射光线上取一点 B_2，使得 B_1 到 B_2 的光程等于 A_1 到 A_2 的光程：

$$[A_1PA_2] = [B_1QB_2]. \tag{8}$$

当 B_1 点在波阵面 S_1 上取所有可能位置时，B_2 点将描绘出一曲面 S_2. 现在来证明折射光线 QB_2 垂直于这一曲面.

将拉格朗日积分不变式应用到闭合路线 $A_1PA_2B_2QB_1A_1$，结果

$$\int_{A_1PA_2} n\,ds + \int_{A_2B_2} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} + \int_{B_2QB_1} n\,ds + \int_{B_1A} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{9}$$

---

1) E. Malus, Optique Dioptrique, *J. École polytechn.*, 7 (1808), 1—44, 84—129. 又见其光学论文 ["Traité d'optique", *Mém. Présent. à l'Institut par divers savants*, 2 (1811), 214—302]. 关于马吕斯-杜平定理的参考资料以及对其有趣历史的介绍，可见哈密顿数学论文集1(几何光学)[*Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, 1 (Geometrical Optics), edited by A. W. Conway and J. L. Synge (Cambridge University Press, 1931), p. 463].

2) T. Levi-Civita *Rend. R. Acc. Naz. Linc.*, 9 (1900), 237 建立了下列逆定理：一般地说，两个法直线汇可以经单次折射或单次反射而相互转换.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由(8),

$$\int_{A_1PA_2} nds + \int_{B_2QB_1} nds = 0. \tag{10}$$

此外,因为在 S_1 上单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 处处和 S_1 正交,故

$$\int_{B_1A_1} n\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{r} = 0, \tag{11}$$

因而(9)式化为

$$\int_{A_2B_2} n\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{12}$$

这个关系式对 S_2 上每条曲线都须成立. 这只有当 S_2 的每一线元 $d\boldsymbol{r}$ 都满足 $\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{r}=0$ 时才有可能,即要求折射光线和曲面 S_2 正交;换句话说,各折射光线应形成一法线汇. 反射情况的证明与此完全类似.

由于 $[A_1PA_2]=[B_1QB_2]$,所以,在法线汇光线的任何两个正交曲面(波阵面)之间,所有光线的光程长度都相等. 显然,这一结果在接连多次折射或反射情况下也仍然成立,并且由 § 3.1(26)式可立即看出,它也适用于折射率连续改变的媒质中的光线.这个定理称为等光程原理;它意味着,一束法线汇光线,或由接连多次折射或反射产生的若干束法线汇光线,其各正交轨面(几何波阵面)是相互“光学平行的”(见附录 1).

另一有关的定理首先由惠更斯[1]提出,这个定理说道:一个波阵面的每个面元可各看作是一个产生球面子波的次级扰动中心;而且,以后任何时刻波阵面的位置是所有这种子波的包络面. 这个结果基本上是“光学平行”面的一个作图法则,所以有时叫做惠更斯作图法. 如果媒质是均匀的,作图时即可采用有限半径的子波,不然的话,就必须分成无穷小,一步步来做.

惠更斯定理后来由菲涅耳加以扩充,表述成所谓惠更斯-菲涅耳原理,它在衍射理论中极为重要(见§ 8.2),可以认为是光的波动理论的基本假设.

1) Traité de la Lumière (Leyden, 1690);由 S. P. Thompson 译成英文 (*Treatise on Light*, London, Macmillan & Co., 1912).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第四章　光学成象的几何理论

§ 4.1　哈密顿特征函数

在 § 3.1 中已经指出，在几何光学近似范围内，场可用单一的标量函数$\mathscr{S}(\mathbf{r})$来表征. 因为$\mathscr{S}(\mathbf{r})$满足 § 3.1 中的程函方程(15)，所以这个函数只用折射率函数 $n(\mathbf{r})$ 以及适当的边界条件就完全确定了.

通常不用函数$\mathscr{S}(\mathbf{r})$，而用一些与它有密切关系的函数，即通常所说的媒质**特征函数**. 它们早已由哈密顿的一系列经典性论文[1]引进光学中了. 虽然由于代数的复杂性，除了那些最简单的媒质外，均不可能明显确定其特征函数，但对于系统地分析研究光学系统的一般性质来说，哈密顿方法仍可作为一种很有力的工具.

在讨论这些函数的性质及其应用时，将假定媒质是各向同性的，但一般是非均匀的.

---

1) W. R. Hamilton, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **15**(1828), 69; *ibid.*, **16** (1830), 1; *ibid.*, **16** (1831), 93; *ibid.*, **17** (1837), 1. 重印于 *The Mathematical Papers of Sir W. R. Hamilton*, Vol. *I* (*Geometrical Optics*), edited by A. W. Conway and J. L. Synge (Cambridge University Press, 1931).

许多年以后，Bruns 独立地研究了一些类似的函数，他称之为**程函**. [H. Bruns, *Abh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss., math-phys. Kl.*, **21** (1895),323]. 第153页已经提到，而今这个名词已在更广的意义上来使用了. 哈密顿特征函数本身就常称为程函.

J. L. Synge 的专著，*Geometrical Optics* (Cambridge University Press, 1937)，是一本关于哈密顿方法的有用入门书. 哈密顿的工作和 Bruns 的工作之间的关系已经讨论过了，见 F. Klein, *Z. Math. Phys.*, **46** (1901), 376, 和 *Ges. Math. Abh.*, **2** (1922), 603, C. Carathéodory, *Geometrische Optik* (Berlin, Springer, 1937), p.4, 以及 M. Herzberger 和 J. L. Synge 之间的一次争论, *J. Opt. Soc. Amer.*, **27** (1937), 75, 133, 138.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 4.1.1 点特征函数

设 (x_0, y_0, z_0) 和 (x_1, y_1, z_1) 分别是 P_0 和 P_1 两点的坐标，各以一套不同的直角坐标轴为参考系，两套轴互相平行[1]（图 4.1）。设想这两点被所有可能的曲线连接起来，一般地说，其中会有一些线(光线)满足费马原理。现在假定，任意两点被不多于一条光线连接起来。则特征函数 V，即点特征函数，定义为这两点之间光线的光学长度 $[P_0P_1]$，作为这两点坐标的函数，

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = \int_{P_0}^{P_1} n ds. \tag{1}$$

重要的是，要注意到这个函数是由媒质确定的。

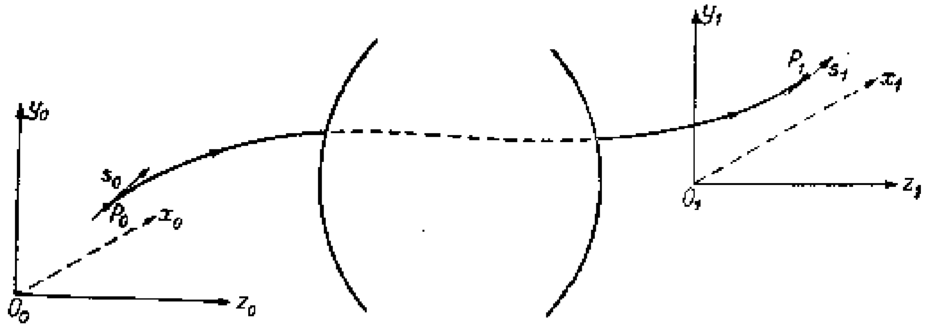


图 4.1 点特征函数定义的图示

由(1)和 § 3.1(26)式得出，

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = \mathscr{S}(x_1, y_1, z_1) - \mathscr{S}(x_0, y_0, z_0), \tag{2}$$

式中的函数 $\mathscr{S}$ 这时与通过 P_0 和 P_1 的自然光线所属的任一光线锥相联系[例如，一个在 P_0 处的点光源所产生的一锥光线[2]]。因此，利用 § 3.1(24)式，在 P_0 和 P_1 处沿着光线方向的单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 和 $\mathbf{s}_1$ 由下式给出：

---

1) 使用两套参考系，具有一些优点，因为 P_0 和 P_1 通常位于一个光学系统的不同区域，即分别位于它的物空间和象空间。

2) 用变分法的数学语言来说，$\mathscr{S}$ 代表与费马变分问题相联系的哈密顿-雅科毕方程的解，它包含一个二参数的极值曲线族 (∞^2)。点特征函数 V 代表一般解，它包含全部 (∞^4) 极值曲线(参看附录 1)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}^0 V &= -n_0 \mathbf{s}_0, \\ \mathrm{grad}^1 V &= n_1 \mathbf{s}_1, \end{aligned} \tag{3}$$

上标 0 和 1 的意思是指算符 grad 分别相应于坐标 (x_0, y_0, z_0) 和 (x_1, y_1, z_1).

矢量

$$\mathbf{g} = n\mathbf{s} \tag{4}$$

有时称为光线矢量. 设 α, β 和 γ 是光线矢量与各坐标轴的夹角，则光线矢量在各轴上的投影[1]

$$p = n\cos\alpha, \quad q = n\cos\beta, \quad m = n\cos\gamma, \tag{5}$$

称为光线分量. 由于恒等式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

因此三个光线分量满足关系式

$$p^2 + q^2 + m^2 = n^2. \tag{6}$$

由(3)式得出，在 P_0 和 P_1 处的光线分量为

$$p_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \tag{7}$$

q_0, q_1 和 m_0, m_1 也有类似的表达式. 这些关系式表明，根据对点特征函数的了解，就可以直接确定连接媒质中任何两点的光线的分量. 由(6)和(7)式还进一步得出，点特征函数满足两组变量的程函方程:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_0}\right)^2 = n_0^2, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2 = n_1^2. \tag{9}$$

通常为了方便，不用点特征函数，而用一些与它有关系的函数(也是由哈密顿引进的)，即通常所说的混合特征函数和角特征函数. 它们可由点特征函数通过勒让德 (A. M. Legendre) 变换导出[2]; 当 P_0 或 P_1 或这两点都在无穷远时，它们是特别有用的.

---

1) 这里故意选择这种"不对称"的标志法，以便提醒我们，由于恒等式(6)，因此只有两个光线分量是独立的.

2) 勒让德变换一般是把函数 $f(x, y)$ 变换为函数 $g(x, z)$，其中 $z = \partial f/\partial y$，通过 g 对新变量 z 的导数等于旧变量 y 而得出.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§4.1.2 混合特征函数

混合特征函数W由下式来定义[1)]，

$$W = V - \Sigma p_1 x_1, \tag{10}$$

式中的Σ表示对三个具有下标1的类似项求和.（10）式把W表示为九个变量的函数，但一般只有六个（在均匀媒质中只有五个）是独立的. 要说明这一点，我们来考虑点P_0和P_1的微小位移的影响. 此时W的相应改变由下式给出：

$$\delta W = \delta V - \Sigma p_1 \delta x_1 - \Sigma x_1 \delta p_1. \tag{11}$$

现在利用（7）式，

$$\delta V = \Sigma p_1 \delta x_1 - \Sigma p_0 \delta x_0. \tag{12}$$

由（11）和（12）式得出，

$$\delta W = -\Sigma p_0 \delta x_0 - \Sigma x_1 \delta p_1. \tag{13}$$

这个关系式表明，W一般可表示为六个变量x_0，y_0，z_0，p_1，q_1和m_1的函数，并且当它如上式所示时，

$$p_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0}, \quad x_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1}, \tag{14}$$

q_0，y_1，m_0和z_1也有类似的表达式. 由于（6）式，$W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1, m_1)$就满足程函方程

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_0}\right)^2 = n_0^2. \tag{15}$$

可以观察到（见图4.2），$\Sigma p_1 x_1$具有一种简单的几何解释：

$$\Sigma p_1 x_1 = n_1 d_1, \tag{16}$$

式中，$d_1 = Q_1 P_1$，它是$O_1 P_1$在光线的P_1点切线上的投影. 如果P_1位于均匀区，则靠近P_1的那一段光线与线段$Q_1 P_1$重合；根据（10）和（16）式，W**这时代表光线从**P_0**到**Q_1**的光学长度**，Q_1是

1）为了更清楚地显示出它的物理意义，我们按照 Synge 的方式来定义混合特征函数，其符号与哈密顿所用的相反.

也可以把混合特征函数定义为

$$W' = V + \Sigma p_0 x_0,$$

式中对具有下标0的类似项求和. W和W'的性质当然是严格地类似的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

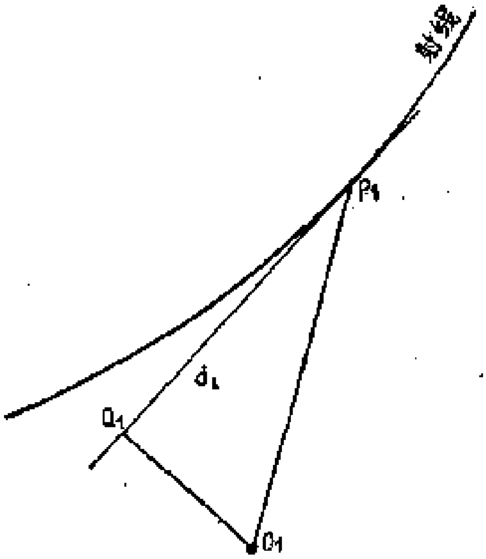


图 4.2 混合特征函数意义的图示

从原点 O_1 到光线末段的垂足(图 4.3):

$$W = [P_0Q_1]. \tag{17}$$

因为在这种情况下，P_1 附近的媒质折射率具有恒定值，由(6)式得出，

$$\delta m_1 = -\frac{p_1\delta p_1 + q_1\delta q_1}{m_1}, \tag{18}$$

把(18)式代入到(13)式中去，(13)式变为[1)]

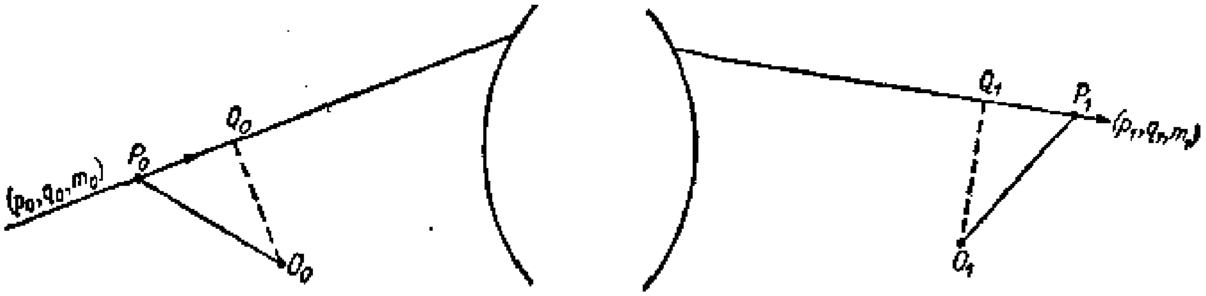


图 4.3 当始媒质和末媒质都均匀时，哈密顿特征函数的解释：

$$V(x_0,y_0,z_0;x_1,y_1,z_1) = [P_0P_1],$$
$$W(x_0,y_0,z_0;p_1,q_1) = [P_0Q_1],$$
$$T(p_0,q_0;p_1,q_1) = [Q_0Q_1].$$

1) 如果函数所依赖的各个变量之间以(6)式那样的辅助关系式相联系，则有可能消去一些变量，或者有可能用这样的关系式把函数表示为对所有变量的齐次函数。哈密顿经常使用后一种方法，它有点更难以掌握。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\delta W = -\Sigma p_0 \delta x_0 - \left(x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1\right) \delta p_1 - \left(y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1\right) \delta q_1. \quad (19)$$

所以当末媒质均匀时，混合特征函数可表示为五个变量的函数：

$$W = W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1), \quad (20)$$

这时它的导数满足下列关系式：

$$p_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0}, \quad q_0 = -\frac{\partial W}{\partial y_0}, \quad m_0 = -\frac{\partial W}{\partial z_0}, \quad (21)$$

$$x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 = -\frac{\partial W}{\partial q_1}. \quad (22)$$

(21) 和 (22) 式表明，如果给定始媒质内部光线上的一点和末媒质内部的光线分量，则根据对混合特征函数的了解，就可以直接确定始媒质内部的光线分量和末媒质内部光线上的各点。

§ 4.1.3 角特征函数

角特征函数 T 可用下式来定义，

$$T = V + \Sigma p_0 x_0 - \Sigma p_1 x_1. \quad (23)$$

如果 p_0 和 p_1 稍有位移，则 T 的相应改变由下式给出，

$$\delta T = \Sigma x_0 \delta p_0 - \Sigma x_1 \delta p_1, \quad (24)$$

上式中已利用 (12) 式．所以 T 可表示为六个光线分量的函数，当这样表示时，

$$x_0 = \frac{\partial T}{\partial p_0}, \quad x_1 = -\frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad (25)$$

其他坐标也有类似的关系式．

由 (23) 式看出，如果 P_0 和 P_1 所在的两区都是均匀的，则 T 代表光线在 Q_0 和 Q_1 之间的光学长度，Q_0 和 Q_1 分别是从 O_0 和 O_1 到光线始段和末段的垂足（见图 4.3），

$$T = [Q_0 Q_1]. \quad (26)$$

在这种情况下，角特征函数可表示为只有四个变量的函数．因为我们如果用 (18) 式代替 δm_1，用类似的关系式代替 δm_0，则 (24) 式变为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\delta T = \left(x_0 - \frac{p_0}{m_0} z_0\right) \delta p_0 + \left(y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0\right) \delta q_0$$
$$- \left(x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1\right) \delta p_1 - \left(y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1\right) \delta q_1. \qquad (27)$$

这个关系式表明，当始媒质和末媒质都均匀时，角特征函数可表示为四个变量 p_0, q_0, p_1 和 q_1 的函数：

$$T = T(p_0, q_0; p_1, q_1), \qquad (28)$$

这时它的导数满足下列关系式：

$$\left.\begin{aligned} x_0 - \frac{p_0}{m_0} z_0 &= \frac{\partial T}{\partial p_0}, & y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 &= \frac{\partial T}{\partial q_0}, \\ x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 &= -\frac{\partial T}{\partial p_1}, & y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 &= -\frac{\partial T}{\partial q_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

如果给定一条光线始段和末段的光线分量，则按(29)式，根据对角特征函数的了解，就可以直接确定这两段光线上各点的坐标。

§4.1.4 旋转折射面的角特征函数近似形式

设

$$z = c_2(x^2 + y^2) + c_4(x^2 + y^2)^2 + \cdots, \qquad (30)$$

式中的 c_2, c_4, …等是常数。这是旋转折射面方程，以笛卡儿坐标轴为参考系，其原点 O 与这个面的轴点（称为极点）重合，其 z 方向沿着对称轴。设 r 表示在这个面的极点处的曲率半径，（当这个面凸向来自负 z 方向的入射光时，其测量值是正的），则

$$c_2 = \frac{1}{2r}. \qquad (31)$$

对于半径为 r 的球面，$c_4 = 1/8r^3$。对于一般的旋转面，我们可写成

$$c_4 = \frac{1}{8r^3}(1 + b); \qquad (32)$$

常数 b（有时称为形变系数）是这个面偏离球面形状的一种粗略量度。利用 r 和 b，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2r} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{8r^3}(1 + b) + \cdots. \tag{33}$$

以下假定这个面两侧的区域都是均匀的，其折射率分别为 n_0 和 n_1. 角特征函数在两侧有不同的参考系，其轴平行于 O 处的轴，其原点分别在轴点 $O_0(0, 0, a_0)$ 和 $O_1(0, 0, a_1)$ 处，[图 4.4 中，$a_0 < 0$, $a_1 > 0$, $r > 0$].

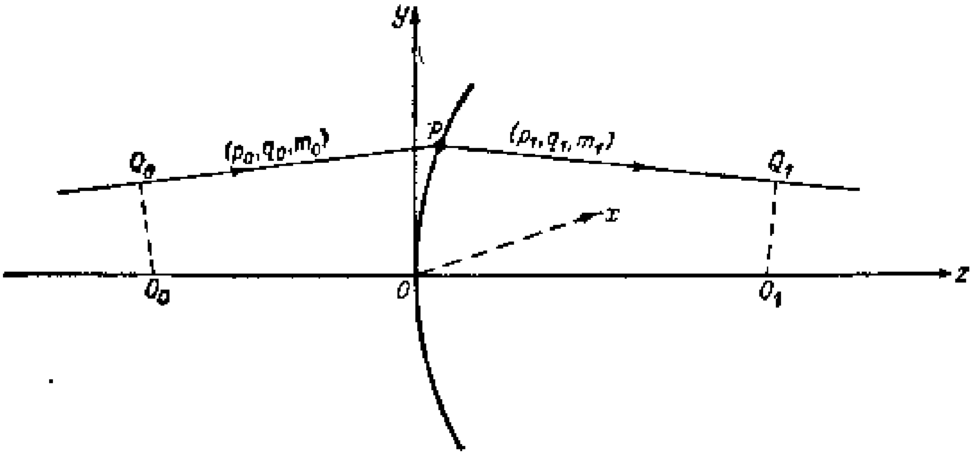


图 4.4 旋转折射面的角特征函数

(O_0, O, O_1, Q_1, P, Q_0 各点不一定是共面的)

如果 P 是入射光线与折射面的交点，Q_0 和 Q_1 是从 O_0 和 O_1 到入射光线和折射光线的垂足，则根据 (26) 式，角特征函数 T 为：

$$\begin{aligned} T &= [Q_0P] + [PQ_1] \\ &= \{xp_0 + yq_0 + (z - a_0)m_0\} \\ &\quad - \{xp_1 + yq_1 + (z - a_1)m_1\}, \end{aligned} \tag{34}$$

式中，(x, y, z) 是 P 相对于 O 处各轴的坐标，(p_0, q_0, m_0) 和 (p_1, q_1, m_1) 是 P 处的入射光线和折射光线的光线分量.

利用折射定律，可从(34)式中消去坐标 (x, y, z). 根据§3.2.2，折射定律与下述说法是等效的，即矢量 $\mathbf{N}(p_0 - p_1, q_0 - q_1, m_0 - m_1)$ 在 P 处与折射面相垂直. 所以，如果(33)式写成以下的形式：

$$F(x, y, z) \equiv z - \frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8r^3}(1 + b) - \cdots = 0, \tag{35}$$

则

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}\lambda\frac{\partial F}{\partial x}&=-\lambda\left[\frac{x}{r}+\cdots\right]=p_0-p_1,\\ \lambda\frac{\partial F}{\partial y}&=-\lambda\left[\frac{y}{r}+\cdots\right]=q_0-q_1,\\ \lambda\frac{\partial F}{\partial z}&=\lambda=m_0-m_1.\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

这些方程的意思是

$$\left.\begin{aligned}x&=-r\frac{p_0-p_1}{m_0-m_1}+\Delta x,\\ y&=-r\frac{q_0-q_1}{m_0-m_1}+\Delta y,\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

式中，Δx 和 Δy 是用 $p, q, x/r, y/r$ 表示的三阶量．要用光线分量来表示z，可把(37)式代入(35)式，得出

$$\begin{aligned}z=&-\frac{r}{2(m_1-m_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]\\ &+\frac{1}{m_1-m_0}[\Delta x(p_0-p_1)+\Delta y(q_0-q_1)]\\ &+\frac{1}{8}\frac{r(1+b)}{(m_1-m_0)^4}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]^2+\cdots.\end{aligned}\tag{38}$$

要求出 T 直到包含四阶项的展开式，不必去计算 Δx 和 Δy 的值；因为当我们把(37)和(38)式代入(34)式时，就会看到包含 Δx 和 Δy 的贡献是高于四阶的，因此可以忽略．这时(34)式变为

$$\begin{aligned}T(p_0, q_0, m_0; p_1, q_1, m_1)=&-m_0a_0+m_1a_1\\ &+\frac{r}{2(m_1-m_0)}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]\\ &-\frac{1}{8}\frac{r(1+b)}{(m_1-m_0)^3}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]^2.\end{aligned}\tag{39}$$

(39)式是角特征函数直到四阶的展开式，角特征函数被看作是所有六个光线分量的函数．利用恒等式(6)，可消去其中两个分量．由(6)式得出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
m_0 &= n_0 - \frac{1}{2n_0}(p_0^2+q_0^2) - \frac{1}{8n_0^3}(p_0^2+q_0^2)^2 + \cdots,\\
m_1 &= n_1 - \frac{1}{2n_1}(p_1^2+q_1^2) - \frac{1}{8n_1^3}(p_1^2+q_1^2)^2 + \cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{40}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m_1-m_0} = \frac{1}{n_1-n_0}\Big[1 &- \frac{1}{2n_0(n_1-n_0)}(p_0^2+q_0^2)\\
&+ \frac{1}{2n_1(n_1-n_0)}(p_1^2+q_1^2) + \cdots\Big].
\end{aligned} \tag{41}
$$

把(41)式代入到(39)式中去，(39)式变为

$$
\begin{aligned}
T(p_0, q_0; p_1, q_1) &= n_1a_1 - n_0a_0\\
&+ \frac{r}{2(n_1-n_0)}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]\\
&+ \frac{a_0}{2n_0}(p_0^2+q_0^2) - \frac{a_1}{2n_1}(p_1^2+q_1^2)\\
&- \frac{r}{4(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]\\
&\times\left[\frac{p_0^2+q_0^2}{n_0} - \frac{p_1^2+q_1^2}{n_1}\right] - \frac{(1+b)r}{8(n_1-n_0)^3}\\
&\times[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]^2 + \frac{a_0}{8n_0^3}(p_0^2+q_0^2)^2\\
&- \frac{a_1}{8n_1^3}(p_1^2+q_1^2)^2 + \cdots.
\end{aligned} \tag{42}
$$

可以看出，这四个变量 p_0, q_0, p_1 和 q_1 在这个表达式中只以三种组合的形式出现[1]:

---

1) 可以更一般地证明，绕 z 轴旋转对称的任何一种媒质的角特征函数，取决于四个变量，但只通过三种组合形式(43)。要看出这一点，我们可利用§5.1中证明的一个结果，根据这个结果，任何一个函数 $F(x_0, y_0; x_1, y_1)$，如果它相对于 xy 平面上各轴绕原点转动是不变的，则只取决于两个矢量 $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$ 和 $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$ 的三个标量积

$$\mathbf{r}_0^2 = x_0^2 + y_0^2,\quad \mathbf{r}_1^2 = x_1^2 + y_1^2,\quad \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r}_1 = x_0x_1 + y_0y_1.$$

把 $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{r}_1$ 分别看作传播矢量 $\mathbf{s}_0(p_0, q_0, m_0)$ 和 $\mathbf{s}_1(p_1, q_1, m_1)$ 在 xy 平面上的投影，则得出(43)式的结果。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$p_0^2+q_0^2=u^2,\quad p_1^2+q_1^2=v^2,\quad \text{和}\quad p_0p_1+q_0q_1=w^2. \tag{43}$$

把此式代入(42)式中,按各阶分开后,(42)式变为

$$T(p_0,q_0;p_1,q_1)=T^{(0)}+T^{(2)}+T^{(4)}+\cdots,$$

式中

$$\left.\begin{aligned}T^{(0)}&=n_1a_1-n_0a_0,\\ T^{(2)}&=\mathscr{A}u^2+\mathscr{B}v^2+\mathscr{C}w^2,\\ T^{(4)}&=\mathscr{D}u^4+\mathscr{E}v^4+\mathscr{F}w^4+\mathscr{G}u^2v^2\\ &\quad+\mathscr{H}u^2w^2+\mathscr{K}v^2w^2,\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{A}&=\frac{1}{2}\left[\frac{r}{n_1-n_0}+\frac{a_0}{n_0}\right],\\ \mathscr{B}&=\frac{1}{2}\left[\frac{r}{n_1-n_0}-\frac{a_1}{n_1}\right],\\ \mathscr{C}&=-\frac{r}{n_1-n_0},\\ \mathscr{D}&=-\frac{r}{4(n_1-n_0)^2}\left[\frac{1+b}{2(n_1-n_0)}+\frac{1}{n_0}\right]+\frac{a_0}{8n_0^3},\\ \mathscr{E}&=-\frac{r}{4(n_1-n_0)^2}\left[\frac{1+b}{2(n_1-n_0)}-\frac{1}{n_1}\right]-\frac{a_1}{8n_1^3},\\ \mathscr{F}&=\frac{-(1+b)r}{2(n_1-n_0)^3},\\ \mathscr{G}&=-\frac{r}{4(n_1-n_0)^2}\left[\frac{1+b}{n_1-n_0}+\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}\right],\\ \mathscr{H}&=\frac{r}{2(n_1-n_0)^2}\left[\frac{1+b}{n_1-n_0}+\frac{1}{n_0}\right],\\ \mathscr{K}&=\frac{r}{2(n_1-n_0)^2}\left[\frac{1+b}{n_1-n_0}-\frac{1}{n_1}\right].\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

§ 4.1.5 旋转反射面的角特征函数近似形式

与一个旋转反射面相联系的角特征函数直到四次方的展开式,可以用类似的方法导出. 但是不必全部进行计算. 使用与前

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一节相同的符号(参看图 4.4 和 4.5)，§ 4.1.4 中直到包括(39)在内的所有方程，均可应用于现在这种情况而不作改变；因此，当(39)式看作是所有六个光线分量的函数时，它也是旋转反射面的角特征函数．但是，当利用光线分量之间的两个恒等式从(39)式中消去 m_0 和 m_1 时，在这两种情况下却得到 T(作为四个光线分量的函数)的不同表达式．用 n 表示光线所在媒质的折射率，这时我们得出的不是(40)式，而是下式：

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= n - \frac{1}{2n}(p_0^2 + q_0^2) - \frac{1}{8n^3}(p_0^2 + q_0^2)^2 + \cdots, \\ m_1 &= -\left[n - \frac{1}{2n}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{8n^3}(p_1^2 + q_1^2)^2 + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

在第二个关系式中，采取了负的平方根 $-\sqrt{n^2 - (p^2 + q^2)}$，因为我们假定，反射光线返回到光来自的那个区域 $(z < 0)$；所以反射光线相对于正 z 方向的方向余弦以及由此得出的 m 都是负的．令 $n_0 = -n_1 = n$，(40)式就简化为(46)式，由此得出，旋转反射面的角特征函数，作为四个光线分量 p_0, q_0, p_1 和 q_1 的函数，可以利用旋转折射面的角特征函数令 $n_0 = -n_1 = n$ 而求得．所以对于反射的情况，我们有

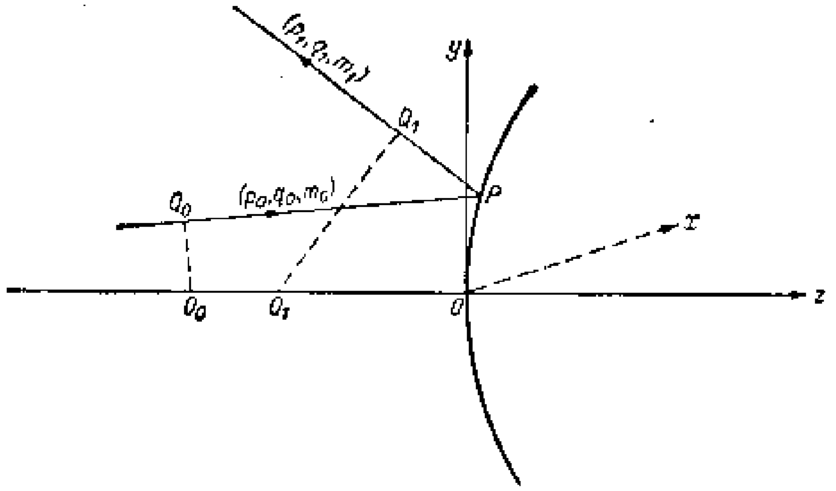


图 4.5 旋转反射面的角特征函数．

(O_0, O_1, O, Q_0, P, Q_1 各点不一定是共面的)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}
T^{(0)} &= -n(a_0 + a_1),\\
T^{(2)} &= \mathscr{A}'u^2 + \mathscr{B}'v^2 + \mathscr{C}'w^2,\\
T^{(4)} &= \mathscr{D}'u^4 + \mathscr{E}'v^4 + \mathscr{F}'w^4 + \mathscr{G}'u^2v^2\\
&\quad + \mathscr{H}'u^2w^2 + \mathscr{K}'v^2w^2,
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{A}' &= \frac{1}{2n}\left[-\frac{1}{2}r + a_0\right],\\
\mathscr{B}' &= \frac{1}{2n}\left[-\frac{1}{2}r + a_1\right],\\
\mathscr{C}' &= \frac{r}{2n},\\
\mathscr{D}' &= -\frac{r}{16n^3}\left[-\frac{1+b}{4} + 1\right] + \frac{a_0}{8n^3},\\
\mathscr{E}' &= -\frac{r}{16n^3}\left[-\frac{1+b}{4} + 1\right] + \frac{a_1}{8n^3},\\
\mathscr{F}' &= \frac{(1+b)r}{16n^3},\\
\mathscr{G}' &= \frac{r}{16n^3}\left[\frac{1+b}{2} - 2\right],\\
\mathscr{H}' &= \frac{r}{8n^3}\left[-\frac{1+b}{2} + 1\right],\\
\mathscr{K}' &= \frac{r}{8n^3}\left[-\frac{1+b}{2} + 1\right].
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

§ 4.2 理 想 成 象

现在考虑在一种以折射率函数 $n(x, y, z)$ 表征的媒质中 P_0 点处的点光源所发出的光的传播. 这时将从 P_0 发出无限数目的光线,但对媒质中其它任何一点,一般只有有限数目的光线通过. 不过在特殊情况下,有可能找到被无限数目的光线通过的一点 P_1. 这样的一点 P_1 就称为 P_0 的一个无象散的(Stigmatic)象(或一个

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

锐象).

在一个理想的光学仪器中，一个称为物空间的三维区域内的每一点 P_0，将产生一个无象散的象 P_1. 全部象点定义为象空间. 物空间和象空间中的对应点就称为共轭点. 从 P_0 发出的光线，一般不是全部到达象空间的；例如，有些光线将被仪器的光阑所隔断. 那些到达象空间的光线就称为位于仪器的场中. 当 P_0 在物空间描出一条曲线 C_0 时，P_1 将描出一条共轭曲线 C_1. 这两条曲线不一定在几何上彼此相似. 如果物空间的每一条曲线 C_0 都与它的象在几何上相似,我们就可以说,在物空间和象空间之间的成象是理想的. 我们也可以用类似的方法来定义在两个面之间的理想成象.

有些光学仪器在刚才规定的意义上是理想的，它们有很大的重要性,因此我们将系统地阐述关于三维区域理想成象(或至少是锐成象)的一些一般定理. 关于二维区域(面)锐成象的一些结果，将在 § 4.2.3 中简单地加以讨论.

§ 4.2.1 一般定理

一个使三维区域无象散地成象的光学系统 $\mathscr{I}$，常称为一个绝对仪器. 将要证明,在一个绝对仪器中,物空间内任何一条曲线的光学长度,等于它的象的光学长度. 1858 年,麦克斯韦[1] 针对物空间和象空间二者都是均匀的这种特殊情况,首次提出了这个定理. 后来,布伦斯 (H. Bruns, 1895),克莱因 (F. Klein, 1901) 和利布曼 (H. Liebmann, 1916)[2] 给出了更严格的证明.

1) J. C. Maxwell, *Quart. J. Pure Appl. Maths.*, **2** (1858), p. 233. 又见于他的 *Scientific Papers*, *I*(Cambridge University Press, 1890), 271.

2) H. Bruns, "Das Eikonal", *Abh. Kgl. sächs. Ges. Wiss., math-phys. Kl.*, **21** (1895), 370; F. Klein, Z. *Math. Phys.*, **46** (1901), 376; *Ges. Math. Abh.*, **2** (1922), 607. 又见于 E. T. Whittaker, *The Theory of Optical Instruments* (Cambridge University Press, 1907), 47. H. Liebmann, *Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math-naturw. Abt.* (1916), 183. 这些研究的报导也可在 H. Boegehold 的论文中找到,见 S. Czapski 和 O. Eppenstein, *Grundzüge der Optischen Instrumente nach Abbe* [Leipzig, Barth, 3rd edition (1924), p. 213].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

后来，卡拉西奥多里(C. Carathéodory)[1]证明，这个定理并不限于均匀媒质，当媒质非均匀和各向异性时，它也是有效的。我们在证明这个定理时将采用卡拉西奥多里的方法，但我们的讨论将限于具有各向同性(但一般非均匀)的物空间和象空间的绝对仪器[2]。

设 A_0B_0 和 A_1B_1 是位于绝对仪器 $\mathscr{I}$ 的场中的一条光线分别在物空间和象空间内的两个线段(图 4.6)。其它任何一条光线，如果它有一个线元与 $A_0B_0A_1B_1$ 的一个线元在位置和方向上都没有明显的偏离，则这条光线也将位于仪器的场中。

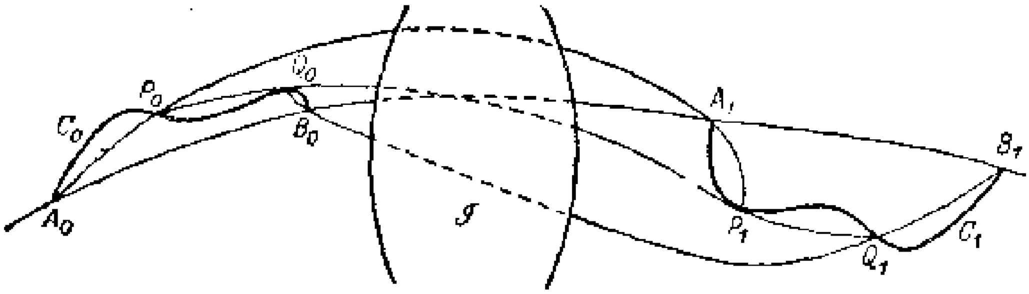


图 4.6 一个绝对光学仪器

如果一条曲线(假定它有连续转向的切线)的每一个线元分别与完全位于 $\mathscr{I}$ 的场中的某些光线的线元重合，这条曲线就称为切向地位于 $\mathscr{I}$ 的场中。如果一个具有足够边数的"多边形"内接于这样一条曲线，则多边形的各边将与完全位于仪器的场中的光线线元重合。

根据等光程原理(见 § 3.3.3)，连接 A_0 及其象 A_1 的所有光线都具有相同的光学长度。我们将用 $V(A_0)$ 来表示这个光程长度，并且要证明它实际上与 A_0 无关。

设 B_0 和 B_1 是另外一对共轭点。则有(见图 4.6)

1) C. Carathéodory, *Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss, Math-naturw. Abt.*, **56** (1926), 1.

2) 在微波光学中，采用非均匀物质是很平常的 [例如，见 J. Brown, *Microwave Lenses* (London, Methuen),1953]. 在光波光学中，近来对非均匀物质也日益注意 [参看 E. Marchard, *Progres in Optics*, Vol. 11, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, American Elsevier Publishing Company, 1973), p. 305].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$[A_1B_1]=[A_0B_0]+V(B_0)-V(A_0). \tag{1}$$

设 C_0 是一条连接 A_0 和 B_0 的曲线，它切向地位于仪器的场中，又设 C_1 是它的象。我们在 C_0 中内接一个多边形 $A_0P_0Q_0B_0$，并且用 P_1 和 Q_1 来表示 P_0 和 Q_0 的象点。这时，把（1）式应用于边 A_1P_1，则有

$$[A_1P_1]=[A_0P_0]+V(P_0)-V(A_0),$$

对其他各边，也类似地有

$$[P_1Q_1]=[P_0Q_0]+V(Q_0)-V(P_0)$$

和

$$[Q_1B_1]=[Q_0B_0]+V(B_0)-V(Q_0).$$

因此

$$[A_1P_1]+[P_1Q_1]+[Q_1B_1]=[A_0P_0]+[P_0Q_0]+[Q_0B_0]+V(B_0)-V(A_0).$$

显然，这个结果可以推广到具有任意边数 N 的多边形。到极限情况，当最长的边趋于零而 $N\to\infty$ 时，我们得到关系式

$$L_1=L_0+V(B_0)-V(A_0), \tag{2}$$

式中

$$L_0=\int_{C_0}n_0ds_0,\quad L_1=\int_{C_1}n_1ds_1 \tag{3}$$

是曲线 C_0 和 C_1 的光学长度。其次，将要证明 $V(B_0)=V(A_0)$.

这两条曲线的各点是一一对应的，它们可用如下的关系式来表示：

$$x_1=f(x_0,y_0,z_0),\quad y_1=g(x_0,y_0,z_0),\quad z_1=h(x_0,y_0,z_0). \tag{4}$$

C_1 的线元 ds_1 是对应的线元 ds_0 的函数，

$$ds_1=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds_0}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{ds_0}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{ds_0}\right)^2}\,ds_0. \tag{5}$$

因此

$$L_1=\int_{C_1}F\left(x_1,y_1,z_1,\frac{dx_1}{ds_0},\frac{dy_1}{ds_0},\frac{dz_1}{ds_0}\right)ds_0, \tag{6}$$

式中

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$F\left(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \frac{dx_1}{ds_0},\ \frac{dy_1}{ds_0},\ \frac{dz_1}{ds_0}\right)$$
$$= n_1(x_1,\ y_1,\ z_1)\sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds_0}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{ds_0}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{ds_0}\right)^2}$$

是导数 dx_1/ds_0，dy_1/ds_0 和 dz_1/ds_0 的一次齐次函数；而且，当用 $-dx_1/ds_0$ 等代替 dx_1/ds_0 等时，F 保持不变．现在由(4)式得出，

$$\frac{dx_1}{ds_0}=\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{ds_0}+\frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{dy_0}{ds_0}+\frac{\partial f}{\partial z_0}\frac{dz_0}{ds_0}, \tag{7}$$

对 dy_1/ds_0 和 dz_1/ds_0，也有类似的表达式．因此利用(7)和(4)式，F 可以表示为如下的形式：

$$F\left(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \frac{dx_1}{ds_0},\ \frac{dy_1}{ds_0},\ \frac{dz_1}{ds_0}\right)$$
$$=\Phi\left(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \frac{dx_0}{ds_0},\ \frac{dy_0}{ds_0},\ \frac{dz_0}{ds_0}\right), \tag{8}$$

Φ 也是 dx_0/ds_0 等的一次齐次函数；而且，当用 $-dx_0/ds_0$ 等代替 dx_0/ds_0 等时，Φ 保持不变，

$$\Phi\left(x_0,\ y_0,\ z_0,\ -\frac{dx_0}{ds_0},\ -\frac{dy_0}{ds_0},\ -\frac{dz_0}{ds_0}\right)$$
$$=\Phi\left(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \frac{dx_0}{ds_0},\ \frac{dy_0}{ds_0},\ \frac{dz_0}{ds_0}\right). \tag{9}$$

由(2)，(6)和(8)式得出

$$\int_{C_0}(n_0-\Phi)ds_0=V(A_0)-V(B_0), \tag{10}$$

上式表明，式中的曲线积分的值只取决于端点 A_0 和 B_0，而不取决于 C_0 的选择．但曲线 C_0 也不是完全任意的，因为它必须切向地位于仪器的场中．尽管如此，还是可以得出结论：$(n_0-\Phi)ds_0$ 必定是某一函数 Ψ 的全微分，

$$n_0-\Phi=\frac{\partial\Psi}{\partial x_0}\frac{dx_0}{ds_0}+\frac{\partial\Psi}{\partial y_0}\frac{dy_0}{ds_0}+\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}\frac{dz_0}{ds_0}.$$

现在如果用 $-dx_0/ds_0$ 等代替导数 dx_0/ds_0 等，则上式右边将改变符号，而由于(9)式，上式左边将保持不变．这唯一可能的办法就是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

令上式两边都等于零(Ψ = 常数)；因此

$$\Phi = n_0. \tag{11}$$

(10)式表明，$V(A_0) = V(B_0)$，结果(2)式简化为关系式：$L_1 = L_0$. 因此对于任何一条曲线，不管它是否切向地位于场中，只要它有一个象，则

$$\int_{C_0} n_0 ds_0 = \int_{C_1} n_1 ds_1. \tag{12}$$

这就是关于一个绝对仪器的麦克斯韦定理[1].

根据麦克斯韦定理，可以直接得出一些有意义的结论. 考虑

---

1) 楞次 (W. Lenz) 对麦克斯韦定理给出了以下的不够普遍但很简单巧妙的证明 [见 *Probleme der Modernen Physik*, edited by P. Debye (Leipzig, Hirzel, 1928), p. 198].

假定从每一个物点发出的所有光线都到达它的象点，令 (A_0, A_1) 和 (B_0, B_1) 是两对共轭点. 根据假设，光线 A_0B_0 必定通过 A_1 和 B_1. 同样，B_0A_0 也必定通过这两点. 因此，每一条光线都必定是一条封闭曲线，根据等光程原理得出(见图 4.7)：

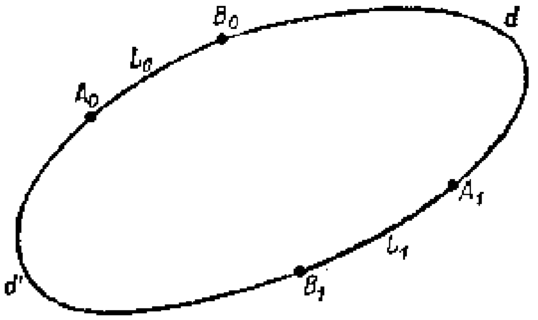


图4.7 楞次对一个绝对仪器的麦克斯韦定理所作证明的图示

$$[A_0A_1]_{顺时针方向} = [A_0A_1]_{逆时针方向}$$

和

$$[B_0B_1]_{顺时针方向} = [B_0B_1]_{逆时针方向}.$$

令

$$[A_0B_0] = L_0, \quad [A_1B_1] = L_1, \quad [B_0A_1] = d, \quad [B_1A_0] = d'.$$

则上面两个式子变为

$$L_0 + d = d' + L_1, \quad d + L_1 = L_0 + d',$$

两式相减，得出

$$L_0 = L_1.$$

这就证明了在曲线为光线的一及这种特殊情况下的麦克斯韦定理. 把曲线看作是由大量光线线段所构成的多边形的一种极限形式，就可以推广到任意一条曲线，象在正文中所证明的那样.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一个小三角形，它的边长为 $ds_0^{(1)}$, $ds_0^{(2)}$, $ds_0^{(3)}$，令 $ds_1^{(1)}$, $ds_1^{(2)}$, $ds_1^{(3)}$ 是它由一个绝对仪器所形成的象的三个边. 而且令 n_0 和 n_1 分别为这两个三角形所在区域的折射率. 根据麦克斯韦定理，

$$n_0 ds_0^{(1)} = n_1 ds_1^{(1)}, \quad n_0 ds_0^{(2)} = n_1 ds_1^{(2)}, \quad n_0 ds_0^{(3)} = n_1 ds_1^{(3)}. \qquad (13)$$

因此，这两个三角形彼此相似，其对应边与折射率成反比. 所以，任何两条曲线之间的角度在成象时将保持不变，这就是说，成象必定是一个保角变换. 现在有一个由刘维 (J. Liouville) 提出的一般定理[1]，根据这个定理，三维区域到三维区域的保角变换只能是一个投影变换(共线关系)，或一个反演[2]，或这两种变换的一个组合. 因此就建立了由卡拉西奥多里提出的下列定理: 一个绝对仪器的成象，或者是一个投影变换，或者是一个反演，或者是这两者的一个组合.

现在让我们简略地考虑以下的情况: 在物空间和象空间之间的成象不仅是无象散的，而且是理想的; 即在这种情况下，任何一个图形都变换为一个在几何上与它相似的图形. 显然，这种成象必定是一个投影变换，因为它把线变换为线[3]. 此时由(13)式得出，任何两个共轭线元之间的放大率 ds_1/ds_0，等于折射率之比 n_0/n_1. 特别是，如果 $n_0 = n_1 =$ 常数，则 $ds_1/ds_0 = 1$，因此在具有相同折射率的均匀的物空间和象空间之间的理想成象，从它产生一个与物完全相同的象的意义上来说，总是平常的 (trivial). 一块平面镜(或一些平面镜的组合)就是引起这种成象的唯一已知仪器.

这些一般性的考虑意味着，为了在具有相同折射率的均匀的物空间和象空间之间获得不平常的成象，就必须降低对物和象之间精确无象散或严格相似的要求.

---

1) 例如，见 W. Blaschke, *Vorlesungen über Differential-Geometrie I* [Berlin, Springer, 2nd ed. (1924), p. 68; 4th ed. (1945), p. 101].

2) 一个反演，就是把每一点 P_0 变换为在 P_0 与一固定原点 O 的连线上的一点 P_1，其乘积 $OP_0 \cdot OP_1$ 是恒定的.

3) 参看 F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Vol. II (译自德文第三版, London, Macmillan, 1939, 89; 由 Dover Publications, New York 翻印).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 4.2.2 麦克斯韦"鱼眼"

绝对仪器的一个简单和有趣的例子，是由一种以折射率函数

$$n(r)=\frac{1}{1+(r/a)^2}n_0 \tag{14}$$

表征的媒质表现出来的，式中的 r 表示从一固定点 O 算起的距离，n_0 和 a 都是常数. 它通常称为"鱼眼"，麦克斯韦首次对此作过研究[1].

在 § 3.2 中已经指出，在球对称的媒质中，光线是一些平面曲线，位于通过原点的平面上，并且光线方程可写成以下的形式[参看 § 3.2(11)]:

$$\theta=c\int^{r}\frac{dr}{r\sqrt{n^2(r)r^2-c^2}},$$

c 是一个常数. 把(14)代入上式，并且令

$$\rho=\frac{r}{a},\quad K=\frac{c}{an_0}, \tag{15}$$

我们得出

$$\theta=\int^{\rho}\frac{K(1+\rho^2)d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-K^2(1+\rho^2)^2}}. \tag{16}$$

---

1) J. C. Maxwell, *Cambridge and Dublin Math. J.*, **8** (1854), 188; 也见于 *Scientific Papers*, *I*(Cambridge University Press), p. 76.

麦克斯韦鱼眼的一些有意义的推广，已由楞次(W. Lenz)得出，见 *Probleme der Modernen Physik*, edited by P. Debye (Leipzig, Hirzel, 1928), 198 和 R. Stettler, *Optik*, **12** (1955), 529. 后一篇文章也包括推广到一种所谓 Luneburg 透镜的情况，由于它能够宽角度扫描，因此它有效地应用于微波天线装置中. R. K. Luneburg 首次研究了这种透镜，见于他写的 *Mathematical theory of Optics* (油印讲稿, Brown University, Providence, R. I., 1944; 由 University of California Press, Berkeley and Los Angeles 印刷出版, 1964, § 29)，它是一种具有折射率函数 $n(r)=\sqrt{2-r^2}$ $(0\leqslant r\leqslant 1)$ 的不均匀球体，当把它放在折射率为1的均匀媒质中时，它使得每一束入射平行光线都锐聚焦. 也见于 R. F. Rinehart, *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 860; A. Fletcher, T. Murphy and A. Young, *Proc. Roy. Soc.* A **223** (1954), 216; 和 G. Toraldo di Francia, *Optica Acta*, **1** (1954—1955), 157.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

可以证明

$$\frac{K(1+\rho^2)}{\rho\sqrt{\rho^2-K^2(1+\rho^2)^2}}=\frac{d}{d\rho}\left[\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho^2-1}{\rho}\right)\right],$$

因此(16)变为

$$\sin(\theta-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2n_0^2-4c^2}}\frac{r^2-a^2}{ar},\tag{17}$$

式中的 α 是一个积分常数.

(17)式是光线的极坐标方程. 所以,通过一固定点 $P_0(r_0,\theta_0)$ 的单参数的光线族由下式给出:

$$\frac{r^2-a^2}{r\sin(\theta-\alpha)}=\frac{r_0^2-a^2}{r_0\sin(\theta_0-\alpha)}.\tag{18}$$

可以看出,无论 α 值等于多少,这个方程均被 $r=r_1$, $\theta=\theta_1$ 所满足,其中

$$r_1=\frac{a^2}{r_0},\quad\theta_1=\pi+\theta_0,\tag{19}$$

(19)式表明,来自一个任意点 P_0 的所有光线,均相交于 P_0 到 O 连线上的一点 P_1; P_0 和 P_1 分别在 O 的两边,并且 $OP_0\cdot OP_1=a^2$. 因此,鱼眼是一种绝对仪器,其中的成象是一个反演.

我们注意到,$r=a$, $\theta=\alpha$ 和 $r=a$, $\theta=\pi+\alpha$ 是满足(17)式的;因此每一条光线与固定圆 $r=a$ 相交于直径的相反两端点

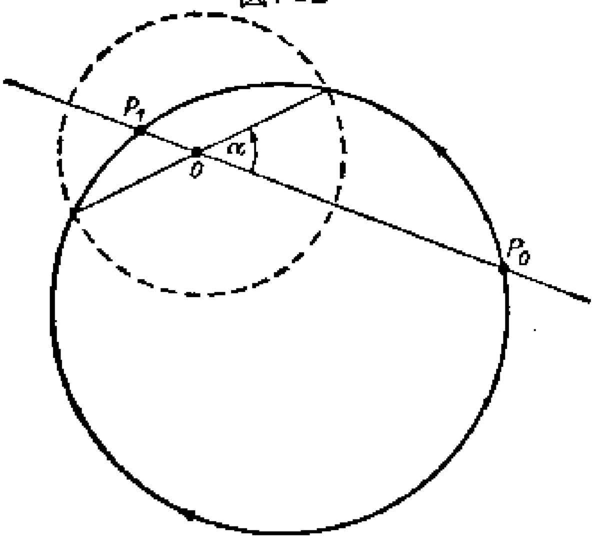


图 4.8 麦克斯韦"鱼眼"中的光线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上(见图 4.8).

为了得出光线的笛卡儿坐标方程，我们在(17)式中令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则有

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \frac{c}{a\sqrt{a^2n_0^2 - 4c^2}}(x^2 + y^2 - a^2),$$

或

$$(x + b\sin\alpha)^2 + (y - b\cos\alpha)^2 = a^2 + b^2, \tag{20}$$

式中

$$b = \frac{a}{2c}\sqrt{a^2n_0^2 - 4c^2}.$$

(20)式表明每一条光线都是一个圆.

§ 4.2.3 面的无象散成象

我们至此只涉及三维区域的理想成象或锐成象. 我们看到，当物空间和象空间都是均匀的并且具有相同折射率时，理想成象只能属于产生物的镜象这一平常的类型. 自然要问，当要求仪器只对某些面理想成象(或至少是锐成象)时，能不能得到不平常的成象呢？这个问题已经被一些作者研究过了[1)]，他们发现，当物空间和象空间都均匀时，一般[2)]至多有两个面能被一个旋转对称系统锐成象. 关于这个定理的证明，可查阅伯格霍耳德 (H. Boegehold) 和赫兹伯格 (M. Herzberger) 的文章以及史密斯 (T. Smith) 的文章. 我们在这里只详细研究一个球面的锐成象这一种简单情况，它在实用上是特别有意义的.

考虑处于均匀媒质内部的一个实心均匀球 S 上的折射. 设 O 是球心，r 是球的半径，n 和 n' 分别是球和周围媒质的折射率. 而

1) H. Boegehold and M. Herzberger, *Compositio Mathematica*, **1** (1935), 448; M. Herzberger, *Ann. New York Acad. Sci.*, **48** (1946), Art. 1, p. 1; T. Smith, *Proc. Phys. Soc.* **60** (1948), 293. 又见于 C. G. Wynne, *Proc. Phys. Soc.*, **65** B (1952), 436.

2) "一般"，在这里的意思是要排除全部物空间锐成象(例如用一平面镜反射)一类退化情况.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

且，设 AQ 是入射到球上的一条光线．折射光线 QB 用以下的作图法可以容易地求得．

设 S_0 和 S_1 是两个球，球心均在 O 点，球的半径分别为

$$r_0=\frac{n}{n'}r,\quad r_1=\frac{n'}{n}r. \tag{21}$$

如果 P_0 是 AQ 与 S_0 的交点，P_1 是 OP_0 与 S_1 的交点，则 QP_1 就是折射光线．因为通过作图得出(见图 4.9)

$$\frac{OQ}{OP_0}=\frac{OP_1}{OQ}=\frac{n'}{n}. \tag{22}$$

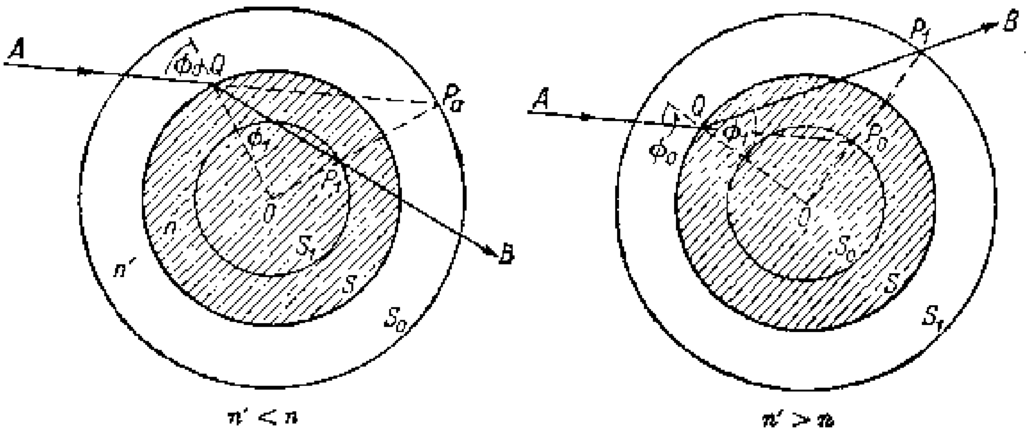


图 4.9　在一个球面上的折射．不晕点

而且

$$\widehat{QOP_0}=\widehat{QOP_1}. \tag{23}$$

所以三角形 OQP_0 和 OP_1Q 相似，由此得出

$$\frac{\sin\phi_0}{\sin\phi_1}=\frac{OP_0}{OQ}=\frac{n}{n'}, \tag{24}$$

式中的 $\phi_0=\widehat{OQP_0}$ 和 $\phi_1=\widehat{OQP_1}$ 分别是入射角和折射角． ϕ_0 和 ϕ_1 满足折射定律，因此 QP_1 就是折射光线．

这种作图法意味着，从 S_0 上的一点 P_0 发散的所有光线，将在半径 OP_0 与 S_1 的交点 P_1 处形成一个(虚的)无象散的象．因此，球 S_1 就是 S_0 的一个无象散的象，反之亦然．

用稍有不同的形式来表达(24)式将是有用的． 如果我们用

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

θ_0 和 θ_1 来表示两条共轭光线与直线 P_0P_1 的夹角，即 $\theta_0 = \widehat{OP_0Q}$，$\theta_1 = \widehat{OP_1Q}$，则由于两个三角形相似，因此 $\theta_0 = \phi_1$，$\theta_1 = \phi_0$；所以

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_0} = \frac{n}{n'} = \text{常数}. \tag{25}$$

(25)式是所谓正弦条件的特殊情况，它的意义将在 § 4.5 中加以说明．按照 § 4.5 的术语，P_0 和 P_1 称为球面 S 的不晕点．

我们将在 § 6.6 中指出，在一个球面上折射时存在不晕点，在某些显微镜物镜的构造中是有用处的．

§ 4.3 具有轴对称的投影变换（共线关系）

在前一节中已经指出，在三维区域之间的理想成象必定是一个投影变换，因为它把线变换为线．但即使在不严格满足理想成象的要求时，投影变换的一些性质仍然是很重要的．因为以后将要看到，在任何一个光学系统中物和象之间的关系，至少在一级近似上，是这样的一个变换．所以在导出实际仪器中成象的定律以前，先研究投影变换的一般性质将是方便的．虽然这个初步讨论在本质上属于几何学的性质，但在可能的地方保留光学的术语也将是方便的．

§ 4.3.1 一般公式

设 (x, y, z) 是物空间一点 P 的坐标，(x', y', z') 是象空间一点 P' 的坐标，两者此时均以同一套任意选定的笛卡儿直角坐标轴为参考系．物空间和象空间之间的投影关系，在数学上用以下的关系式来表示：

$$x' = \frac{F_1}{F_0}, \quad y' = \frac{F_2}{F_0}, \quad z' = \frac{F_3}{F_0}, \tag{1}$$

式中

$$F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{2}$$

由(1)式联系起来的一对点，就称为形成一共轭对．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

对 x, y, z 解(1)式,我们得到相同形式的关系式:

$$x = \frac{F_1'}{F_0'}, \quad y = \frac{F_2'}{F_0'}, \quad z = \frac{F_3'}{F_0'}, \tag{3}$$

式中

$$F_i' = a_i'x' + b_i'y' + c_i'z' + d_i'.$$

由(1)式得出,位于平面 $F_0 = 0$ 上的任何一点的象均在无穷远处. 类似地,由(3)式看出,其象位于平面 $F_0' = 0$ 上的所有物点均在无穷远处.平面 $F_0 = 0$ 就称为物空间的焦平面,平面 $F_0' = 0$ 就称为象空间的焦平面[1]. 在物空间中平行的光线将变换为在焦平面 $F_0' = 0$ 的一点上相交的光线. 类似地,从焦平面 $F_0 = 0$ 的一点发出的光线将变换为一束平行光线. 在特殊情况下,这两个焦平面都可能位于无穷远处. 这时,变换就称为仿射的或望远的. 此时有限值 (x, y, z) 与有限值 (x', y', z') 相对应,因此在一个望远变换中总是具有 $F_0 \neq 0$ 和 $F_0' \neq 0$ 的. 显然,这只有在 $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ 和 $a_0' = b_0' = c_0' = 0$ 时才可能成立.

对于光学特别重要的是轴对称的情况,因为大多数光学系统是由一些具有一个共同轴的旋转面组成的(通常称为共轴(centred)系统). 此时由对称性得出,每一点 P_0 的象总是位于包含 P_0 和轴的平面上的;考虑到与此有关的投影变换的性质,因此我们可以只限于讨论位于这样的一个子午面上的各点. 设这个子午面是 yz 平面,并且取 z 轴沿着对称轴. 此时物空间的一点 $(0, y, z,)$ 将变换为象空间的一点 $(0, y', z')$, 这里,

$$y' = \frac{b_2y + c_2z + d_2}{b_0y + c_0z + d_0}, \quad z' = \frac{b_3y + c_3z + d_3}{b_0y + c_0z + d_0}. \tag{4}$$

现在由对称性得出,当 y 改变为 $-y$ 时, z' 保持不变. 这一般只有在 $b_0 = b_3 = 0$ 时才可能成立. 而且由对称性得出,如果 $y \to -y$, 则 $y' \to -y'$, 这意味着 $c_2 = d_2 = 0$. 因此(4)式简化为

$$y' = \frac{b_2y}{c_0z + d_0}, \quad z' = \frac{c_3z + d_3}{c_0z + d_0}. \tag{5}$$

---

1) "焦平面"和"焦点"这两个名词在这里的含义稍微不同于联系到法线汇(§3.2.3)和象散光锥(§4.6)时的含义.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这些方程含有五个常数，但只有它们的比值才是有意义的。所以一个具有轴对称的投影变换用四个参数来表征。

对 y 和 z 解(5)式，我们得到

$$y = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2} \frac{y'}{c_0 z' - c_3}, \quad z = \frac{-d_0 z' + d_3}{c_0 z' - c_3}. \tag{6}$$

由(5)和(6)式看出，焦平面由下式给出:

$$F_0 \equiv c_0 z + d_0 = 0, \quad F_0' \equiv c_0 z' - c_3 = 0;$$

所以焦平面与轴成直角相交，其交点的横坐标分别是

$$z = -\frac{d_0}{c_0}, \quad z' = \frac{c_3}{c_0}. \tag{7}$$

这些点称为主焦点，在图 4.10 中用 F 和 F' 来表示.

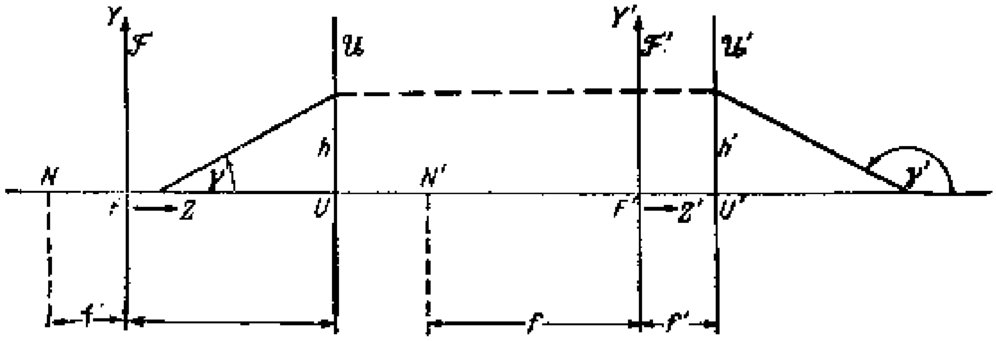


图 4.10　一个光学系统的基点和基面

F, F' = 焦点；　U, U' = 主点；　N, N' = 节点；

$\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ = 焦平面；　$\mathscr{U}, \mathscr{U}'$ = 主平面

现在对物空间和象空间各引进独立的坐标系将是方便的，此时对 z 坐标的测量各从其主焦点算起；即，我们令

$$\left.\begin{aligned} y = Y, \quad c_0 z + d_0 = c_0 Z, \\ y' = Y', \quad c_0 z' - c_3 = c_0 Z'. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

则(5)式变为

$$Y' = \frac{b_2}{c_0} \frac{Y}{Z}, \quad Z' = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{c_0^2 Z}.$$

而且我们令

$$f = \frac{b_2}{c_0}, \quad f' = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2 c_0}. \tag{9}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

利用这种代换，上述变换方程就得出以下的简单形式：

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{f}{Z}=\frac{Z'}{f'}. \tag{10}$$

第二个关系式，$ZZ'=ff'$，通常称为牛顿方程．常数 f 通常称为物空间的焦距，f' 通常称为象空间的焦距．

由(10)式得出，对于固定的物平面和象平面，

$$\left(\frac{dY'}{dY}\right)_{Z=\text{常数}}=\frac{Y'}{Y}=\frac{f}{Z}=\frac{Z'}{f'}. \tag{11}$$

这个量通常称为横向放大率．而且我们得出轴向放大率为

$$\frac{dZ'}{dZ}=-\frac{Z'}{Z}=-\frac{ff'}{Z^2}=-\frac{Z'^2}{ff'}, \tag{12}$$

它与 Y 和 Y' 无关．由(11)和(12)式看出，这两种放大率有以下的关系：

$$\frac{dZ'}{dZ}=-\frac{f'}{f}\left(\frac{dY'}{dY}\right)^2_{Z=\text{常数}}. \tag{13}$$

因为横向放大率取决于 Z 而不取决于 Y，由此得出，位于一个垂直于轴的平面上的物，通过变换将得到一个在几何上与它相似的象．

当 $Z=f$ 和 $Z'=f'$ 时，横向放大率等于 1．这些平面称为主平面，在图 4.10 和 4.11 中用字母 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}'$ 来表示．这些平面与轴的交点 U 和 U' 通常称为主点．

设 h 是从轴到一条来自轴点 $(0, 0, Z)$ 的光线与物空间主平面交点的距离．其共轭光线与另一主平面相交，从轴到其交点的距离同为 h；这两条光线与轴的夹角 γ 和 γ' 由下式给出(见图 4.10)：

$$\tan\gamma=\frac{h}{f-Z},\quad \tan\gamma'=\frac{h}{f'-Z'}.$$

两者的比值

$$\frac{\tan\gamma'}{\tan\gamma}=\frac{f-Z}{f'-Z'}=-\frac{Z}{f'}=-\frac{f}{Z'} \tag{14}$$

通常称为角放大率或会聚比．它与 h 和 h' 无关；当 $Z=-f'$ 和

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$Z' = -f$时，它等于1. 由这两个式子规定的两个轴点N和N'，通常称为节点. 它们是两个共轭点，具有如下的特性：通过它们的共轭光线是相互平行的. 两个节点之间的距离等于两个主点之间的距离. 当$f = -f'$时，节点与主点重合. 焦点、主点和节点称为这个变换的基点.

测量距离从主平面算起而不从焦平面算起，有时是方便的. 这就是说，我们用变量

$$\zeta = Z - f, \quad \zeta' = Z' - f' \tag{15}$$

来代替Z和Z'. 因此牛顿方程$ZZ' = ff'$变为

$$\frac{f}{\zeta} + \frac{f'}{\zeta'} = -1. \tag{16}$$

利用焦点和主平面的性质，我们就可以通过简单的几何作图法来求出与一个已知点P共轭的点P'. 通过P画两条直线，一条与轴相平行，另一条通过焦点F（图 4.11）. 设A和B分别是这两条直线与主平面$\mathscr{U}$的交点. 则由主平面的性质得出，与A和B共轭的点A'和B'，就是分别通过A和B并且平行于轴的两条直线与$\mathscr{U}'$的交点. 而且，因为PA通过焦点F，$P'A'$就必定与轴相平行，又因为PB与轴相平行，$P'B'$就必定通过另一个焦点F'. 所以象点P'就是AA'与$B'F'$的交点.

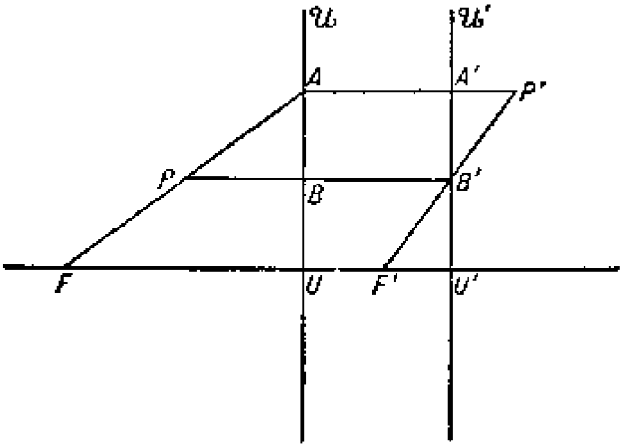


图 4.11 用作图法确定象点

§ 4.3.2 望远情况

现在我们来考虑望远（仿射）共线关系这种特殊情况. 如前所述，这种情况的特征是两个焦平面均在无穷远处. 因此在(5)和(6)式中的系数c_0为零，而(5)式简化为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$y' = \frac{b_2 y}{d_0}, \quad z' = \frac{c_3 z + d_3}{d_0}. \tag{17}$$

我们再对物空间和象空间分别选取独立的坐标系．取任何一对共轭的轴点作为两个坐标系的原点．以新的一套轴作为参考系，这个变换的方程就具有以下的简单形式：

$$Y' = \alpha Y, \ Z' = \beta Z, \tag{18}$$

式中 $\alpha = b_2/d_0$, $\beta = c_3/d_0$.

这时，横向和轴向放大率都是常数．角放大率也是常数；要说明这一点，让我们考虑两条共轭光线，把这两条光线与轴的交点取作两个坐标系的原点．则这两条光线的方程为

$$Y = Z \tan\gamma, \quad Y' = Z' \tan\gamma'. \tag{19}$$

所以

$$\frac{\tan\gamma'}{\tan\gamma} = \frac{Y'}{Z'}\frac{Z}{Y} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b_2}{c_3}. \tag{20}$$

虽然在望远变换中 f 和 f' 两者都是无穷大，但比值 f'/f 必须看作是有限的．因为根据(9)式，当 $c_0 \to 0$ 时，

$$\frac{f'}{f} \to -\frac{c_3 d_0}{b_2^2} = -\frac{\beta}{\alpha^2}. \tag{21}$$

§4.3.3 投影变换的分类

投影变换可以按照焦距的符号来分类．

当焦距 f 和 f' 符号相反时，$ff' < 0$，根据(12)式，$dZ'/dZ > 0$．这意味着，如果物在平行于轴的方向上位移，则象也将在同一方向上位移．以后将要看到，每当象的产生或仅仅通过折射，或通过偶数次反射，或通过这两者的组合，则总是出现这一类型的成象．这一类型的成象称为同向的(concurrent)或折射的(dioptric)．

当焦距 f 和 f' 符号相同时，$ff' > 0$，$dZ'/dZ < 0$，因此，当物的位移在平行于轴的方向上时，相应地，象的位移则在相反的方向上．这一类型的成象或通过奇数次反射，或通过奇数次反射与任何次折射的组合．这一类型的成象称为反向的(contracurrent)或

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

反射的(katoptric).

在上述的每一类型中，再按照焦距 f 的符号区分为两类变换. 由(11)式看出，当 $Z>0$ 时，横向放大率为正或负，取决于 $f>0$ 或 $f<0$. 因此，位于物空间右半边的物所具有的象，取向相同或颠倒，取决于 f 为正或负. 在前一种情况下，变换称为会聚的；在后一种情况下，变换称为发散的. 这些术语由以下的事实得出：一束入射平行光线通过象空间的主平面以后，在前一种情况下变成会聚的，而在后一种情况下变成发散的. 表 12 中概括了这四种情况.

表 12 投影变换的分类(笛卡儿符号规则)

	会聚	发散
同向 (折射)	$f>0;\ f'<0$	$f<0;\ f'>0$
反向 (反射)	$f>0;\ f'>0$	$f<0;\ f'<0$

在望远变换这种特殊情况中，这四种类型用 α 和 β 的符号来区分. 由(21)式得出，当 β 为正时，变换将是同向的；当 β 为负时，变换将是反向的. 而且，由(18)式看出，变换是会聚的或发散的，将取决于 α 为正或负.

§4.3.4 投影变换的组合

现在我们考虑两个相继的投影变换的组合，它们是绕同一轴旋转对称的.

令下标 0 指第一个变换，下标 1 指第二个变换，则用来规定这两个变换的方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{Y_0'}{Y_0}=\frac{f_0}{Z_0}=\frac{Z_0'}{f_0'},\\ \frac{Y_1'}{Y_1}=\frac{f_1}{Z_1}=\frac{Z_1'}{f_1'}.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

设 c 是焦点 F_0' 和 F_1 之间的距离. 因为第一个变换的象空间与第

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

二个变换的物空间重合，

$$Z_1 = Z_0' - c,\quad Y_1 = Y_0'. \tag{23}$$

利用（23）式，从（22）式中消去中间空间的坐标，得出

$$\left.\begin{aligned} Y_1' &= \frac{Z_1' Y_1}{f_1} = \frac{Z_1' Y_0'}{f_1} = \frac{Z_1' f_0 Y_0}{f_1' Z_0} = \frac{f_0 f_1 Y_0}{f_0 f_0' - c Z_0}, \\ Z_1' &= \frac{f_1 f_1'}{Z_1} = \frac{f_1 f_1'}{Z_0' - c} = \frac{f_1 f_1'}{\frac{f_0 f_0'}{Z_0} - c} = \frac{f_1 f_1' Z_0}{f_0 f_0' - c Z_0}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

设

$$\left.\begin{aligned} Y &= Y_0,\quad Z = Z_0 - \frac{f_0 f_0'}{c}, \\ Y' &= Y_1',\quad Z' = Z_1' + \frac{f_1 f_1'}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

（25）式表示一种坐标变换，两个坐标系的原点分别在 Z 方向上移动一个距离 $f_0 f_0'/c$ 和 $-f_1 f_1'/c$。利用这些变量，组合变换的方程变为

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'}, \tag{26}$$

式中

$$f = -\frac{f_0 f_1}{c},\quad f' = \frac{f_0' f_1'}{c}. \tag{27}$$

由（25）式看出，新旧坐标系原点之间的距离，即从原来单个变换的焦点到上述等效变换的焦点的距离 $\delta = F_0 F$ 和 $\delta' = F_1' F'$，分别为

$$\delta = \frac{f_0 f_0'}{c},\quad \delta' = -\frac{f_1 f_1'}{c}. \tag{28}$$

如果 $c = 0$，则 $f = f' = \infty$，因此这个等效共线关系是望远的。此时（24）式简化为

$$\left.\begin{aligned} Y_1' &= \frac{f_1}{f_0} Y_0, \\ Z_1' &= \frac{f_1 f_1'}{f_0 f_0'} Z_0; \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

所以在这个等效变换中，相应于（18）式中的常数 α 和 β 为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\alpha = \frac{f_1}{f_0'}, \quad \beta = \frac{f_1 f_1'}{f_0 f_0'}. \tag{30}$$

现在，角放大率为

$$\frac{\tan\gamma'}{\tan\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{f_0}{f_1'}. \tag{31}$$

如果其中有一个或两个变换是望远的，则上述考虑必须略加修改.

§ 4.4 高 斯 光 学

现在我们来研究透镜、反射镜和它们的组合的初步性质. 在这种初步理论中，将只考虑那些位于轴最近邻的点和光线；将忽略与轴的距离或光线与轴的夹角二者的平方项和更高次方项. 由此得出的理论通常称为高斯光学[1].

§ 4.4.1 旋转折射面

考虑一锥光线入射到一个旋转折射面上，这个面分隔着折射率为 n_0 和 n_1 的两种均匀媒质. 首先，在两种媒质中的点和光线将用同一个笛卡儿参考系，其原点将取在这个面的极点 O 处，它的 z 方向沿着对称轴.

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 分别是在入射光线和折射光线上的点. 忽略高于一次方的项，由 § 4.1(29)，§ 4.1(40) 和 § 4.1(44) 式得出，这些点的坐标和这两条光线的分量由以下的关系式联系着：

$$\left.\begin{aligned} x_0 - \frac{p_0}{n_0} z_0 &= \frac{\partial T^{(2)}}{\partial p_0} = 2\mathscr{A} p_0 + \mathscr{C} p_1, \\ x_1 - \frac{p_1}{n_1} z_1 &= -\frac{\partial T^{(2)}}{\partial p_1} = -2\mathscr{B} p_1 - \mathscr{C} p_0, \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

---

1) 和前面一样，使用解析几何学通常的符号规则(笛卡儿符号规则). 实际使用的各种符号规则已在下述报告中详细讨论过，见 a Report on the Teaching of Geometrical Optics, Physical Society (London), 1934.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned} y_0 - \frac{q_0}{n_0} z_0 &= \frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_0} = 2\mathscr{A} q_0 + \mathscr{C} q_1, \\ y_1 - \frac{q_1}{n_1} z_1 &= -\frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_1} = -2\mathscr{B} q_1 - \mathscr{C} q_0, \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

式中，根据 § 4.1(45) 式，

$$\mathscr{A} = \mathscr{B} = \frac{1}{2}\frac{r}{n_1 - n_0}, \quad \mathscr{C} = -\frac{r}{n_1 - n_0}, \tag{2}$$

r 是这个面的傍轴曲率半径.

让我们来研究在什么条件下，来自 P_0（它可假定位于平面 $x = 0$ 上）的所有光线在折射以后都将通过 P_1. 此时 P_1 的坐标将只取决于 P_0 的坐标，而不取决于光线分量，因此，如果从 (1b) 式中消去 q_1 时，q_0 也必定不出现.

现在由 (1b) 式的第一式得出

$$q_1 = \frac{1}{\mathscr{C}}\left\{y_0 - q_0\left(2\mathscr{A} + \frac{1}{n_0} z_0\right)\right\}, \tag{3}$$

把上式代入到 (1b) 的第二式中，我们得到

$$y_1 = -\left(2\mathscr{B} - \frac{1}{n_1} z_1\right)\frac{1}{\mathscr{C}} y_0 + \left[\frac{1}{\mathscr{C}}\left(2\mathscr{B} - \frac{1}{n_1} Z_1\right)\left(2\mathscr{A} + \frac{1}{n_0} z_0\right) - \mathscr{C}\right] q_0. \tag{4}$$

所以，如果

$$\left(2\mathscr{A} + \frac{1}{n_0} z_0\right)\left(2\mathscr{B} - \frac{1}{n_1} z_1\right) = \mathscr{C}^2, \tag{5}$$

或用 (2) 式代入，如果

$$\left[\frac{r}{n_1 - n_0} + \frac{z_0}{n_0}\right]\left[\frac{r}{n_1 - n_0} - \frac{z_1}{n_1}\right] = \frac{r^2}{(n_1 - n_0)^2}, \tag{6}$$

则 P_1 将是 P_0 的一个无象散的象. (6) 式可写成以下的形式:

$$n_0\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{z_0}\right] = n_1\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{z_1}\right]. \tag{7}$$

可以看出，在目前的近似级范围内，每一点都产生一个无象散的象；从折射面的极点 O 到两个共轭平面的距离由(7)式相联系. 而

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

且，(4) 式在满足 (5) 式的条件下，就意味着这种成象是一个投影变换.

(7)式每一边的表达式通常称为阿贝(折射)不变量，它在光学成象理论中起重要作用. (7)式也可以写成以下的形式：

$$\frac{n_1}{z_1}-\frac{n_0}{z_0}=\frac{n_1-n_0}{r}. \tag{8}$$

$(n_1-n_0)/r$ 这个量通常称为折射面的光焦度 (power)，用 $\mathscr{P}$ 来表示，

$$\mathscr{P}=\frac{n_1-n_0}{r}. \tag{9}$$

根据(4)和(5)式，当 $z_1/n_1=2\mathscr{B}+\mathscr{C}$ 时，横向放大率 y_1/y_0 等于 1. 但由 (2) 式得出，$2\mathscr{B}+\mathscr{C}=0$. 所以主点 U_0 和 U_1 由 $z_0=z_1=0$ 给出，即主点均与折射面的极点重合. 而且由 (8) 式得出，

$$z_0\to-\frac{n_0r}{n_1-n_0} \quad 当\ z_1\to\infty,$$

和

$$z_1\to\frac{n_1r}{n_1-n_0} \quad 当\ z_0\to-\infty,$$

因此焦点 F_0 和 F_1 的横坐标分别是 $-n_0r/(n_1-n_0)$ 和 $n_1r/(n_1-n_0)$. 所以焦距 $f_0=F_0U_0$ 和 $f_1=F_1U_1$ 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} f_0&=\frac{n_0r}{n_1-n_0},\\ &和\\ f_1&=-\frac{n_1r}{n_1-n_0};\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

或用折射面的光焦度 $\mathscr{P}$ 来表示[1]，

---

1) 以后将看到，关系式 $n_0/f_0=-n_1/f_1$ 不限于单个折射面，而且一般对任何一个共轴系统也成立，带有下标 0 的量是物空间的，带有下标 1 的量是象空间的. 因此(11)式可看作一般共轴系统的光焦度的定义. 光焦度的实用单位是屈光度 (dioptre)；当焦距用米表示时，它就是焦距的倒数. 若系统是会聚的 $(f_0>0)$，其光焦度为正；若系统是发散的 $(f_0<0)$，其光焦度为负.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{n_0}{f} = -\frac{n_1}{f_1} = \mathscr{P}. \tag{11}$$

因为 f_0 和 f_1 有不同的符号，所以成象是同向的（参看 § 4.3.3）．如果折射面凸向入射光（$r > 0$），并且 $n_0 < n_1$，则 $f_0 > 0$，$f_1 < 0$，成象是会聚的．如果 $r > 0$ 和 $n_0 > n_1$，则成象是发散的（图 4.12）．当折射面凹向入射光时，情况相反．

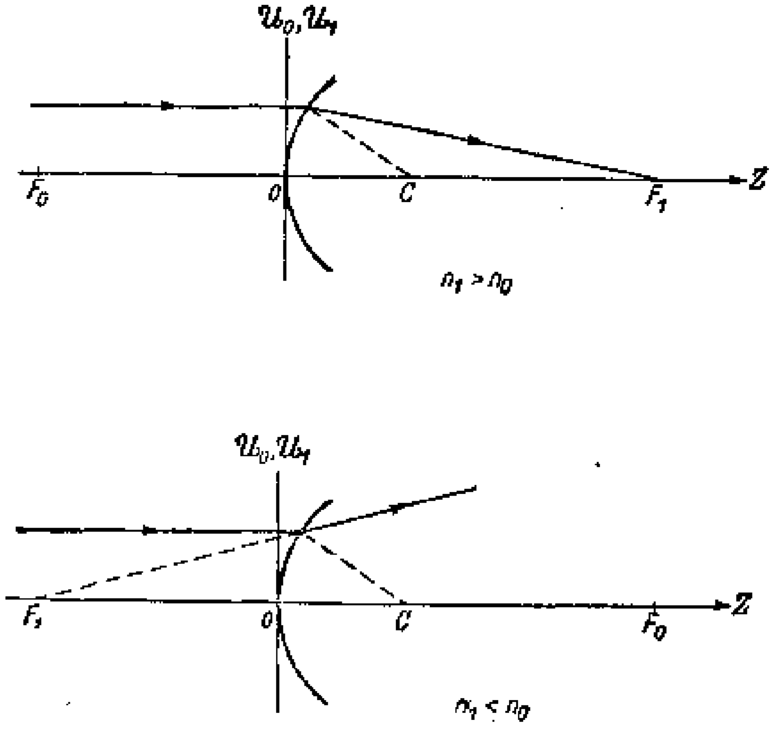


图 4.12　在一个旋转面上折射时基点的位置

利用焦距表达式 (10)，(8) 式变为

$$\frac{f_0}{z_0} + \frac{f_1}{z_1} = -1; \tag{12}$$

(2) 式的系数可写成以下的形式：

$$\mathscr{A} = \frac{f_0}{2n_0}, \quad \mathscr{B} = -\frac{f_1}{2n_1}, \quad \mathscr{C} = -\frac{f_0}{n_0} = \frac{f_1}{n_1}. \tag{13}$$

让我们引入物空间和象空间各自的坐标系，其原点分别在其焦点处，其轴分别平行于 O 处的轴：

$$X_0 = x_0, \quad X_1 = x_1,$$
$$Y_0 = y_0, \quad Y_1 = y_1,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$Z_0 = z_0 + f_0, \quad Z_1 = z_1 + f_1.$$

(12)和(4)式，在满足(5)式的条件下，就简化为标准形式§ 4.3(10)式：

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{f_0}{Z_0} = \frac{Z_1}{f_1}. \tag{14}$$

§ 4.4.2 旋转反射面

可以看出，当旋转面上发生反射时，利用严格类似于前一节所用的表示法，则(1a)和(1b)形式的方程也成立，但这时系数 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 要用 §4.1.5 中对应的系数 $\mathscr{A}'$，$\mathscr{B}'$ 和 $\mathscr{C}'$ 来代替. §4.1.5 中已经指出，从 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的表达式中，令 $n_0 = -n_1 = n$，就可以得到 $\mathscr{A}'$，$\mathscr{B}'$ 和 $\mathscr{C}'$. n 表示光线所在媒质的折射率. 因此，在前面的公式中作此代换以后，就可以直接写出合适的反射公式了. 特别是，(7)式给出了

$$\frac{1}{z_0} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{z_1} + \frac{1}{r}, \tag{15}$$

(15)式每一边的表达式就是阿贝(反射)不变量. (15)式也可以写成

$$\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} = \frac{2}{r}. \tag{16}$$

现在，焦距 f_0 和 f_1 由下式给出：

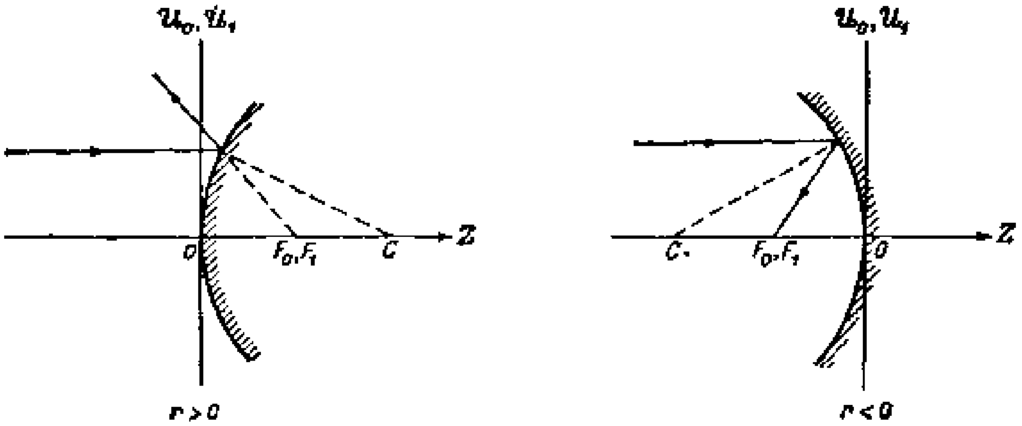


图 4.13 在一个旋转镜面上反射时基点的位置

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$f_0 = f_1 = -\frac{r}{2}, \tag{17}$$

光焦度 $\mathscr{P}$ 为

$$\mathscr{P} = -\frac{2n}{r}. \tag{18}$$

因为 $f_0 f_1 > 0$，所以成象是反向（反射）的．当反射面凸向入射光时，($r > 0$)，$f_0 < 0$，则成象是发散的；当反射面凹向入射光时，($r < 0$)，$f_0 > 0$，则成象是会聚的（图 4.13）．

§ 4.4.3 厚透镜

其次，我们来推导通过绕同一轴旋转对称的两个面成象的高斯公式．

设 n_0，n_1 和 n_2 分别是三个区域的折射率，以光通过它们的先后为序，又设 r_1 和 r_2 是这两个面在其轴点处的曲率半径，当曲面凸向入射光时，测得的曲率半径是正的．

利用 (10) 式，第一个面的焦距为

$$f_0 = \frac{n_0 r_1}{n_1 - n_0}, \quad f_0' = -\frac{n_1 r_1}{n_1 - n_0}, \tag{19}$$

第二个面的焦距为

$$f_1 = \frac{n_1 r_2}{n_2 - n_1}, \quad f_1' = -\frac{n_2 r_2}{n_2 - n_1}. \tag{20}$$

根据 § 4.3(27) 式，组合的焦距为

$$f = -\frac{f_0 f_1}{c}, \quad f' = \frac{f_0' f_1'}{c}, \tag{21}$$

式中的 c 是焦点 F_0' 和 F_1 之间的距离．设 t 是透镜的轴向厚度，即两个面的极点之间的距离；则有（见图 4.14）

$$c = t + f_0' - f_1. \tag{22}$$

用 f_0' 和 f_1 的表达式代入 (22) 式中，我们得出

$$c = \frac{D}{(n_1 - n_0)(n_2 - n_1)}, \tag{23}$$

式中

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

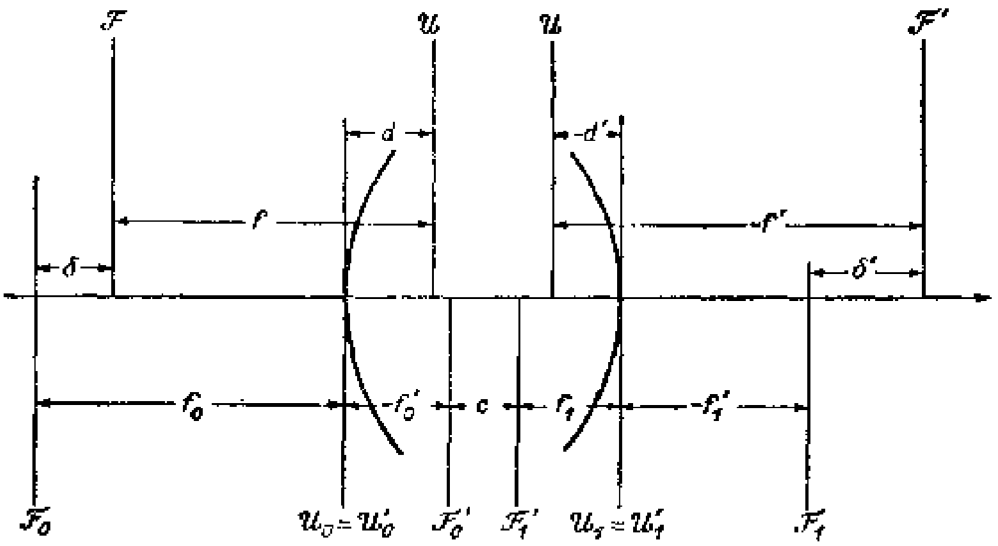


图 4.14 一个组合系统(厚透镜)的基点

$$D=(n_1-n_0)(n_2-n_1)t-n_1[(n_2-n_1)r_1+(n_1-n_0)r_2].\quad(24)$$

现在把 f_0, f_1, f_0', f_1' 和 c 的表达式代入(21)中,就得到所要求的组合焦距表达式:

$$f=-n_0 n_1\frac{r_1 r_2}{D},\quad f'=n_1 n_2\frac{r_1 r_2}{D}.\qquad(25)$$

因为 ff' 是负的,所以成象是同向的. 这种透镜的光焦度 $\mathscr{P}$ 为

$$\begin{aligned}\mathscr{P}&=\frac{n_0}{f}=-\frac{n_2}{f'}=-\frac{1}{n_1}\frac{D}{r_1 r_2}\\&=\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2-\frac{t}{n_1}\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2,\end{aligned}\qquad(26)$$

式中的 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 分别是两个面的光焦度.

利用 § 4.3(28) 式,可以看到,距离 $\delta=F_0F$ 和 $\delta'=F_1'F'$ 为

$$\delta=-n_0 n_1\frac{n_2-n_1}{n_1-n_0}\frac{r_1^2}{D},\quad \delta'=n_1 n_2\frac{n_1-n_0}{n_2-n_1}\frac{r_2^2}{D}.\qquad(27)$$

从两个面的极点到主平面 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}'$ 的距离 d 和 d' 为(见图 4.14)

$$\left.\begin{aligned}d&=\delta+f-f_0=-n_0(n_2-n_1)\frac{r_1 t}{D},\\ d'&=\delta'+f'-f_1'=n_2(n_1-n_0)\frac{r_2 t}{D}.\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

特别重要的是透镜两侧的媒质有相同折射率这种情况,即这

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时 $n_2 = n_0$. 令 $n_1/n_0 = n_1/n_2 = n$，则上述公式简化为

$$\left.\begin{aligned} &f = -f' = -\frac{nr_1r_2}{\Delta}, \\ &\delta = n\frac{r_1^2}{\Delta},\quad \delta' = -n\frac{r_2^2}{\Delta}, \\ &d = (n-1)\frac{r_1 t}{\Delta},\quad d' = (n-1)\frac{r_2 t}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

式中

$$\Delta = (n-1)[n(r_1 - r_2) - (n-1)t] \tag{30}$$

以焦点 F 和 F' 处的轴为参考系，则主点的横坐标为 $Z = f$ 和 $Z' = f'$，节点的横坐标为 $Z = -f'$，$Z = -f$. 因为 $f = -f'$，所以这时主点和节点重合. 从主平面到共轭平面的距离 ζ 和 ζ' 两者的关系式 § 4.3(16) 则变为

$$\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta'} = \frac{1}{f}. \tag{31}$$

透镜**会聚** ($f > 0$) 或**发散** ($f < 0$) 取决于

$$f = -n\frac{r_1r_2}{\Delta} \gtrless 0, \tag{32}$$

即取决于

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \lessgtr \frac{n-1}{n}\frac{t}{r_1r_2}. \tag{33}$$

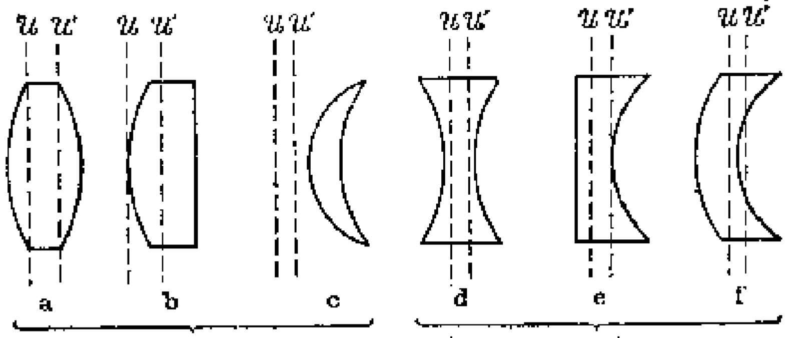


图 4.15 透镜的普通类型:

(a) 双凸; (b) 平凸; (c) 会聚弯月形;
(d) 双凹; (e) 平凹; (f) 发散弯月形.
$\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}'$ 是主平面，假定光从左边入射

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当 $f\to\infty$ 时，我们就得到望远成象这一中间情况. 这时 $\Delta=0$、即

$$r_1-r_2=\frac{n-1}{n}t. \tag{34}$$

这三种情况可通过考察一个双凸透镜 ($r_1>0$, $r_2<0$) 加以说明(参看图 4.15). 为了简单起见，我们假定两个半径在数值上相等，即 $r_1=-r_2=r$，则成象会聚或发散，取决于 $t\lessgtr 2nr/(n-1)$、当 $t=2nr/(n-1)$ 时，则是望远的.

§4.4.4 薄透镜

当透镜薄到轴向厚度 t 可以忽略时，前面的公式就得出特别简单的形式. 这时，根据 (28) 式，$d=d'=0$，因此主平面通过(无限薄)透镜的轴点. 结果，通过透镜中心的光线将没有任何偏转；这就意味着，一个薄透镜成象是对透镜中心的中心投影.

由 (26) 式得出，令 $t=0$，则

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2=\frac{n_1-n_0}{r_1}+\frac{n_2-n_1}{r_2}. \tag{35}$$

即一个薄透镜的光焦度等于它的两个面的光焦度之和.

如果透镜两侧的媒质具有相同的折射率 ($n_0=n_2$)，则由 (25) 式得出，

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \tag{36}$$

和前面一样，式中的 $n=n_1/n_0=n_1/n_2$. 假定 $n>1$，通常是这种情况，由此看出，f 为正或负，取决于第一个面的曲率 $1/r_1$ 大于或小于第二个面的曲率 $1/r_2$ (曲率要取适当的符号). 这就意味着，从中央到边缘厚度递减的薄透镜是会聚的，从中央到边缘厚度递增的薄透镜是发散的.

因为以后要用，我们在这里将写出由两个放在空气中的共轴薄透镜组成的系统的焦距 f 和 f' 的表达式. 根据 §4.3(27) 式，因为 $f_0=-f_0'$, $f_1=-f_1'$，所以

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{f'}=-\frac{c}{f_0f_1}, \tag{37}$$

c 是焦点 F_0' 和 F_1 之间的距离(见图 4.16). 设 l 是两个透镜之间的距离,则

$$l=f_0+c+f_1. \tag{38}$$

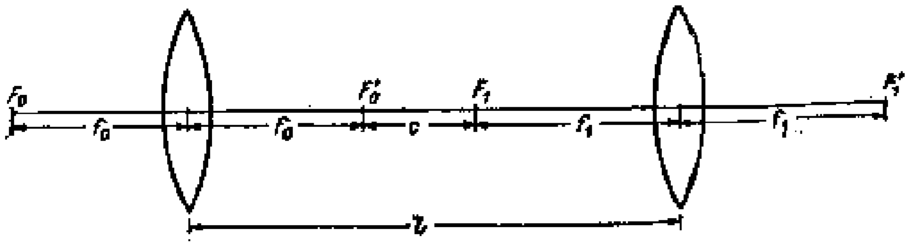


图 4.16 两个共轴薄透镜组成的系统

因此,

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{f'}=\frac{1}{f_0}+\frac{1}{f_1}-\frac{l}{f_0f_1}. \tag{39}$$

如果两个透镜相接触 ($l=0$), 则 (39) 式也可写成以下的形式: $\mathscr{P}=\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2$, 因此这种组合的光焦度简单地等于两个透镜的光焦度之和.

§4.4.5 一般共轴系统

已经看到, 在高斯理论的近似范围内, 在一个旋转面上折射或反射, 就在物空间和象空间之间形成一种投影关系[1].因为根据§4.3,相继作投影变换是与单个投影变换等效的,由此得出,在目前的近似程度上,一个共轴系统的成象也是这一类型的变换. 这个等效变换的各个基点可以用 §4.4.1,§4.4.2 和 §4.3.4 的公式求出来. 我们将主要限于讨论对一个重要的不变量关系式的推导, 它(在目前的准确度范围内)对任何共轴系统都是有效的.

---

1) 如同单个面的情况那样,物空间和象空间被看作是彼此重叠的, 并且在所有方向上无界地扩展. (以光通过系统时的先后为序),物空间位于第一个面前方的部分就称为物空间的实部,象空间位于最后一个面后方的部分就称为象空间的实部. 物空间和象空间的其余部分就称为虚部. 我们可以用类似的方法来定义系统的任一中间空间的实部和虚部.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

设 $S_1, S_2, \cdots S_m$ 是系统的相继各个面，$f_0, f_1, \cdots f_{m-1}$ 是相应的焦距，$n_0, n_1, \cdots n_m$ 是相继各空间的折射率(图 4.17)．而且，设 P_0 和 P_0^* 是物空间中位于一个子午面上的两点，P_1 和 P_1^*，P_2 和 P_2^*，$\cdots$ 是这两点通过相继各个面所形成的象．以第一个面的两个焦点处的轴为参考系，则 P_0，P_0^* 和 P_1，P_1^* 的坐标以(14)式相联系，即

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{f_0}{Z_0} = \frac{Z_1}{f_1}, \tag{40}$$

$$\frac{Y_1^*}{Y_0^*} = \frac{f_0}{Z_0^*} = \frac{Z_1^*}{f_1}. \tag{41}$$

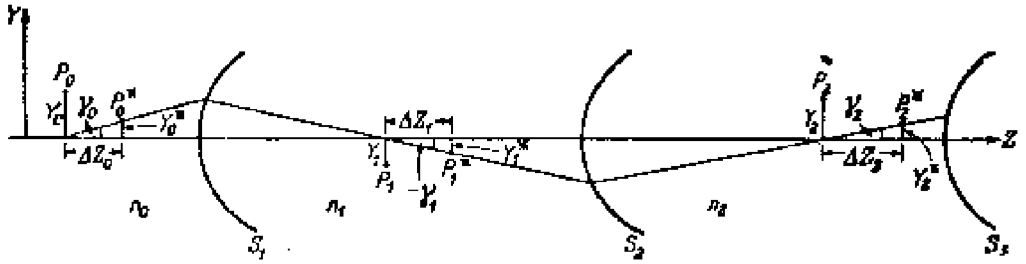


图 4.17　史密斯-亥姆霍兹公式的图示

因此

$$\frac{Z_1^* - Z_1}{f_1} = \frac{Y_1^*}{Y_0^*} - \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{Y_0 Y_1^* - Y_1 Y_0^*}{Y_0 Y_0^*}, \tag{42}$$

$$\frac{Z_0^* - Z_0}{f_0} = \frac{Y_0^*}{Y_1^*} - \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{Y_1 Y_0^* - Y_0 Y_1^*}{Y_1 Y_1^*}. \tag{43}$$

设

$$\left.\begin{aligned} Z_0^* - Z_0 &= \Delta Z_0, \\ Z_1^* - Z_1 &= \Delta Z_1. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

则由 (42) 和 (43) 式得到

$$\frac{f_0 Y_0 Y_0^*}{\Delta Z_0} = -\frac{f_1 Y_1 Y_1^*}{\Delta Z_1}. \tag{45}$$

现在利用 (10) 式，$f_0/f_1 = -n_0/n_1$，因此 (45) 式可写成

$$\frac{n_0 Y_0 Y_0^*}{\Delta Z_0} = \frac{n_1 Y_1 Y_1^*}{\Delta Z_1}. \tag{46}$$

类似地，对于第二个面上的折射，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{n_1 Y_1 Y_1^*}{\Delta Z_1} = \frac{n_2 Y_2 Y_2^*}{\Delta Z_2}, \tag{47}$$

推广到一般，

$$\frac{n_{i-1} Y_{i-1} Y_{i-1}^*}{\Delta Z_{i-1}} = \frac{n_i Y_i Y_i^*}{\Delta Z_i}, \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{48}$$

因此，$nY_iY_i^*/\Delta Z_i$ 就是在相继变换中的一个不变量．这个结果在成象的几何理论中起着重要的作用． 令 $Y_i^*/\Delta Z_i = \tan\gamma_i$（见图 4.17），则 (48) 式变为

$$n_{i-1} Y_{i-1} \tan\gamma_{i-1} = n_i Y_i \tan\gamma_i.$$

由于对目前的准确度来说，$\tan\gamma$ 和 $\tan\gamma'$ 可以分别用 γ 和 γ' 来代替，我们就得到了史密斯-亥姆霍兹公式[1)]：

$$n_{i-1} Y_{i-1} \gamma_{i-1} = n_i Y_i \gamma_i. \tag{49}$$

这个量 $n_i Y_i \gamma_i$ 通常称为史密斯-亥姆霍兹不变量．

由 (48) 和 (49) 式可以得出一些重要的结论．由于通常感兴趣的只是第一种媒质和最后一种媒质（物空间和象空间）各个量之间的关系，我们将去掉下标，而分别用不带撇和带撇的符号来表示物空间和象空间的各个量．

设 (Y, Z) 和 $(Y + \delta Y, Z + \delta Z)$ 是物空间中两个邻近点，(Y', Z') 和 $(Y' + \delta Y', Z' + \delta Z')$ 是它们的共轭点．相继地利用史密斯-亥姆霍兹公式，得出以下的关系式：

$$\frac{nY(Y + \delta Y)}{\delta Z} = \frac{n'Y'(Y' + \delta Y')}{\delta Z'}. \tag{50}$$

在 $\delta Y \to 0$ 和 $\delta Z \to 0$ 的极限情况中，上式化为

$$\frac{dZ'}{dZ} = \frac{n'}{n} \frac{Y'^2}{Y^2}. \tag{51}$$

根据 § 4.3 (11) 式，可写出 $Y'/Y = (dY'/dY)_{Z=\text{常数}}$，(51) 式就变为

$$\frac{dZ'}{dZ} = \frac{n'}{n}\left(\frac{dY'}{dY}\right)^2_{Z=\text{常数}}, \tag{52}$$

---

1) 这个公式也以拉格朗日和克劳修斯的名字命名． 实际上，更早的作者[例如惠更斯和科茨 (Cotes)] 已经知道这个公式的较局限的形式[参看 Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5) **21** (1886), 466]．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上式通常称为麦克斯韦伸长公式. 它的意思是，轴向放大率等于横向放大率的平方与折射率之比 n'/n 的乘积. 在§4.3中，我们已经导出一个类似的公式(13)，把两种放大率和焦距比联系起来. 比较这两个公式，就可以看出：

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}, \tag{53}$$

即仪器焦距之比等于折射率之比 n'/n 取负值.

由史密斯-亥姆霍兹公式也可得出

$$\frac{dY'}{dY}\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{n}{n'}. \tag{54}$$

它表明，横向放大率和角放大率的乘积与共轭平面的选择无关.

至今一直假定系统只是由折射面组成的. 如果其中有一个面(设为第 i 个面)是反射镜面，则代替 (48) 式而得出

$$\frac{Y_{i-1}Y^*_{i-1}}{\Delta Z_{i-1}} = -\frac{Y_iY^*_i}{\Delta Z_i},$$

负号是由于反射时 $f_{i-1}/f_i = 1$，而折射时 $f_{i-1}/f_i = -n_{i-1}/n_i$. 结果在最后各公式中，$n'$ 必须用 $-n'$ 来代替. 更一般地说，当系统包含奇数个反射镜面时，n' 必须用 $-n'$ 来代替；当系统包含偶数个反射镜面时，最后各公式保持不变.

§4.5 广角光锥的无象散成象

前面假定物的尺度和光线与轴的夹角都足够小，从而导出高斯光学的各个定律. 但经常还必须考虑这样的系统，其中物的线度很小，而光线的倾角并不小. 关于这种仪器中的无象散成象，有两个简单的判据，通常称为正弦条件[1)]和赫谢耳(Herschel)条件[2)].

---

1) 正弦条件首先由克劳修斯 [R. Clausius, *Pogg. Ann.*, **121** (1864), 1] 和亥姆霍兹 [H. Helmholtz, *Pogg. Ann. Jubelband* (1874), 557] 从热力学考虑导出. 但一直到阿贝 [E. Abbe, *Jenaisch. Ges. Med. Naturw.* (1879), 129, 和 *Carl. Repert. Phys.*, **16** (1880), 303] 重新发现时，才认识到它的重要性.

这里给出的推导，实质上根据 C. Hockin, *J. Roy. Micro. Soc.* (2) **4** (1884), 337.

2) J. F. W. Herschel, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **111** (1821), 226.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

设 O_0 是在轴上的一个物点，P_0 是在它邻近的任一点，不一定在轴上．假定系统使这两点无象散成象，O_1 和 P_1 是其无象散的象．

设 (x_0, y_0, z_0) 和 (x_1, y_1, z_1) 分别是 P_0 和 P_1 的坐标，P_0 和 P_1 分别以 O_0 和 O_1 处的直角坐标轴为参考系，两套轴互相平行，取 z 方向沿着这系统的轴(图 4.18)．根据等光程原理，连接 P_0 和 P_1 的所有光线的程长都相等．因此，如果 V 表示媒质的点特征函数，则

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) - V(0, 0, 0; 0, 0, 0) = F(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1), \tag{1}$$

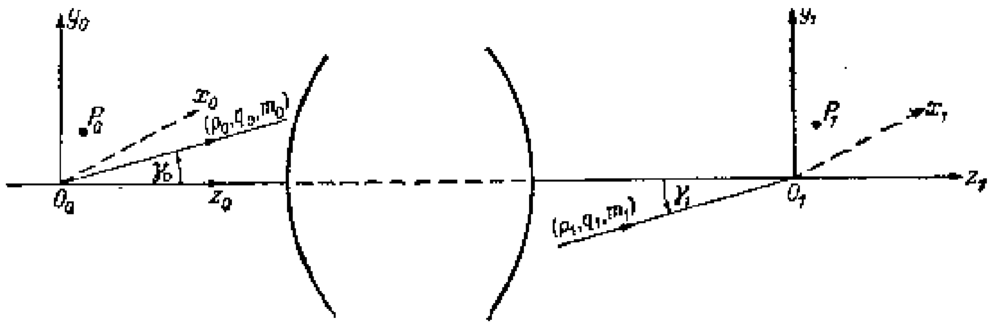


图 4.18　正弦条件和赫谢耳条件的图示

F 是与光线分量无关的某一函数．利用由点特征函数表示光线分量的基本关系式 § 4.1(7)，并且忽略距离的高于一次方的项，则由 (1) 式得出：

$$(p_1^{(0)}x_1 + q_1^{(0)}y_1 + m_1^{(0)}z_1) - (p_0^{(0)}x_0 + q_0^{(0)}y_0 + m^{(0)}z_0) = F(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1), \tag{2}$$

$(p_0^{(0)}, q_0^{(0)}, m_0^{(0)})$ 和 $(p_1^{(0)}, q_1^{(0)}, m_1^{(0)})$ 是通过 O_0 和 O_1 的任一对相应光线的光线分量．必须注意，虽然我们假定点 P_0 和 P_1 在 O_0 和 O_1 近邻，但对光线分量的大小并没有加以限制．

有两种情况是特别有意义的，即 (i) P_0 和 P_1 分别位于 $z_0 = 0$ 和 $z_1 = 0$ 平面上，(ii) P_0 和 P_1 在对称轴上．我们将分别讨论这两种情况．

§ 4.5.1　正弦条件

这里我们仍然可以只考虑子午面 $(x_0 = x_1 = 0)$ 上的那些点，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这并不失其普遍性. 如果 P_0 和 P_1 分别位于 $z_0=0$ 和 $z_1=0$ 平面上,则(2)式变为

$$q_1^{(0)}y_1-q_0^{(0)}y_0=F(0,\ y_0,\ 0;\ 0,\ y_1,\ 0). \tag{3}$$

这个关系式对每一对共轭光线都成立. 因而具体地说,它对于一对轴向光线 $p_0^{(0)}=q_0^{(0)}=0$ 和 $P_1^{(0)}=q_1^{(0)}=0$ 也必须成立. 因此

$$F(0,\ y_0,\ 0;\ 0,\ y_1,\ 0)=0. \tag{4}$$

(3)式变为

$$q_1^{(0)}y_1=q_0^{(0)}y_0, \tag{5}$$

或写成明显的形式:

$$n_1y_1\sin\gamma_1=n_0y_0\sin\gamma_0, \tag{6}$$

γ_0 和 γ_1 是通过 O_0 和 O_1 的对应光线与 z 轴的夹角, n_0 和 n_1 是物空间和象空间的折射率. (6)式通常称为正弦条件,它是物平面在轴近邻的一个小区域通过具有任一角发散度的光锥锐成象所要求的条件. 如果角发散度足够小, $\sin\gamma_0$ 和 $\sin\gamma_1$ 可分别用 γ_0 和 γ_1 来代替,正弦条件就化为史密斯-亥姆霍兹公式 §4.4(49).

如果物位于无穷远,则正弦条件取不同的形式. 先假定轴上一物点离第一个面很远. 现在以第一焦点处的轴为参考系,设 z_0 是这一物点的横坐标; 又设这一点发出的一条光线与第一个面相交,其交点离轴的高度为 h_0; 则 $\sin\gamma_0\sim-h_0/z_0$. 更精确地说,当 $z_0\to-\infty$ 而 h 保持恒定时, $z_0\sin\gamma_0/h\to-1$. 因此, 如果 z_0 的绝对值足够大,则(6)式可写成

$$\frac{n_0}{n_1}h_0=-\frac{y_1}{y_0}z_0\sin\gamma_1. \tag{7}$$

利用 §4.3(10)式, $y_1z_0/y_0=f_0$, 又利用 §4.4(53)式, $n_0/n_1=-f_0/f_1$, 因此在这种极限情况下, (6)式化为(见图 4.19):

$$\frac{h_0}{\sin\gamma_1}=f_1. \tag{8}$$

这意味着, 每一条平行于轴方向的入射光线与其共轭光线相交于一个半径为 f_1 的球面上,其中心在焦点 F_1 处.

如果轴上有两个点,它们彼此互为无象散的象,而且通过它们

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

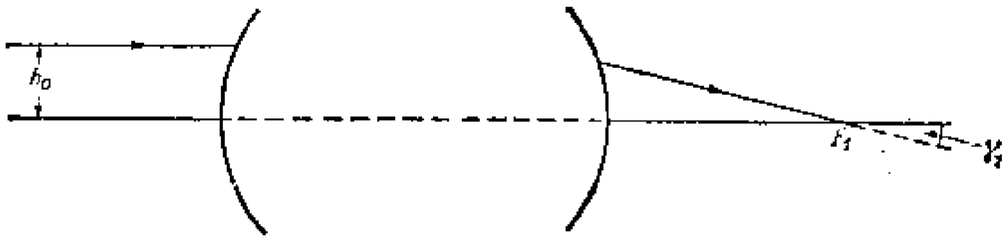


图 4.19 物在无穷远时的正弦条件

的共轭光线满足正弦条件，则这两点称为一对不晕点．我们在讨论一个球面上的折射时，已经碰到过这样的点对了（§4.2.3）．

在象差理论的术语中（参看第五章），轴上无象散就意味着，在特征函数的展开式中所有与物离轴的距离无关的各项都不存在，即所有各级球面象差都不存在．如果此外还满足正弦条件，则在特征函数中所有与离轴距离的一次方有关的各项也必须为零，这些项所代表的象差通常称为圆彗差．

因为正弦条件利用沿轴光锥的性质而给出关于轴外象的质量情况，所以它对光学设计是很重要的．

§4.5.2 赫谢耳条件

其次，考虑 P_0 和 P_1 位于系统轴上的情况 $(x_0 = y_0 = 0,\ x_1 = y_1 = 0)$．这时，锐成象的条件 (2) 式简化为

$$m_1^{(0)} z_1 - m_0^{(0)} z_0 = F(0,0,z_0;0,0,z_1), \tag{9}$$

或用 γ_0 和 γ_1 来表示，

$$n_1 z_1 \cos\gamma_1 - n_0 z_0 \cos\gamma_0 = F(0,0,z_0;0,0,z_1). \tag{10}$$

对于沿轴光线这一特殊情况，上式给出：

$$F(0,0,z_0;0,0,z_1) = n_1 z_1 - n_0 z_0. \tag{11}$$

因此 (10) 式可以写成

$$n_1 z_1 \sin^2(\gamma_1/2) = n_0 z_0 \sin^2(\gamma_0/2). \tag{12}$$

这就是赫谢耳条件的一种形式．因为假定离开原点的距离是很小的，利用 §4.4(52) 式就得到

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{n_1}{n_0}\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2, \tag{13}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此赫谢耳条件也可写成以下的形式:

$$n_1 y_1 \sin(\gamma_1/2) = n_0 y_0 \sin(\gamma_0/2). \qquad (14)$$

当满足赫谢耳条件时，一个紧挨着 O_0 的轴元将通过一锥光线锐成象，而不管这锥光线的角发散度如何.

必须注意，除非 $\gamma_1 = \gamma_0$，否则正弦条件和赫谢耳条件就不能同时成立. 当 $\gamma_1 = \gamma_0$时，$y_1/y_0 = z_1/z_0 = n_0/n_1$，即这时轴向放大率和横向放大率均必须等于物空间和象空间的折射率之比.

§4.6 象散光锥

有一公共点的直线光线所形成的光锥，称为共心光锥. 相应的波阵面是以光线公共交点为球心的球面. 我们在前面几节中所讨论的就是这种光锥.

一般地说，在折射或反射时，光锥的共心性遭到破坏. 因此，研究更一般的直线光锥的特性是有用处的.

§4.6.1 细光锥的焦点特性

设 S 代表直线光锥的一个正交轨面(波阵面)，P 是这个面上任一点(图 4.20). 作一个包含 P 点那条光线的平面，这个平面与 S 相交的曲线记作 C. 因为这一锥光线都与 S 相垂直，所以 P 处的曲率圆心将位于通过 P 的那条光线上.

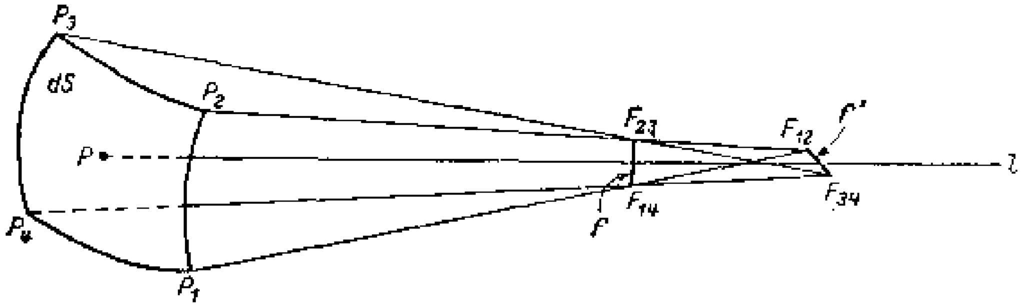


图 4.20 一个细光锥

如果这个平面绕着这条光线逐渐转动，则曲线 C 以及它的曲率半径将连续变化. 当这个平面已转过 180° 时，曲率半径必已先

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

后通过其极大值和极小值． 由基础几何学可以证明[1]，包含最短或最长曲率半径的两个平面互相垂直．这两个平面通常称为 P 处的主平面[2]，对应的半径称为主曲率半径．在 S 面上且每一点都与主平面相切的曲线，构成两个互相正交的曲线族，它们称为曲率线．

一级近似时，一个面上相邻两点的法线一般不相交． 但如果是由一条曲率线上相邻各点引出法线，则在一级近似时，这些法线将相交，它们的交点就是由这些法线（光线）构成的线汇的一个焦点．因此，与§3.2.3中的一般性结论一致，每一条法线上有两个焦点，它们也就是两个主曲率中心．所以，直线光锥的焦散面一般有两个分支，并且，这个焦散面是那些波阵面的一个渐屈面(evolute)；反过来说，那些波阵面是这个焦散面的一些渐展面(involute)． 如果波阵面是一些旋转面，则焦散面的一个分支退化为一段旋转轴；而另一分支为一旋转面，它的子午截线是一波阵面子午截线的渐屈线．

考虑一个由与波阵面元 dS 相交的所有光线组成的细光锥．为了方便起见，取两对曲率线作为 dS 的边界，可假定这些曲率线为圆弧．其中两条（P_1P_2 和 P_4P_3）可取在垂直方向，另外两条（P_1P_4 和 P_2P_3）在水平方向（图 4.20）．

在各微小量的一级近似下，通过弧 P_1P_2 的所有光线将相交于焦点 F_{12}，而通过弧 P_3P_4 的所有光线将相交于 F_{34}． F_{12} 和 F_{34} 的连线 f' 通常称为光锥的焦线，它是水平的．类似地，通过 P_1P_4 和 P_2P_3 的光线将产生垂直焦线 f．

如果通过 dS 上任一点作曲率线，则相应的两个焦点将位于两条焦线上，反之亦然．因此，连接两个互相正交的线元上所有各对点，就得出一个细光锥的近似模型．

---

1) 例如，见 C. E. Weatherburn, *Differential Geometry of Three Dimensions* (Cambridge University Press, 1927), p. 185.

2) 主平面和焦平面这两个名词现在的含义，不同于§4.3讨论投影变换时所使用的含义．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

通过中心点 P 的光线 l 称为光锥的中央光线（或主光线），两焦线在这条光线上的距离称为光锥的象散焦差（astigmatic focal distance）。分别由 f 和 l 或 f' 和 l 规定的两个平面通常称为光锥的焦平面，它们互相垂直。然而，焦线垂直于中央光线这种说法却不一定正确（文献中常常这样错误地断言）。例如，考虑一族波阵面，它们绕一共同轴圆柱对称（图 4.21）。设 dS 是其中一个波阵面的面元（假定不包含轴上的点），又设 ds 是 dS 与一个包含轴的平面的交线。显然，这时 ds 的曲率中心 K 处的焦线 f 垂直于这个平面。而另一焦线 f' 与 ds 两端的法线所夹的一段轴重合。这一焦线一般不垂直于 l。

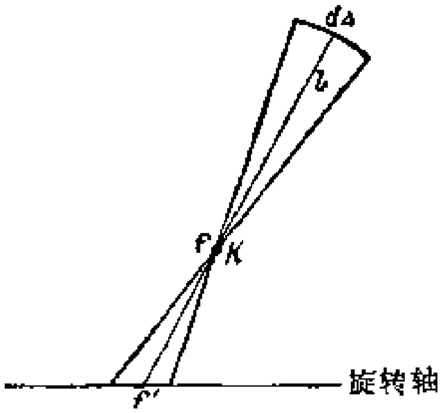


图 4.21 圆柱对称波阵面的焦线

§ 4.6.2 细光锥的折射

已经知道，一个细光锥是由它的中央光线和两条焦线完全确定的。假定这样规定的一个光锥入射到一个折射面上。这时重要的是确定折射光锥的中央光线和两条焦线。我们将考虑在实际中特别重要的情况：这时，入射光锥的一个主平面，与折射面在与中央光线交点 O 处的主曲率平面重合（图 4.22）。

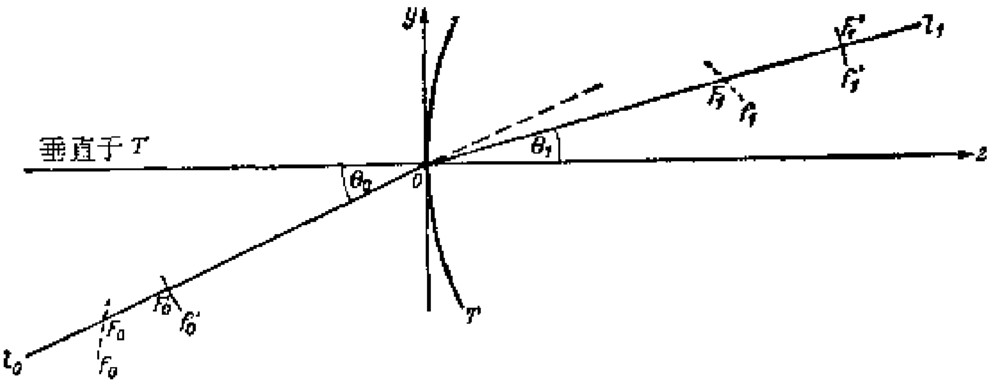


图 4.22 一个细象散光锥的折射

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在 O 处作笛卡儿坐标轴，Oz 沿着 T 面的法线，Ox 和 Oy 分别在 T 的主曲率线方向上.

又设 θ_0 和 θ_1 是两个光锥的中央光线 l_0 和 l_1 与 Oz 的夹角. F_0 和 F_0' 是入射光锥的焦点，分别位于 $z=\zeta_0$ 和 $z=\zeta_0'$ 处. 假定 F_0 处的焦线垂直于入射面，则 F_0 称为第一焦点，相应的焦线 f_0 称为第一焦线. 焦点 F_0' 称为第二焦点，相应的焦线 f_0'（位于入射面上）称为第二焦线. 在共轴系统的情况下，中央光线位于子午面上的光锥的第一和第二焦点，通常分别称为切向焦点和径向焦点.

为了找出折射光锥的焦线，必须先写出折射面的角特征函数表达式. 如果折射面在主方向 Ox 和 Oy 上的曲率半径分别为 r_x 和 r_y，则这个面的方程为

$$z=\frac{x^2}{2r_x}+\frac{y^2}{2r_y}+\cdots. \tag{1}$$

现在根据 § 4.1(34) 式，以 O 处的一套轴为参考系的角特征函数为（取 $a_0=a_1=0$）

$$T=(p_0-p_1)x+(q_0-q_1)y+(m_0-m_1)z. \tag{2}$$

用类似于§4.1所述的方法（它相当于 $r_x=r_y$ 的情形），由折射定律得出，当只保留最低次方的项时，则有

$$\left.\begin{aligned} x&=-r_x\frac{p_0-p_1}{m_0-m_1},\\ y&=-r_y\frac{q_0-q_1}{m_0-m_1}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

代入 (1) 式，得出

$$z=\frac{1}{2\mu^2}[r_x(p_0-p_1)^2+r_y(q_0-q_1)^2]+\cdots \tag{4}$$

其中

$$\mu=m_1-m_0=n_1\cos\theta_1-n_0\cos\theta_0. \tag{5}$$

把 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式，则得出所要求的角特征函数表达式：

$$T(p_0,q_0;p_1,q_1)=\frac{1}{2\mu}[r_x(p_0-p_1)^2+r_y(q_0-q_1)^2]+\cdots. \tag{6}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

把此式用到§4.1(29)式中去，就得到入射光线和折射光线的方程：

$$x_0-\frac{p_0}{m_0}z_0=\frac{1}{\mu}r_x(p_0-p_1),\tag{7}$$

$$x_1-\frac{p_1}{m_1}z_1=\frac{1}{\mu}r_x(p_0-p_1),\tag{8}$$

包含 y 坐标的相应方程是完全类似的。

现在考虑从中央光线过渡到一邻近光线时各个量的变化。由(7)和(8)式得出

$$\delta x_0-\frac{p_0}{m_0}\delta z_0=z_0\delta\left(\frac{p_0}{m_0}\right)+r_x\left\{\delta\left(\frac{p_0}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{p_1}{\mu}\right)\right\},\tag{9}$$

$$\delta x_1-\frac{p_1}{m_1}\delta z_1=z_1\delta\left(\frac{p_1}{m_1}\right)+r_x\left\{\delta\left(\frac{p_0}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{p_1}{\mu}\right)\right\}.\tag{10}$$

入射光锥中央光线的分量是

$$p_0=0,\quad q_0=n_0\sin\theta_0,\quad m_0=n_0\cos\theta_0,\tag{11}$$

因此

$$\delta\left(\frac{p_0}{m_0}\right)=\frac{1}{m_0^2}(m_0\delta p_0-p_0\delta m_0)=\frac{1}{n_0}\sec\theta_0\delta p_0,\tag{12}$$

$$\delta\left(\frac{q_0}{m_0}\right)=\frac{1}{m_0^2}(m_0\delta q_0-q_0\delta m_0)=\frac{1}{n_0}\sec^3\theta_0\delta q_0,\tag{13}$$

这里已用了恒等式 $m_0\delta m_0+p_0\delta p_0+q_0\delta q_0=0$。

(9)和(10)式变为

$$\delta x_0=\frac{z_0}{n_0}\sec\theta_0\delta p_0-\frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1-\delta p_0),\tag{14}$$

$$\delta x_1=\frac{z_1}{n_1}\sec\theta_1\delta p_1-\frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1-\delta p_0).\tag{15}$$

推导(15)式时也已用了 $p_1=0$；这个结果是由折射定律和假定 $p_0=0$ 而得出的。用类似的方法求得

$$\delta y_0-(\tan\theta_0)\delta z_0=\frac{z_0}{n_0}(\sec^3\theta_0)\delta q_0-r_y\left\{\delta\left(\frac{q_1}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{q_0}{\mu}\right)\right\},\tag{16}$$

$$\delta y_1-(\tan\theta_1)\delta z_1=\frac{z_1}{n_1}(\sec^3\theta_1)\delta q_1-r_y\left\{\delta\left(\frac{q_1}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{q_0}{\mu}\right)\right\}.\tag{17}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现在考虑光锥中通过焦点 F_0 的那些光线。这时 $z_0=\zeta_0$，$\delta x_0=\delta y_0=\delta z_0=0$。因为所有这些光线也与焦线 f_0 相交，$\delta p_0=0$。把上述各式代入(14)和(16)式，得出

$$\delta p_1=0, \tag{14a}$$

$$\frac{\zeta_0}{n_0}\sec^3\theta_0\delta q_0-\frac{1}{\mu}r_y(\delta q_1-\delta q_0)=0. \tag{16a}$$

(14a)表示相应的折射光线位于 yz 平面上。现在因为所有来自 F_0 的光线都通过焦点 $F_1(z_1=\zeta_1)$，这时，$z_1=\zeta_1$，$\delta x_1=\delta y_1=\delta z_1=0$，不管 δq_0 的值为多少，(17)式必定成立，由此得出

$$\frac{\zeta_1}{n_1}\sec^3\theta\delta q_1-\frac{1}{\mu}r_y(\delta q_1-\delta q_0)=0. \tag{17a}$$

只有在

$$\frac{n_0\cos^3\theta_0}{\zeta_0}-\frac{n_1\cos^3\theta_1}{\zeta_1}=\frac{n_0\cos\theta_0-n_1\cos\theta_1}{r_y} \tag{18}$$

成立时，(16a)和(17a)二式才能对任一 δq_0 值都同时成立。这个关系式给出了折射光线焦点 F_1 的位置。从(14a)式看出，通过 F_1 的焦线垂直于 yz 平面，因此 F_1 是第一焦点。

为了找出另一个焦点的位置，考虑来自 F_0' 的光线。这时 $z_0=\zeta_0'$，$\delta x_0=\delta y_0=\delta z_0=0$。因为所有这些光线与焦线 f_0 相交，$\delta q_0=\delta m_0=0$。现在由(14)和(16)式，得出

$$\frac{\zeta_0'}{n_0}\sec\theta_0\delta p_0-\frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1-\delta p_0)=0, \tag{14b}$$

$$\delta q_1=0. \tag{16b}$$

(16b)式表示折射光线现在位于 xz 平面上。所有这些光线将通过另一焦点 $F_1'(z_1=\zeta_1')$，因此，$z_1=\zeta_1'$，$\delta x_1=\delta y_1=\delta z_1=0$，不管 δp_0 的值为多少，(15)式必定成立。由此得出

$$\frac{\zeta_1'}{n_1}\sec\theta_1\delta p_1-\frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1-\delta p_0)=0. \tag{15b}$$

因为(15b)和(14b)式对任一 δp_0 值都同时成立，由此得出

$$\frac{n_0\cos\theta_0}{\zeta_0'}-\frac{n_1\cos\theta_1}{\zeta_1'}=\frac{n_0\cos\theta_0-n_1\cos\theta_1}{r_x}. \tag{19}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这个关系式给出了第二焦点 F_1' 的位置.

通常用从 O 算起的距离来表示焦点的位置，比用焦点的 z 坐标更为方便. 设 $OF_0 = d_0^{(t)}$, $OF_0' = d_0^{(s)}$, $OF_1 = d_1^{(t)}$, $OF_1' = d_1^{(s)}$ (图 4.22 中, $d_0^{(t)} < 0$, $d_0^{(s)} < 0$, $d_1^{(t)} > 0$, $d_1^{(s)} > 0$), 则

$$\left.\begin{aligned}\zeta_0 = d_0^{(t)}\cos\theta_0,\quad \zeta_1 = d_1^{(t)}\cos\theta_1,\\ \zeta_0' = d_0^{(s)}\cos\theta_0,\quad \zeta_1' = d_1^{(s)}\cos\theta_1,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

(18) 和 (19) 二式变为

$$\frac{n_0\cos^2\theta}{d_0^{(t)}} - \frac{n_1\cos^2\theta_1}{d_1^{(t)}} = \frac{n_0\cos\theta_0 - n_1\cos\theta_1}{r_y} \tag{21}$$

和

$$\frac{n_0}{d_0^{(s)}} - \frac{n_1}{d_1^{(s)}} = \frac{n_0\cos\theta_0 - n_1\cos\theta_1}{r_x}. \tag{22}$$

令 $n_1 = -n_0$, 就可以得到对于反射的相应关系式.

§ 4.7 色差；棱镜的色散

在第二章中已经指出，折射率不是一个物质常数，它随颜色(即随光的波长)而定. 现在我们讨论由此得出的关于透镜和棱镜性能的一些基本结果.

§ 4.7.1 色差

设有一条多色光线入射到一个折射面上，它将分解为一组波长各不相同的光线. 不同波长的光通过一个光学系统时，在第一次折射后，将沿着稍微不同的路径传播. 结果，象就不是锐的了，这个系统就称为受到色差的影响.

我们仍然只注意紧挨着轴的那些点和光线，即假定每个波长的成象都遵守高斯光学的定律. 这时的色差称为一级色差或初级色差. 设 Q_α 和 Q_β 是同一点 P 由两种不同波长所成的象(图4.23), $Q_\alpha Q_\beta$ 在平行或垂直于轴方向上的投影，通常分别称为纵向色差和横向色差.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

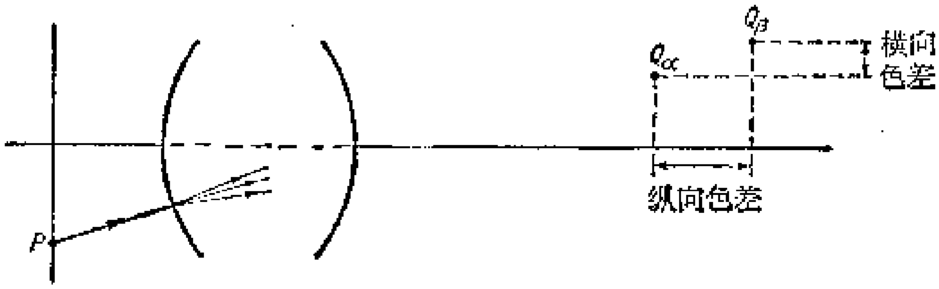


图 4.23 纵向和横向色差

考虑折射率改变 δn 所引起的薄透镜焦距的改变量 δf. 根据 § 4.4(36) 式，对一个给定的透镜，量 $(n-1)f$ 将与波长无关. 因此

$$\frac{\delta f}{f}+\frac{\delta n}{n-1}=0. \tag{1}$$

设 n_F, n_D 和 n_C 分别是对夫琅和费 F, D 和 C 谱线 ($\lambda=4861$ 埃, 5893 埃, 6563 埃)的折射率，则

$$\Delta=\frac{n_F-n_C}{n_D-1} \tag{2}$$

这个量是对玻璃色散特性的粗略测量值，它称为**色散本领**. 由(1)式看出，它近似地等于物在无穷远时红象和蓝象间的距离与透镜焦距之比. 光学系统中常用的各种玻璃的折射率随波长的变化，在图 4.24 中示出. 相应的△值约在 1/60 和 1/30 之间.

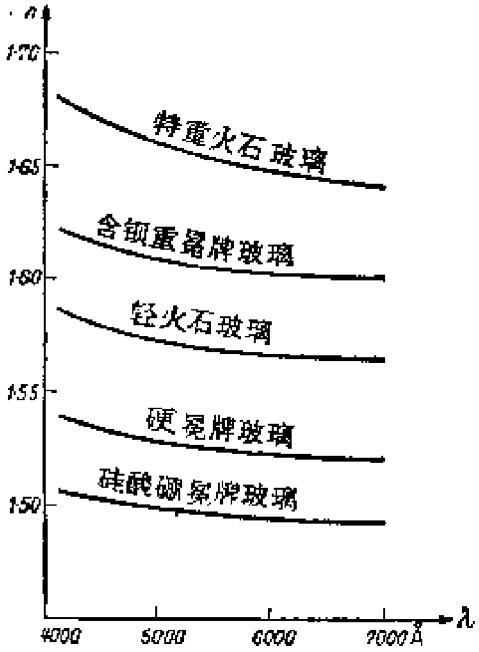


图 4.24 各种玻璃的典型色散曲线

要得到高质量的象，单色象差和色差都必须很小. 因为一般不可能同时消去所有象差，通常不得不采取折衷办法. 往往只消去两个特定波长的色差就足够了. 这些波长的选择当然要取决于设计此光学系统的目的；例如，因为普通的照相板对于蓝区比人眼更灵敏，所以照相物镜通常要

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

比目视仪器对更接近光谱蓝端的颜色"消色差"。对两个波长消色差，当然并不保证完全消除颜色误差。剩余的色差通常称为**第二级光谱**。

现在来研究在什么条件下，两个薄透镜的组合对它们的焦距消色差。根据§4.4(39)式，两个薄透镜相距 l，其组合的焦距倒数为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{l}{f_1f_2}. \tag{3}$$

可见，当

$$\frac{\delta f_1}{f_1^2}+\frac{\delta f_2}{f_2^2}-\frac{l}{f_1f_2}\left[\frac{\delta f_1}{f_1}+\frac{\delta f_2}{f_2}\right]=0, \tag{4}$$

则 $\delta f=0$。如果对 C 和 F 谱线消色差，则利用(1)和(2)式，得出

$$l=\frac{\Delta_1 f_2+\Delta_2 f_1}{\Delta_1+\Delta_2}, \tag{5}$$

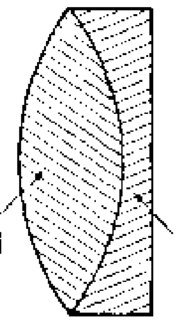


图 4.25　消色差双合透镜

式中的 Δ_1 和 Δ_2 是两个透镜的色散本领。

减小色差的一种方法是使用两个相互接合的透镜(图 4.25)，一个用冕牌玻璃，另一个用火石玻璃。在这种情况下，因为 $l=0$，根据(5)式，则有

$$\frac{\Delta_1}{f_1}+\frac{\Delta_2}{f_2}=0, \tag{6}$$

或用(3)式，则有

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{f}\,\frac{\Delta_2}{\Delta_2-\Delta_1},\quad \frac{1}{f_2}=-\frac{1}{f}\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2-\Delta_1}. \tag{7}$$

对给定的玻璃，并且焦距 f 为一固定值时，f_1 和 f_2 就由(7)式唯一确定。但是 f_1 和 f_2 随三个曲率半径而定；因此有一个半径可任意选取。这个自由度有时用来使球面象差尽可能减小。

获得消色差系统的另一种方法，是使用玻璃相同的两个薄透镜($\Delta_1=\Delta_2$)，其间距等于它们的焦距之和的一半：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$l = \frac{1}{2}(f_1 + f_2). \tag{8}$$

由(5)式直接得出，这样的组合是消色差的。

由几个元件组成的仪器，一般不能对位置和放大率二者都消色差，除非每个元件本身是按上述意义那样消色差的。我们将对相距 l 的两个共轴薄透镜的情况证明这一点。根据§4.4.4，一个薄透镜成象就是对透镜中心的中心投影，所以得出（见图4.26）

$$\frac{Y_1'}{Y_1} = -\frac{\zeta_1'}{\zeta_1}, \quad \frac{Y_2'}{Y_2} = -\frac{\zeta_2'}{\zeta_2}. \tag{9}$$

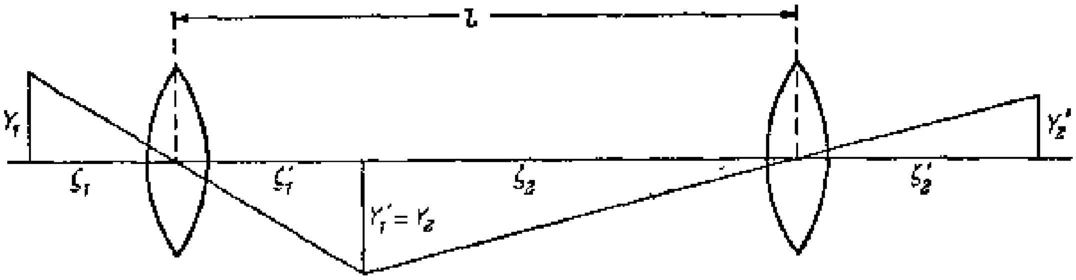


图 4.26　两个薄透镜消色差

因为 $Y_2 = Y_1'$，所以放大率为

$$\frac{Y_2'}{Y_1} = \frac{\zeta_1'}{\zeta_1} \cdot \frac{\zeta_2'}{\zeta_2}. \tag{10}$$

当波长改变时，ζ_1 将保持不变；假定象的位置是消色差的，ζ_2' 也将保持不变。因此，放大率消色差的条件可用下式表示：

$$\delta\left(\frac{\zeta_1'}{\zeta_2}\right) = \frac{1}{\zeta_2^2}(\zeta_2 \delta\zeta_1' - \zeta_1' \delta\zeta_2) = 0. \tag{11}$$

因为 $\zeta_1' + \zeta_2 = l$，$\delta\zeta_1' = -\delta\zeta_2$，可见只有在 $\delta\zeta_1' = \delta\zeta_2 = 0$ 即每个透镜都消色差时，(11)式才能满足。

至此，我们只考虑了一个薄透镜以及两个薄透镜组合的初级色差。一般共轴系统的初级色差表达式将在第五章中导出。

§4.7.2　棱镜的色散

现在我们简单讨论一下光通过棱镜的情况。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

设 α 是棱镜两个面的夹角．假定这两个面相交的棱边 A 垂直于包含入射、透射和出射光线的平面（图 4.27）．首先，假定光是严格单色的．

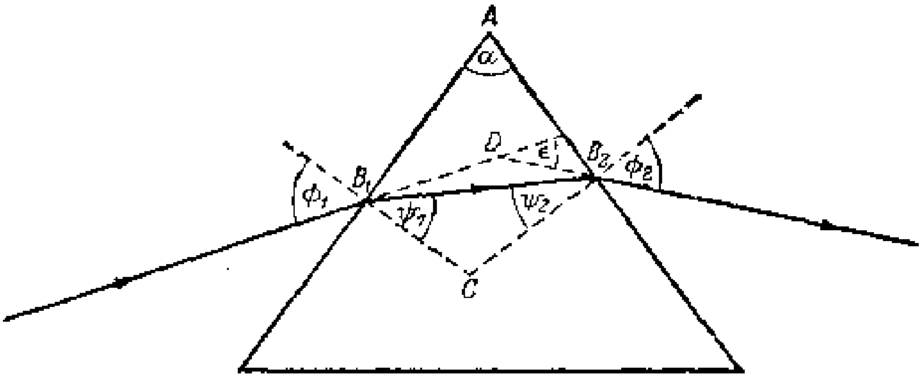


图 4.27　光线通过棱镜

设 B_1 和 B_2 分别为入射光线和出射光线与这两个面的交点，ϕ_1 和 ψ_1 是 B_1 处的入射角和折射角，ψ_2 和 ϕ_2 是 B_2 处的面内角和面外角（即光线 B_1B_2 和出射光线分别与 B_2 处法线的夹角）．又设 C 是棱镜在 B_1 和 B_2 处法线的交点，D 是入射光线和出射光线二者的延长线的交点．

设 ε 是偏向角，即出射光线与入射光线的夹角，则有

$$\phi_1 + \phi_2 = \varepsilon + \alpha, \tag{12}$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \alpha. \tag{13}$$

而且由折射定律，得出

$$\left.\begin{aligned} \sin\phi_1 &= n\sin\psi_1, \\ \sin\phi_2 &= n\sin\psi_2, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中的 n 是玻璃对周围空气的折射率．当

$$\frac{d\varepsilon}{d\phi_1} = 0, \tag{15}$$

这时偏向角 ε 将有一极值．利用 (12) 式，这意味着

$$\left(\frac{d\phi_2}{d\phi_1}\right)_{\text{极值}} = -1. \tag{16}$$

由 (13) 和 (14) 式得出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\psi_1}{d\phi_1} &= -\frac{d\psi_2}{d\phi_1},\\
\cos\phi_1 &= n\cos\psi_1\frac{d\psi_1}{d\phi_1},\\
\cos\phi_2\frac{d\phi_2}{d\phi_1} &= n\cos\psi_2\frac{d\psi_2}{d\phi_1},
\end{aligned}\right\} \tag{17}
$$

用消元法得到

$$
\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = -\frac{\cos\phi_1\cos\psi_2}{\cos\psi_1\cos\phi_2}. \tag{18}
$$

由(16)和(18)式得出，对于极值，则有

$$
\frac{\cos\phi_1\cos\psi_2}{\cos\psi_1\cos\phi_2} = 1, \tag{19}
$$

上式取平方，并且利用(14)式，得出

$$
\frac{1-\sin^2\phi_1}{n^2-\sin^2\phi_1} = \frac{1-\sin^2\phi_2}{n^2-\sin^2\phi_2}. \tag{20}
$$

满足这个方程的解是

$$
\left.\begin{aligned}
\phi_1 &= \phi_2,\\
\text{这时}\qquad\qquad &\\
\psi_1 &= \psi_2.
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

要确定这个极值的性质，必须计算 $d^2\varepsilon/d\phi_1^2$. 由(12)和(18)式，得出

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\varepsilon}{d\phi_1^2} = \frac{d^2\phi_2}{d\phi_1^2} &= \frac{d\phi_2}{d\phi_1}\,\frac{d}{d\phi_1}\left[\log\left(-\frac{d\phi_2}{d\phi_1}\right)\right]\\
&= \frac{d\phi_2}{d\phi_1}\left[-\tan\phi_1 - \tan\psi_2\frac{d\psi_2}{d\phi_1}\right.\\
&\qquad\left. + \tan\psi_1\frac{d\psi_1}{d\phi_1} + \tan\phi_2\frac{d\phi_2}{d\phi_1}\right].
\end{aligned} \tag{22}
$$

当 $\phi_1=\phi_2$, $\psi_1=\psi_2$ 时，利用(16)，(17)和(14)式，上式变为

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\phi_1^2}\right)_{\text{极值}} &= 2\tan\phi_1 - 2\tan\psi_1\frac{\cos\phi_1}{n\cos\psi_1}\\
&= 2\tan\phi_1\left(1-\frac{\tan^2\psi_1}{\tan^2\phi_1}\right).
\end{aligned} \tag{23}
$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因为 $n > 1$，所以 $\phi_1 > \psi_1$；又因 $0 < \phi_1 < \pi/2$，所以 $\tan\phi_1 > 0$. 由此得出 $(d^2\varepsilon/d\phi_1^2) > 0$，因此偏向角为一极小值. 根据(21)式得出，这时光线穿过棱镜的通道是对称的. 所以最小偏向角是

$$\varepsilon_{极小} = 2\phi_1 - \alpha. \tag{24}$$

在棱镜第一个面上的入射角和折射角，用 $\varepsilon_{极小}$ 和 α 表示为

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{极小} + \alpha), \quad \psi_1 = \frac{1}{2}\alpha, \tag{25}$$

因此

$$n = \frac{\sin\phi_1}{\sin\psi_1} = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{极小} + \alpha)\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}. \tag{26}$$

这个公式常被用来确定玻璃的折射率. 利用分光计测出 $\varepsilon_{极小}$ 和 α，由(26)式就算出 n.

现在来考虑一束平行光线(而不是一条光线)通过棱镜的情况，例如，这束平行光线是从透镜 L_1 的焦平面上的点光源 P 发出的(图 4.28)，并且仍然假定光是单色的. 设 B_1' 和 B_2' 分别是从 B_1 和 B_2 到通过棱边 A 的光线的垂足. 这时 B_1B_1' 和 B_2B_2' 是两个波阵面与入射面(图面)的交线. 这两线的夹角等于偏向角 ε. 令

$$B_1B_1' = l_1, \quad B_2B_2' = l_2', \quad B_1B_2 = t. \tag{27}$$

现在考虑多色的而不是单色的平行光束. 如果透镜 L_1 已校

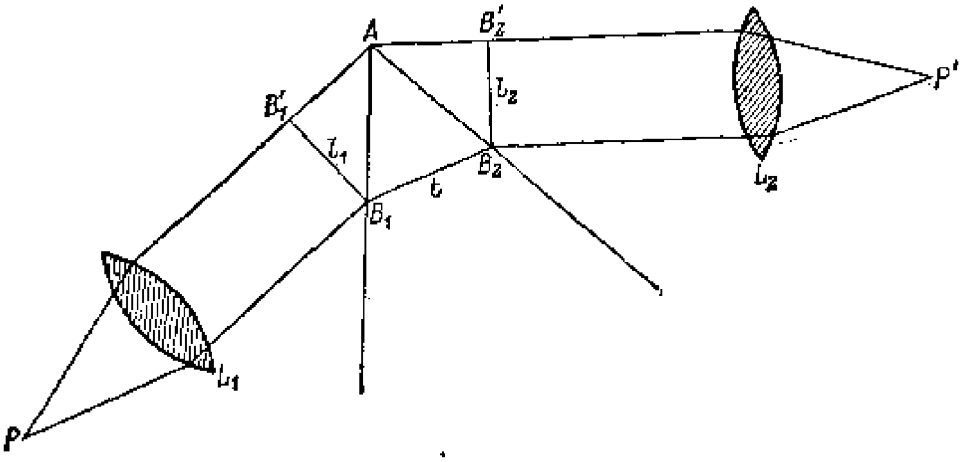


图 4.28 棱镜的色散

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

正色差，则 B_1B_1' 仍在入射光束的波阵面上。而在另一侧，线 B_2B_2' 不再是唯一的了，它将随波长 λ 而异。因为棱镜折射率是波长的函数：

$$n = n(\lambda), \tag{28}$$

因此偏向角 ε 也随波长 λ 而异：

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda). \tag{29}$$

入射角 ϕ_1 为一恒定值时形成的量

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{d\varepsilon}{dn}\frac{dn}{d\lambda} \tag{30}$$

常称为**棱镜的角色散**。在(30)式中，右边第一个因子完全取决于几何安排，而第二个因子则表征棱镜所用玻璃的色散本领。因为 $\phi_1 =$ 常数，由(12)和(13)式，得出

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{d\phi_2}{dn}, \quad \frac{d\phi_1}{dn} = -\frac{d\phi_2}{dn}, \tag{31}$$

由(14)式

$$\sin\phi_1 + n\cos\phi_1\frac{d\phi_1}{dn} = 0,$$

$$\cos\phi_2\frac{d\phi_2}{dn} = \sin\phi_2 + n\cos\phi_2\frac{d\phi_2}{dn}, \tag{32}$$

用消元法，得出

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{\sin(\phi_1+\phi_2)}{\cos\phi_2\cos\phi_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\phi_2\cos\phi_1}. \tag{33}$$

利用正弦定理，由三角形 AB_1B_2 得出

$$AB_2 = \frac{\cos\phi_1}{\sin\alpha}t, \tag{34}$$

由三角形 AB_2B_2' 得出

$$AB_2 = l_2\sec\phi_2. \tag{35}$$

利用(34)和(35)式，由(33)式，得出

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{t}{l_2}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{36}$$

在最小偏向角位置，根据对称性，有 $l_1 = l_2$。而且如果透镜足够

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

大，使光束完全充满棱镜，则 t 将等于棱镜底边长度 b. 对于角色散 $\delta\varepsilon$，即波长从 λ 变到 $\lambda+\delta\lambda$ 时出射波阵面转过的角度，这时由 (36) 式给出以下的表达式：

$$\delta\varepsilon = \frac{b}{l_1}\frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda. \tag{37}$$

§ 4.8 光度学和孔径

光学中关于光的测量这一分支，称为光度学. 严格地说，光度学不属于几何光学，但由于在许多实际应用中，用光场的几何近似图象研究光度学已经足够，因此在本章中简短地介绍一下光度学，看来是恰当的. 所以我们将继续采用几何模型，根据这个模型，光被看作是沿着几何光线流动的光能量流，并遵守几何学上的能量守恒定律，即在单位时间内，通过一个光线管中任一截面的能量是恒定的[参看 § 3.1(31) 式].

§ 4.8.1 光度学的基本概念[1]

在光度学中，实质上考虑的是从面 S 的一部分射出的光能量. 这个面可能是虚构的，也可能就是光源的真实辐射面，或固体的一个受照面. 如果固体是不透明的，考虑的是反射光；如果固体是透明或半透明的（这时有一部分的光被吸收或散射），通常测量的是透射光.

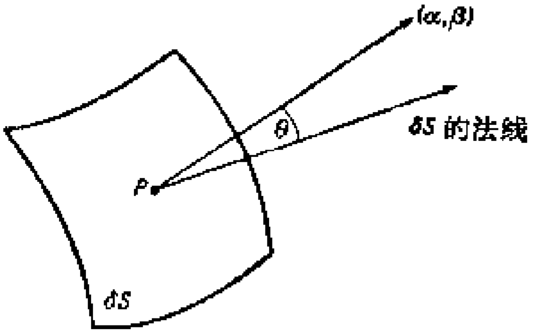


图 4.29 从一个面元透过能量

设 $P(\xi,\eta)$ 是 S 面上的一个代表点，它取这个面上任一组方便的曲线坐标. 在单位时间内，

1) 只讨论光度学的基本概念. 进一步的知识和测光所用仪器的描述，例如可参看 J. W. T. Walsh, *Photometry* (London, Constable, 2nd., ed., 1953) 或 *Measurement of Radiant Energy* (McGraw-Hill, New York and London, 1937), edited by W.E. Forsythe.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

从面上 P 处的面元 δS 射到极角 (α, β) 方向附近的立体角元 $\delta\Omega$ 内的能量(时间平均)值,可表示为以下的形式:

$$\delta F = B\cos\theta\delta S\delta\Omega. \tag{1}$$

式中 θ 是 (α, β) 方向与面元的法线间夹角(见图 4.29), B 是一个通常随 (ξ, η) 和 (α, β) 而定的因子:

$$B = B(\xi, \eta; \alpha, \beta). \tag{2}$$

在(1)式中要引入因子 $\cos\theta$, 因为在物理上有意义的量,是 δS 在垂直 (α, β) 方向的平面上的投影, 而不是 δS 本身. B 称为在点 (ξ, η) 沿 (α, β) 方向的**光度学亮度**. 必须把光度学亮度与亮度的目视感觉区别开,两者一般是不同的,因为人眼并不是对所有颜色都一样灵敏[1],这一点将在后面更详细地讨论.

通常用两种不同的方法把 δF 分解为两个量的乘积, 以表示它对 $\delta\Omega$ 和 δS 的明显关系:

$$\delta F = \delta I\delta\Omega = \delta E\delta S. \tag{3}$$

比较(1)和(3)式,得出

$$\delta I = \frac{\delta F}{\delta\Omega} = B\cos\theta\delta S, \tag{4}$$

$$\delta E = \frac{\delta F}{\delta S} = B\cos\theta\delta\Omega. \tag{5}$$

对一个面作的积分

$$I(\alpha, \beta) = \int B\cos\theta dS, \tag{6}$$

称为沿 (α, β) 方向的**光度学强度**[2],而对立体角作的积分

$$E(\xi, \eta) = \int B\cos\theta d\Omega, \tag{7}$$

---

1) 当我们想要强调一个特定量是根据它的真实物理效应而不是它的目视效应求得时,我们就在这个量前面加上"光度学"一词.

2) 在第一章中,光强度曾定义为每秒通过垂直于光流方向的单位面积的能量时间平均值. 切不可把它与(6)式定义的光度学强度混淆. 遗憾的是用了同一个词来表示两个不同的量. 除了本节以外, 我们总是把"强度"理解为第一章中引进的量. 如果 P 处的面元 δS 与坡印廷矢量正交, 则第一章所定义的强度等于 P 处的光度学照度 δE.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

称为在点 (ξ, η) 处的光度学照度.

B 随方向的变化取决于这个面的性质，特别是取决于它是粗糙的还是光滑的，它是自发光的还是它透射或反射别的光. 常常允许假定，在很好的近似下，B 与方向无关. 这时辐射称为各向同性的. 如果辐射是各向同性的，并且辐射面是平面，则 (6) 式简化为

$$I(\alpha, \beta) = I_0 \cos\theta, \tag{8}$$

式中

$$I_0 = \int B\,dS.$$

这时，在任何方向上的光度学强度随该方向与面法线间夹角的余弦而变化. (8)式通常称为朗伯(余弦)定律. 当满足 (8) 式时，如果是发射面，则称为漫发射；如果是反射面，则称为漫反射.

对 F, B, I 和 E 各量的测量，涉及到测定时间间隔、面积、方向、立体角和能量. 其平均值通常很小，因此必须用灵敏的仪器. 这些仪器本质上分为两类. 第一类，对吸收介质中所释放的热有反应（例如测辐射热器和温差电偶等），主要用于研究热辐射（红外）；第二类，根据(表面)光电效应，即光入射到金属表面上引起的金属电子发射现象(对单色光，发射的电子数(即产生的电流)与入射光的能量成正比). 例如，这类仪器用作照相术中的曝光计.

然而在技术光度学中用的是间接方法. 人们规定并制作一标准光源，它的光度学数据用绝对能量单位来表示. 然后相对于这个光源进行测量，常利用眼睛作为零指示器，即作为等亮度指示器. 这种比较以下述的一个简单定律作为基础，对于一个很小的光源 Q 引起的照度[1]，这个定律成立.

设 δS 是在 P 处的面元，$QP = r$. 又设 θ 是 QP 与 δS 的法线间夹角（见图 4.30），则光源在单位时间内射过 δS 的能量是 $I\delta\Omega$，

---

1) 一个点光源的光度学强度 I，常通过与极限概念有关的步骤来定义. 假定表面积减小趋向零，而同时 B 增加趋向无穷大，通过这种办法使积分 (6) 式保持有限值. 则 I 就是 α 和 β 以及点光源位置的函数。

计算光度学照度时，当光源的线度约小于它与受照面距离的 1/20，通常可忽略这个光源的有限大小.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

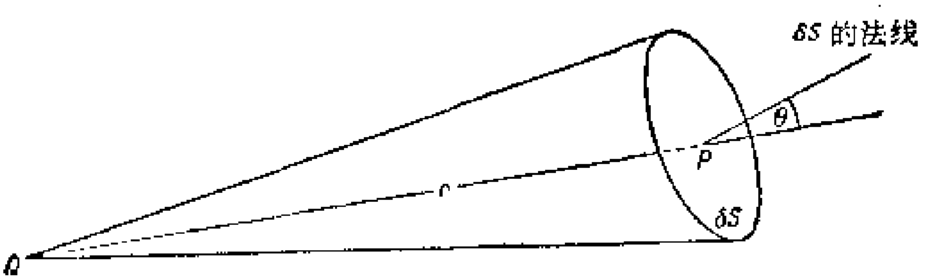


图 4.30　点光源产生的照度

其中 I 是光源沿 QP 方向的光度学强度，$\delta\Omega$ 是 δS 对 Q 所张的立体角．利用基础几何学，

$$\cos\theta\delta S = r^2\delta\Omega. \tag{9}$$

因此，由（3）式得出

$$E = \frac{I\cos\theta}{r^2}. \tag{10}$$

（10）式就是实用光度学的基本方程．它表达了所谓照度余弦定律（E 与 $\cos\theta$ 成正比），以及平方反比定律（E 与 r^2 成反比），并且再加上简单的几何学就能够比较光源的强度． 如果面元 δS 被光度学强度分别为 I_1 和 I_2 的两个点光源 Q_1 和 Q_2 照明，并且 δS 和光源的连线分别与 δS 的法线成 θ_1 和 θ_2 角（图 4.31），则当光度学照度相等时，得出

$$I_1 : I_2 = \frac{r_1^2}{\cos\theta_1} : \frac{r_2^2}{\cos\theta_2}. \tag{11}$$

利用（11）式，就可以通过与标准光源作比较来测定所给定光源的强度了．

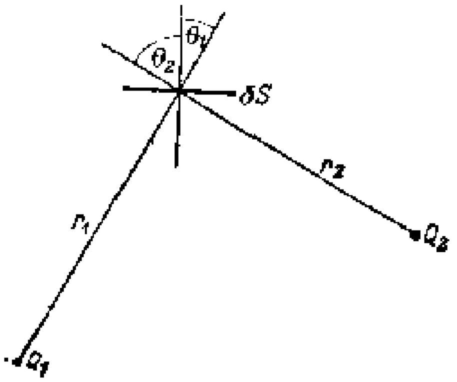


图 4.31　两个点光源强度的比较

两个光源产生的照度是否相等，可以用物理方法或直接用眼睛来探测．当来自两个光源的光是单色的并且频率相等时，用眼睛来比较是较容易的；但通常需要比较发射不同光谱成分的光源，因为眼睛并不是对所有波长的光都一样灵敏，所以这种简单方法就不再适用了．这时必须改用一组滤波器，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

其中每一个只在光谱的某一已知波长附近很窄范围内透光；于是测定不同颜色的相等照度，就变成考虑到眼睛的相对视见曲线而测定相对的能量值了．这条曲线是通过画出 K_λ 随波长的变化而得到的，K_λ 与产生相同亮度感觉的光通量成反比．这条曲线在某种程度上取决于照度的强弱．对于强光，它在550毫微米附近有一极大值(见图 4.32 和表 13)．当照度减弱时，曲线形状不变，但极大值移向光谱的蓝端，对于很弱的光，极大值约在 507 毫微米处．这个现象通常称为珀金杰 (Purkinje) 效应．

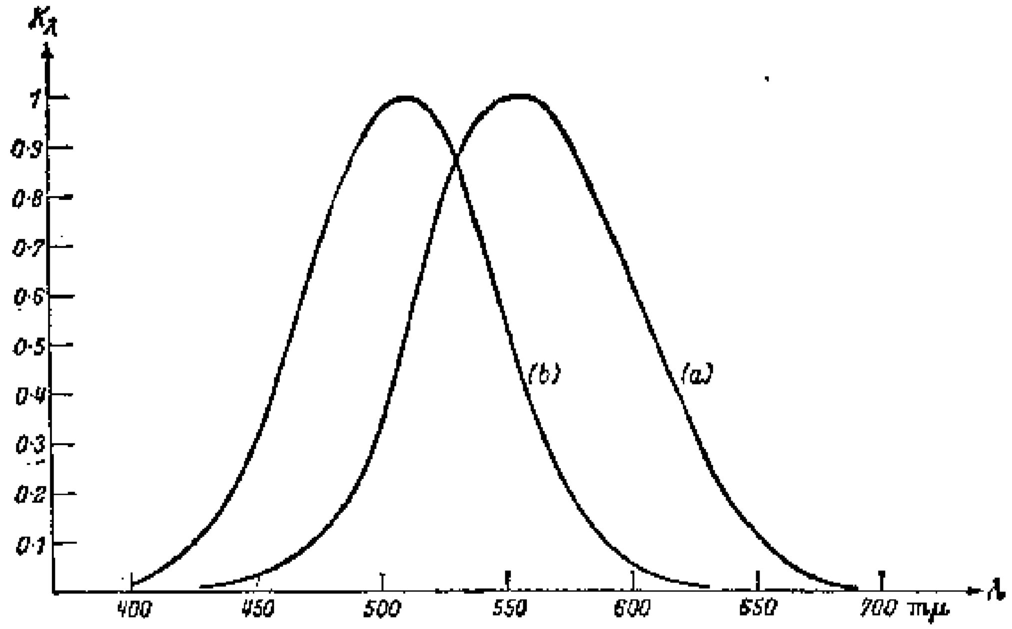


图 4.32 平均人眼的相对视见曲线 K_λ

(a) 强光 (b) 很弱的光

如果能通量的计算是根据它所产生的视觉，而不是根据它的真实物理量值，就要引入发光能量 F'：

$$F' = \frac{\int K_\lambda F_\lambda d\lambda}{\int K_\lambda d\lambda}, \tag{12}$$

$F_\lambda d\lambda$ 是在 $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ 范围内的能量值，K_λ 是相对视见因数，积分包括整个光谱范围．B'，I' 和 E' 各量，通常分别称为亮度、发光强度(或烛光)和照度，它们分别与 B，I 和 E 的关系，就象 F' 与

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 13　平均人眼的相对视见因数 K_λ（强光）

λ（毫微米）	K_λ	λ（毫微米）	K_λ
400	0.0004	600	0.631
410	0.0012	610	0.503
420	0.0040	620	0.381
430	0.0116	630	0.265
440	0.023	640	0.175
450	0.038	650	0.107
460	0.060	660	0.061
470	0.091	670	0.032
480	0.139	680	0.017
490	0.208	690	0.0082
500	0.323	700	0.0041
510	0.503	710	0.0021
520	0.710	720	0.00105
530	0.862	730	0.00052
540	0.954	740	0.00025
550	0.995	750	0.00012
560	0.995	760	0.00006
570	0.952		
580	0.870		
590	0.757		

F 的关系一样．这些概念在目视光度学中用得很广．

F'，B'，I' 和 E' 四个量各有实用单位．因为发光强度的标准比光通量的标准较容易保存，所以通常把发光强度的单位作为基本光度学单位，而 F'，B' 和 E' 的单位用它来表示．过去有一时期曾经采用国际烛光作为发光强度的标准，它是利用存放在不同国家实验室中的一些碳灯来保存的一种标准．近来它已被一种称为烛光（cd）的新标准所代替；一烛光（cd）定义为，在铂凝固温度（约 2042K）时黑体辐射器一平方厘米的发光强度的 1/60．对不同光谱成分的光，其发光强度值必须考虑到相对视见曲线，用前面已说过的方法来计算．

光通量的单位称为流明．它等于发光强度为一烛光（cd）的均匀点光源射在单位立体角中的光通量．

照度的单位随使用的长度单位而定．照度的米制单位是勒克司（lx），有时也称为米烛光；它等于一平方米面积接收到一流明光通量时的照度．英制单位是流明/英尺²，以前称为英尺烛光(f.c.)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

亮度的单位是烛光(cd)/厘米²，称为熙提(sb)，而烛光(cd)/米²称为尼特. 英制单位用的是烛光(cd)/吋²，或烛光(cd)/呎².

也有使用其他单位的，它们的定义及其与上述单位的关系可参看光度学的书籍.

§4.8.2 光阑和光瞳[1)]

到达光学系统象空间的光量，不仅取决于物的亮度，而且也取决于光学元件(透镜、反射镜)的大小和光阑的大小. 光阑就是在不透明屏上开的一个孔，通常是圆的. 屏的不透明部分挡住某些引起严重象差的光线，使之不能到达象上. 在目前的讨论中，把透镜和反射镜的边缘以及上述的光阑都统称为"光阑"，将是方便的.

考虑从轴上物点 P_0 发出的所有光线. 决定成象光锥截面的光阑称为孔径光阑. 要确定它的位置，就必须找出每个光阑在它前面那部分光学系统中所成的高斯象；对 P_0 张角最小的象称为入射光瞳. 产生入射光瞳的实物光阑就是孔径光阑(如果孔径光阑位于第一个面的前方，则它与入射光瞳合一). 入射光瞳直径对 P_0 的张角 $2\theta_0$ 称为物方的角孔径，或简称为角孔径(图 4.33).

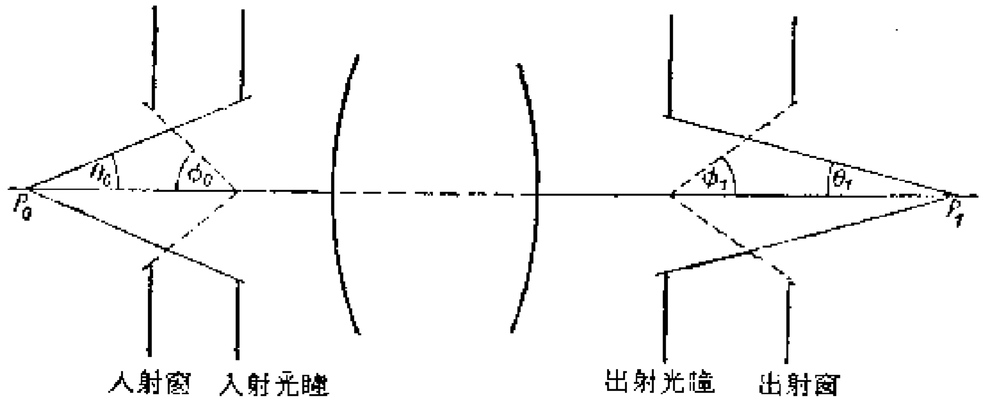


图 4.33 光阑和光瞳

1) 光阑理论已由阿贝(E. Abbe)加以公式化，*Jena Z. Naturwiss.*, **6** (1871), 263，并由 M. Von Rohr 加以推广，*Zentr. Ztg. Opt. Mech.*, **41** (1920), 145, 159, 171.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

孔径光阑由它后面那部分光学系统所成的象（亦即入射光瞳由整个光学系统所成的象），通常称为出射光瞳；它的直径对着象 P_1 的张角 $2\theta_1$ 可称为象方的角孔径（有时也称为投射角）．

在每一物点发出的一锥光线中，应有一条光线通过入射光瞳的中心．这条特殊的光线通常称为光锥的主光线（或参考光线），它在象差理论中特别重要．没有象差时，主光线也将通过孔径光阑的中心和出射光瞳的中心．

如果孔径光阑位于它前面那部分光学系统的后焦平面上，则入射光瞳将在无穷远处，并且物空间中所有的主光线将平行于轴．这样一个系统称为物方的焦阑系统．如果孔径光阑位于它后面那部分光学系统的前焦平面上，则出射光瞳将在无穷远处，并且象空间中的主光线将平行于轴；这样一个系统称为象方的焦阑系统．焦阑装置在测量物的大小时是有用的．

如果别的参数保持固定，则角孔径就是通过系统的光晁的一种量度．其他一些量也常用来确定光学系统的"集光本领"，例如，显微镜物镜的数值孔径（N．A．）．它定义为物空间中半个角孔径的正弦与物空间折射率的乘积：

$$\text{N. A.} = n\sin\theta_0. \qquad (13)$$

当所设计的系统适用于物在远距离处时，如望远镜或某些照相镜头，这时用所谓"F 数"或"标称焦比"来量度其集光本领是方便的．它等于系统焦距 f 与入射光瞳直径 d 之比：

$$F = f/d. \qquad (14)$$

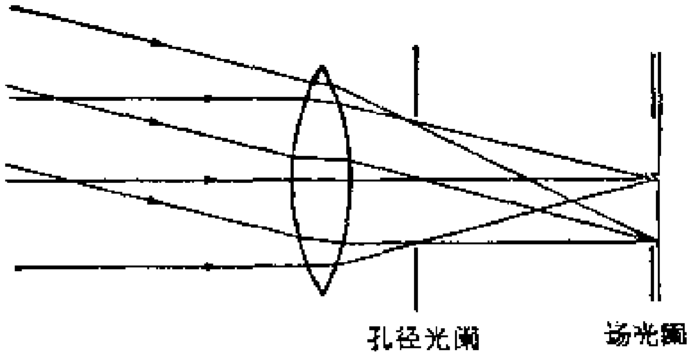


图 4.34　孔径光阑和场光阑二者区别的图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，焦距为 10 厘米的透镜用 2 厘米孔径工作时，$F=5$．这个透镜称为 $f/5$ 透镜，也称为以 $f/5$ 的"速率"工作．

角孔径、数值孔径和 F 数这些量，可用来量度仪器的集光本领，它们常称为相对孔径．

光学系统除了有孔径光阑以外，还有场光阑；它们决定广延物表面哪一部分被仪器成象．图 4.34 示出这两类光阑的区别．

要确定场光阑，我们再一次先找出每一个光阑在它前面那一部分光学系统中所成的象．对入射光瞳中心有最小张角（图 4.33 中的 $2\phi_0$）的象，称为入射窗，角 $2\phi_0$ 称为视场角或角视场．入射窗对应的实物光阑就是所要求的场光阑．

入射窗由仪器所成的象（亦即场光阑由它后面那一部分光学系统所成的象），称为出射窗．出射窗直径对出射光瞳中心的张角（图 4.33 中的 $2\phi_i$）有时称为象场角．

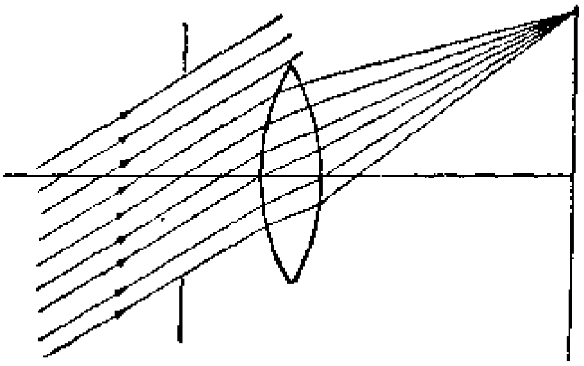


图 4.35 渐晕

可能出现这样的情况，虽然孔径光阑比透镜小，但有些光线完全落到透镜之外，而透镜的某些部分却完全没有接收到来自物的某些区域的光．这种效应通常称为渐晕，如图 4.35 所示．视场比较小的光学系统（如望远镜）中很少出现这种效应，但在别的仪器（如照相物镜）中却是重要的．设计者有时利用渐晕来消除不希望有的轴外象差．

§ 4.8.3 象的亮度和照度

现在简单讨论那些表征象空间和物空间中辐射情况的基本光度学量之间的关系．

假定物是面积为 δS_0 的小平面元，垂直于轴，其辐射遵守朗伯定律．这时光度学亮度 B_0 与方向无关．单位时间内射到入射光瞳中以轴为中心的一个环元上的能量 δF_0 为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\delta F_0 = B_0 \cos\gamma_0 \delta S_0 \delta \Omega_0, \tag{15}$$

式中

$$\delta\Omega_0 = 2\pi \sin\gamma_0 \delta\gamma_0, \tag{16}$$

γ_0是通过此环元的一条代表光线与轴的夹角。 如果仍用θ_0表示物方的半个角孔径，则单位时间内射到入射光瞳上的总能通量为

$$F_0 = 2\pi B_0 \delta S_0 \int_0^{\theta_0} \sin\gamma_0 \cos\gamma_0 d\gamma_0 = \pi B_0 \delta S_0 \sin^2\theta_0. \tag{17}$$

从出射光瞳射出的能通量F_1可表示为类似的形式：

$$F_1 = \pi B_1 \delta S_1 \sin^2\theta_1. \tag{18}$$

F_1不能超过F_0，并且只有在光学系统内部没有反射、吸收或散射所引起的损失时，F_1才能等于F_0；因此

$$B_1 \sin^2\theta_1 \delta S_1 \leqslant B_0 \sin^2\theta_0 \delta S_0. \tag{19}$$

现在$\delta S_1/\delta S_0$的比值等于横向放大率M的平方：

$$\frac{\delta S_1}{\delta S_0} = M^2. \tag{20}$$

如果进一步假定系统遵守正弦条件[§ 4.5(6)式]，

$$\frac{n_0 \sin\theta_0}{n_1 \sin\theta_1} = M. \tag{21}$$

把(20)和(21)代入(19)式，由此得出

$$B_1 \leqslant \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0. \tag{22}$$

特别是，如果物空间和象空间的折射率相等，则根据(22)式，象的光度学亮度不能超过物的光度学亮度，只有当光在系统内部的损失可以忽略时，二者才能相等.

假定损失可以忽略，由(18)和(22)式得出

$$F_1 = \pi\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \delta S_1 \sin^2\theta_1, \tag{23}$$

因此，轴上象点P_1的光度学照度$E_1 = F_1/\delta S_1$是

$$E_1 = \pi\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \sin^2\theta_1. \tag{24}$$

如果θ_1很小，则出射光瞳对P_1所张的立体角Ω_1近似等于

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\pi\sin^2\theta_1$，因此(24)式可写成

$$E_1=\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0\Omega_1. \tag{25}$$

这个关系式适用于轴上的象，但轴外的象也可用类似方法处理。设 ϕ_1 是主光线 CQ_1 与轴的夹角(见图 4.36)，则得出下式以代替(25)式，

$$E_1=\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0\Omega_1'\cos\phi_1, \tag{26}$$

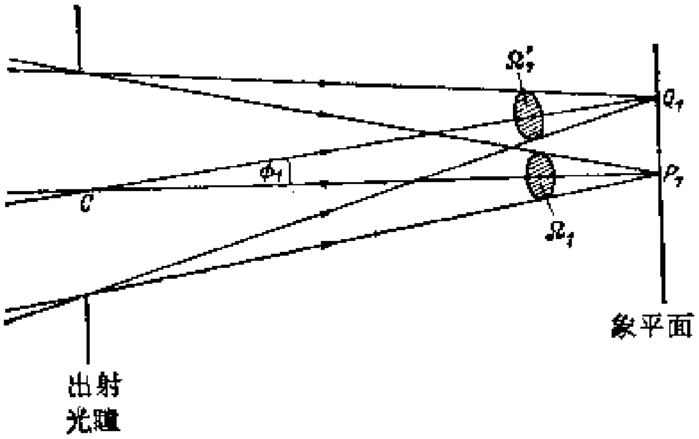


图 4.36 轴外象点上的照度

Ω_1' 是出射光瞳对 Q_1 所张的立体角。利用(9)式，得出

$$\frac{\Omega_1'}{\Omega_1}=\cos\phi_1\left(\frac{CP_1}{CQ_1}\right)^2=\cos^3\phi_1, \tag{27}$$

因此

$$E_1=\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0\Omega_1\cos^4\phi_1. \tag{28}$$

这个公式表示，假定物的辐射遵照朗伯定律，光在系统内部没有损失，并且半个角孔径 θ_1 很小，则象的照度随 $\cos^4\phi_1$ 而减小，ϕ_1 是通过象点的主光线与轴的夹角。

在使用上述那些公式时，必须记住它们是利用几何光学的一些定律导出的。对于一个很小的光源，这些公式就不再能给出良好的近似了。例如，一个点光源的象并不是一个点，而是由一些圆环围绕着的一个亮圆斑(爱里图样，见§8.5.2)；这时，光分布在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

整个衍射花样上，结果在几何焦点上的照度小于(24)式给出的数值.

§4.9 光线追迹[1]

设计光学仪器时，必需比高斯光学结果更准确地定出光的路径. 要做到这一点，可以通过代数分析，考虑到特征函数展开式中的更高次项，这种方法将在下一章中讨论. 也可以逐次应用折射(或反射)定律，借助于基础几何学来准确地定出光线的路径；现在简单叙述这种方法，它通常称为**光线追迹**，在实践中被广泛使用.

§4.9.1 斜子午光线[2]

我们首先考虑一条斜子午光线，即一条来自轴外物点的子午光线的追迹. 设 A 是系统第一个面的极点. 又设此面是以 C 点为球心而半径为 r 的球形折射面，其两边媒质的折射率分别为 n 和 n'. 子午面上的入射光线 OP(见图 4.37)，由 OP 与轴夹角 U 以及极点 A 到 OP 与轴交点 B 的距离 $L = AB$ 来确定. 设 I 是入射光线与法线 PC 的夹角. 折射光线对应的量都用带撇的记号来表示.

所用的符号规则如下：假定光从左方入射，当 C、B 和 B' 在 A 的右方时，则 r，L 和 L' 为正. 如果轴以 B(或 B')为中心，顺

---

1) 对光线追迹更详细的讨论，例如可参看 A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design*, Part I (Oxford University Press, 1929;重印于 Dover Publications, Inc., New York, 1957); M. von Rohr, *The Geometrical Investigation of Formation of Images in Optical Systems*, R. Kanthack 译自德文 (London, H. M. Stationery Office, 1920); M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1958). G. Black 已叙述了利用电子计算机进行光线追迹的方法，*Proc. Phys. Soc.* B, **68** (1954), 569. T. Smith 已提出了通过非球面的光线追迹方法，*Proc. Phys. Soc.*, **57** (1945), 286; 又见于 W. Weinstein, *Proc. Phys. Soc.* B, **65** (1952), 731.

2) 在§4.9.1，§4.9.2和§4.10中，用的是在子午光线追迹中常用的表示法和符号规则. 对角度的符号规则与全书其他部分所用的笛卡儿符号规则不同；令 $U = -\gamma$, $U' = -\gamma'$，就换回到笛卡儿符号规则.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

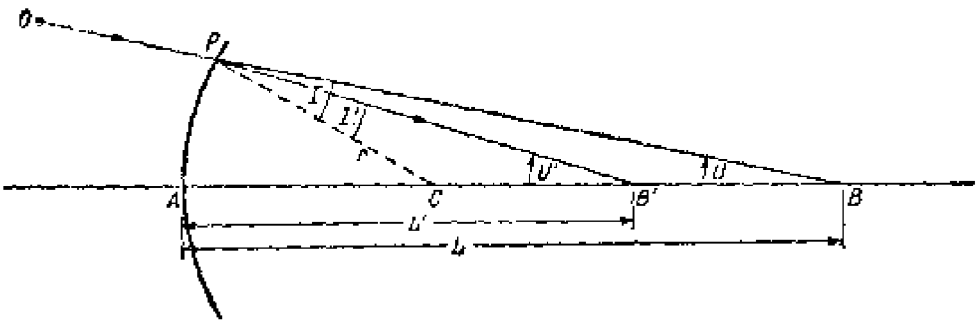


图 4.37 斜子午光线追迹所用的表示法

时针方向转动小于 90°，就能与光线 PB（或 PB'）重合，则角度 U（或 U'）为正．如果入射（或折射）光线以入射点 P 为中心，顺时针方向转动小于 90°，就能与法线 PC 重合，则角度 I（或 I'）为正．

用来确定入射光线的量 L 和 U 可以假定是已知的，这时需要计算 L' 和 U'．目前假定 L 和 r 都是有限值，由三角形 PCB，得出

$$\sin I = \frac{L-r}{r}\sin U. \tag{1}$$

利用折射定律：

$$\sin I' = \frac{n}{n'}\sin I. \tag{2}$$

由图还得出

$$U' = U + I - I'. \tag{3}$$

最后，由三角形 PCB'，得出

$$L' = \frac{\sin I'}{\sin U'}r + r. \tag{4}$$

逐次应用折射方程 (1)—(4)，就能得到用来确定折射光线 PB' 的量 L' 和 U'．

对于第二个面，折射光线 PB' 就变成入射光线．把 L' 和 U' 改写为 L_1' 和 U_1'，用 L_2 和 U_2 表示其对应值，L_2 从第二个面的极点算起，于是得出传递方程：

$$L_2 = L_1' - d, \tag{5}$$

$$U_2 = U_1', \tag{6}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $d>0$，它是两个面的极点间的距离.

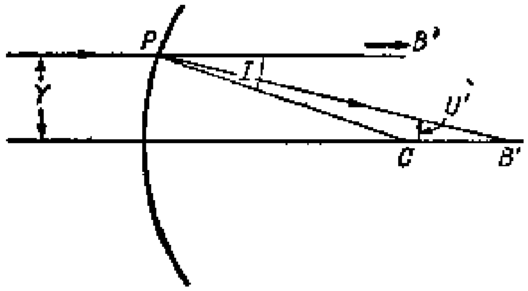
接着，把(5)和(6)式给出的“入射值”代入折射方程(1)—(4).解出带撇的量，这就得出通过第二个面的光线追迹了. 用这种方法，重复应用折射方程和传递方程，就能得到光线在象空间中的 L' 和 U' 值. 因此，这条光线与象平面的交点就可以确定了. 在实践中，自然不只对一条光线，而是对若干条适当选择的光线，通过整个系统进行追迹；根据这些光线与象平面的交点，即可粗略估计这个系统的性能.

如果其中有一个面(譬如说，第 k 面)是反射镜面，则在上述公式中令 $n'_k=-n_k$，就可以从形式上推导出适用的公式. 这时 d_k 必须取负值. 而且以后所有的折射率和 d 值也必须取负值，除非发生第二次反射，这时折射率和 d 值又恢复正号.

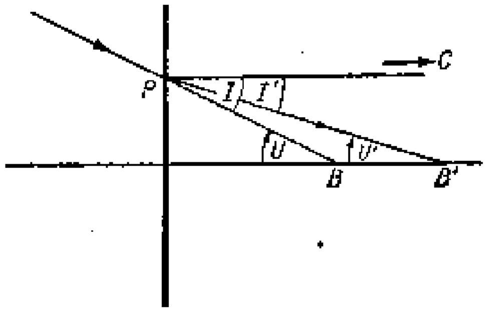
其次，考虑前面一直排除了的两种特殊情况. 如果入射光线平行于轴($L=\infty$)，则用下式

$$\sin I=\frac{Y}{r}, \tag{7}$$

来代替(1)式，式中的 Y 是从轴到光线的距离[见图 4.38(a)].



(a) $L=\infty$ 的特殊情况



(b) $r=\infty$ 的特殊情况

图 4.38

如果是平面($r=\infty$)，则用下面一组方程来代替(1)—(4)[参看图 4.38(b)]：

$$I=-U, \tag{8}$$

$$\sin U'=\frac{n}{n'}\sin U, \tag{9}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$I' = -U', \tag{10}$$

$$L' = \frac{\tan U}{\tan U'} L. \tag{11}$$

利用(9)式,则(11)式也可以写成以下的形式:

$$L' = \frac{n'}{n} \frac{\cos U'}{\cos U} L, \tag{11a}$$

当角度很小时,上式比(11)式更便于计算.

此外,定出第 k 面上入射点 P_k 的坐标 (Y_k, Z_k) 以及两个相继的入射点间距离 $D_k = P_kP_{k+1}$ 是有用的(见图 4.39).

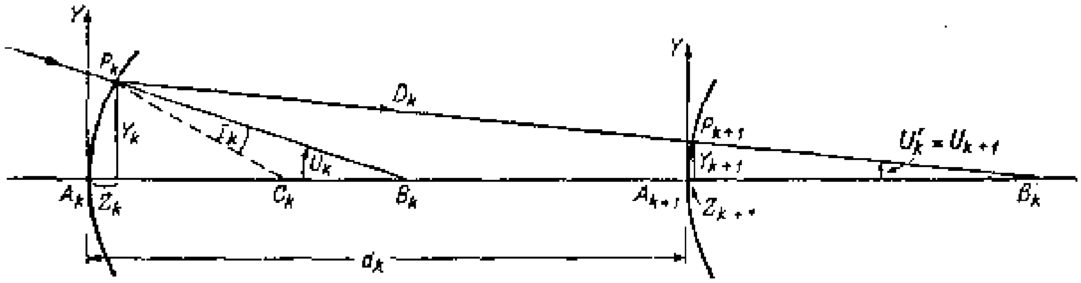


图 4.39 斜子午光线通过两个相继的折射面时的追迹

由图得出:

$$Y_k = r_k \sin(U_k + I_k), \tag{12}$$

$$Z_k = r_k - r_k \cos(U_k + I_k) = \frac{Y_k^2}{[1 + \cos(U_k + I_k)] r_k}, \tag{13}$$

$$D_k = (d_k + Z_{k+1} - Z_k) \sec U'_k. \tag{14}$$

利用 Y_k, Z_k 和 U'_k, 则有

$$L'_k = Z_k + \frac{Y_k}{\tan U'_k}. \tag{15}$$

这个关系式可用来核对由(11a)或(11)式算得的数值.

在 L_k 为无穷大的特殊情况下, $U_k = 0$, 并且(12)—(15)式仍然成立. 如果 r_k 为无穷大,则 Y_k 可由下式算出,

$$Y_k = L_k \tan U_k, \tag{16}$$

这时 $Z_k = 0$.

§ 4.9.2 傍轴光线

如果光线对轴的倾角足够小,则在上述公式中各角的正弦可

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

用各角本身来代替. 这时,公式就简化为光路的高斯近似. 在实践中,利用这种“傍轴光线追迹公式”来计算光学系统的高斯放大率和焦距. 因此,这里将简单介绍这些公式.

习惯上用小写字母来表示傍轴区域的量. 折射方程(1)—(4)变为

$$i=\frac{l-r}{r}u, \tag{17}$$

$$i'=\frac{n}{n'}i, \tag{18}$$

$$u'=u+i-i', \tag{19}$$

$$l'=\frac{i'}{u'}r+r. \tag{20}$$

传递方程(5)和(6)改写为

$$l_2=l_1'-d, \tag{21}$$

$$u_2=u_1'. \tag{22}$$

对 $L=\infty$ 以及 $r=\infty$ 的情况, 傍轴方程用类似的方法由(7)—(11a)式得出.

关于入射高度的傍轴方程(以后需用),由(12)式得出

$$y_k=r_k(u_k+i_k). \tag{23}$$

虽然(17)—(20)式中包含入射和折射光线与轴的夹角, 但 l' 与这些量无关. 由上述关系式消去 i, i' 和 u', 就得到这个结果, 在 § 4.4.1 中用不同的方法也得到了这个结果. 这时 u 也不出现, 我们得出

$$n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)=n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right). \tag{24}$$

可以看出,这就是阿贝关系式 § 4.4(7).

要确定横向高斯放大率 M, 只需对轴上物点发出的一条傍轴光线进行追迹. 然后根据 § 4.4(54) 式,

$$M=\frac{n_1}{n_l}\frac{u_1}{u_l}, \tag{25}$$

式中的下标 1 和 l 分别指第一种和最后一种媒质.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

对物从无穷远发出并具有某一高度 y_1 的一条傍轴光线进行追迹，就可以得出系统的焦距 f. 以第二焦点处的轴为参考系，则象空间中共轭光线方程是 $y_l/z_l = -u'_l$，由 § 4.3(10) 式，得出

$$f' = -\frac{y_1}{u'_l}. \tag{26}$$

§ 4.9.3 不交轴光线

至此只考虑了位于子午面上的光线. 现在我们简单讨论一下**不交轴**光线(即与轴不共面的光线)的追迹. 这些光线的追迹麻烦得很，通常只在设计很大孔径的系统时才去做.

现在，光线是由它的方向余弦以及它与系统中某一特定面的交点坐标来确定的. 在第一个面的极点 A_1 处作笛卡儿直角坐标轴，其 Z 轴沿着系统的轴. 设 $L_1, M_1, N_1(L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 = 1)$ 是入射到 $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 点的光线方向余弦(见图 4.40).

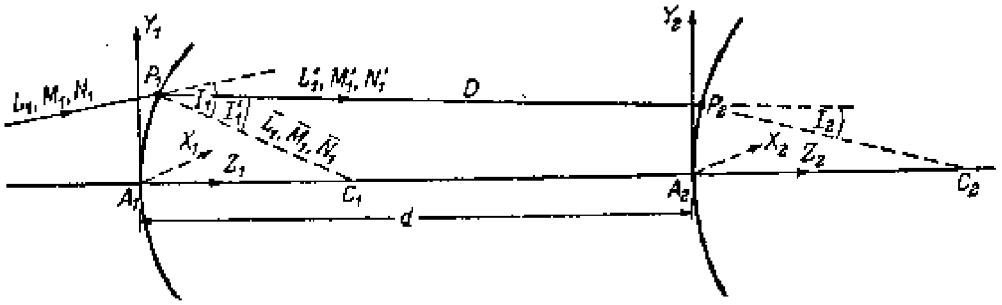


图 4.40 不交轴光线的追迹

第一步是计算入射角 I_1 的余弦值. 设 r_1 为第一个面的半径，则 P_1 点的法线方向余弦是

$$\bar{L} = -\frac{X_1}{r_1}, \quad \bar{M}_1 = -\frac{Y_1}{r_1}, \quad \bar{N}_1 = \frac{r_1 - Z_1}{r_1},$$

因此

$$\cos I_1 = L_1\bar{L}_1 + M_1\bar{M}_1 + N_1\bar{N}_1$$

$$= N_1 - \frac{1}{r_1}(L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1). \tag{27}$$

第二步是确定折射光线的方向余弦 L'_1, M'_1, N'_1. 这分成两步去做. 首先利用下述形式的折射定律

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$n'\cos I_1' = \sqrt{n'^2 - n^2 + n^2\cos^2 I_1} \tag{28}$$

来计算折射角的余弦值．这要利用折射光线位于入射光线和折射面法线所规定的平面上这一事实．用 $\mathbf{s}_1$，$\mathbf{s}_1'$ 和 $\bar{\mathbf{s}}_1$ 分别表示沿着入射光线、折射光线和法线的单位矢量，即其分量分别为 (L_1, M_1, N_1)，(L_1', M_1', N_1') 和 $(\bar{L}_1, \bar{M}_1, \bar{N}_1)$ 的矢量，则由共面条件得出

$$\mathbf{s}_1' = \lambda \mathbf{s}_1 + \mu \bar{\mathbf{s}}_1, \tag{29}$$

式中的 λ 和 μ 是两个标量函数．为了定出 λ 和 μ，先用 $\mathbf{s}_1$ 点乘(29)式，并利用(见图 4.40) $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1' = \cos(I_1 - I_1')$，$\mathbf{s}_1 \cdot \bar{\mathbf{s}}_1 = \cos I_1$，这就得出

$$\cos(I_1 - I_1') = \lambda + \mu\cos I_1.$$

再用 $\bar{\mathbf{s}}_1$ 点乘(29)式，并利用关系式 $\bar{\mathbf{s}}_1 \cdot \mathbf{s}_1' = \cos I_1'$，$\bar{\mathbf{s}}_1 \cdot \mathbf{s}_1 = \cos I_1$．则得出

$$\cos I_1' = \lambda\cos I_1 + \mu.$$

由上两式得出

$$\lambda = \frac{\sin I_1'}{\sin I_1} = \frac{n}{n'}, \quad \mu = \frac{1}{n'}(n'\cos I_1' - n\cos I_1),$$

代入(29)式，就得到折射光线方向余弦的三个方程如下：

$$\left.\begin{aligned} n'L_1' &= nL_1 - \sigma X_1, \\ n'M_1' &= nM_1 - \sigma Y_1, \\ n'N_1' &= nN_1 - \sigma(Z_1 - r_1), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中

$$\sigma = \frac{1}{r_1}(n'\cos I_1' - n\cos I_1). \tag{31}$$

这样，借助于折射方程(27)，(28)，(30)和(31)式，就完成了通过第一个面的光线追迹．

对于第二个面，折射光线就成为入射光线了．在第二个面的极点 A_2 处作直角坐标轴，分别与 A_1 处的各轴相平行，则方向余弦的传递方程为

$$L_2 = L_1', \quad M_2 = M_1', \quad N_2 = N_1'. \tag{32}$$

设 d 为两个面的极点间距离 A_1A_2．用 X_1^+，Y_1^+，Z_1^+ 表示 P_1 点在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

A_1 处各轴上的坐标，则坐标的传递方程为

$$X_1^+ = X_1,\quad Y_1^+ = Y_1,\quad Z_1^+ = Z_1 - d. \tag{33}$$

其次，必须定出折射光线和第二个面交点 P_2 的坐标 (X_2, Y_2, Z_2). 设 D 表示从 P_1 到 P_2 的距离，则有

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X_1^+ + L_2D,\\ Y_2 &= Y_1^+ + M_2D,\\ Z_2 &= Z_1^+ + N_2D. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

我们利用 P_2 位于第二个面上这一事实来定出 D. 设 r_2 为这个面的半径，则有

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - 2Z_2r_2 = 0. \tag{35}$$

把 (34) 式代入上式，就得到 D 的方程如下:

$$D^2 - 2Fr_2D + Gr_2 = 0, \tag{36}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} F &= N_2 - \frac{1}{r_2}(L_2X_1^+ + M_2Y_1^+ + N_2Z_1^+),\\ G &= \frac{1}{r_2}[(X_1^+)^2 + (Y_1^+)^2 + (Z_1^+)^2] - 2Z_1^+. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

对于轴上光线，$D = d$，加上这一条件，则由 (36) 式得出 D 的表达式如下:

$$D = r_2\left(F - \sqrt{F^2 - \frac{1}{r_2}G}\right). \tag{38}$$

把 D 代入 (34) 式，就定出了 P_2 的坐标.

最后，要完成这一轮过程，还必须算出在第二个面上入射角 I_2 的余弦值. 它由一个严格类似于 (27) 的关系式给出，即

$$\cos I_2 = N_2 - \frac{1}{r_2}(L_2X_2 + M_2Y_2 + N_2Z_2), \tag{39}$$

或者，利用 (34) 和 (38) 式，

$$\begin{aligned} \cos I_2 &= F_2 - \frac{1}{r_2}D\\ &= \sqrt{F^2 - \frac{1}{r_2}G}. \end{aligned} \tag{40}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，最后一步包括对公式(40)，(38)和(34)的计算.

因为对一般不交轴光线的追迹很麻烦，有时就只限于计算在一特定主光线最近邻的不交轴光线. 这种不交轴光线通过整个系统的追迹，可利用类似于傍轴光线追迹的简化方法[1]，这些简化方法也适用于确定径向焦面的位置.

§4.10 非球面的设计

在大多数光学系统中，使用透镜和反射镜，其表面的形状为平面、球面或抛物面. 只限于如此简单的表面形状，主要是由于在制作形状更复杂而具有光学所要求的高精度的表面时，碰到了实际困难. 但是，只限于简单的表面形状，自然也就限制了通常设计的系统所能达到的极限性能. 因此，尽管制作上有困难，在某些系统中还是使用一些形状更复杂的表面，称为**非球面**. 早在1905年，施韦茨察耳德[2]已研究过一种由两个非球面镜组成的望远物镜，并已指出这种系统可以做到不晕.

1930年，汉堡的施密特(B. Schmidt)制作了一台新型的望远镜，它由一个球面镜和一个设计适宜的非球面透镜组成，后者位于球面镜的曲率中心. 已经发现这种系统的性能很好(在§6.4中更详细地讨论). 用这种望远镜在一个底片上就可能拍摄天空的很大范围，比用通常设计的望远镜所能得到的要大几百倍. 因而**施密特照相机**已成为天文学研究中的一种重要工具. 利用施密特照相机原理的非球面系统，也已用于某些投影式电视接收机[3]、X射线荧光屏照相术以及某些快速的低色散摄谱仪. 非球面也已有效地

---

1) 参看 H. H. Hopkins, *Proc. Phys. Soc.*, **58** (1946), 663；以及他的著作，*Wave Theory of Aberrations* (Oxford, Clarendon Press, 1950), pp. 59, 65.

2) K. Schwarzschild, *Astr. Mitt. Königl. Sternwarte Göttingen* (1905). 翻印自 *Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*, **4** (1905—1906), No. 2.

后来制造了两台这一类的望远镜，一台在印第安纳大学，孔径为24吋；另一台在布朗大学，孔径为12吋.

3) 例如参看 I. G. Malloff and D. W. Epstein, *Electronics*, **17** (1944), 98.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

应用于显微术中（参看 § 6.6）.

任一共轴系统中用一个非球面，一般就可能保证轴上精确无象散；任一共轴系统中用两个非球面，一般就可以做到不晕. 本节中将导出设计这类非球面的公式.

§ 4.10.1 轴上无象散的实现[1]

考虑轴上物点 P 所发出的光线. 在光学系统的象空间中，通过出射光瞳不同环带的光线一般将与轴相交于不同点. 设 $S^{(0)}$ 是系统中最后一个面，O 是这个面的轴点（图 4.41）. 将要看到，可以通过修改 $S^{(0)}$ 面的形状，使成象光锥精确校正到共心；更确切地说，一般总可用一个新面 S 来代替 $S^{(0)}$，这个新面将保证象空间中所有光线都与轴相交于某一给定点 Q.

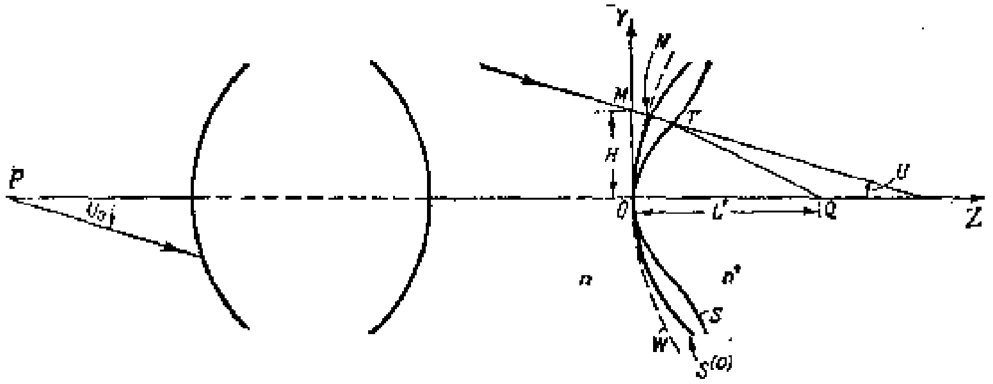


图 4.41 设计一个非球面来达到轴上无象散

由于对称性，因此只需讨论子午光线. 在最后一个面的前空间中，每一条光线将由下述参量确定：光线与轴的夹角 U 及其在 Y 轴上的截距 $H = OM$（见图 4.41）. 为了方便起见，光线标记如下：设 t 是某一个方便的参量，例如是物空间中相应光线与轴的夹角 U_0，或者是物空间中相应光线与第一个面交点的高度. 这时，

1) 这里叙述的方法，引自 E. Wolf and W. S. Preddy, *Proc. Phys. Soc.*, **59** (1947), 704; E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **61** (1948), 494. 类似的公式也出自 R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* [油印讲稿，Brown University, R. I. (1944)；由 University of California Press, Berkeley and Los Angeles 印刷出版 (1964)，§ 24.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光锥可由下面两个函数关系式完全确定：

$$U = U(t),\quad H = H(t). \tag{1}$$

对于轴上光线，可假定 $t=0$。通常不知道(1)式的显函数形式；然而对任一组给定的 t 值，由光线追迹可得到相应的 U 值和 H 值的表。

设 W 是通过 O 点与光锥正交的面(波阵面)(图 4.41)，N 是通过 M 的光线与 W 面的交点。假设可以找到一个校正面 S 具有前面所要求的特性，则在已校正的系统中，从 N 到 Q 的光程长度必须等于从 O 到 Q 的光程长度。设 $T(Y, Z)$ 是光线与 S 面的交点，则

$$[NT] + [TQ] = [OQ]. \tag{2}$$

设 n 是 S 前空间的折射率，n' 是象空间的折射率，则有[1]

$$\left.\begin{aligned} &[NT] = [MT] - [MN] = nZ\sec U - [MN],\\ &[TQ] = n'\sqrt{(L'-Z)^2 + (H - Z\tan U)^2},\\ &[OQ] = n'L', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

L' 表示从 O 到 Q 的距离。

在 $[NT]$ 表达式中出现的光程 $[MN]$，也可用已知量来计算。由 Y 轴上的一段 OM，光线的一段 MN 和波阵面 W 上的一段曲线 NO 组成一条封闭曲线，对此封闭曲线应用拉格朗日不变量关系式 § 3.3(1)，则有

$$\int_{OM} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} + \int_{MN} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} + \int_{NO} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{4}$$

式中 $\mathbf{s}$ 是沿光线方向的单位矢量，$d\mathbf{r}$ 是积分的路程元。由图得出，

$$\left.\begin{aligned} &\int_{OM} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} = -n\int_O^H \sin U\,dH = -n\int_0^t \sin U\frac{dH}{dt}dt,\\ &\int_{MN} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} = [MN],\\ &\int_{NO} n\mathbf{s}\cdot d\mathbf{r} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

代入(4)式，得出

---

1) 与 § 4.9.1 一样，如果轴绕它与光线的交点顺时针方向转动小于 90°，就能与光线重合，则角度 U 为正。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$[MN] = n\int_0^t \sin U \frac{dH}{dt}\,dt. \tag{6}$$

(6) 式把 $[MN]$ 表示为一个积分，可用 U 和 H 的数值表对此积分进行数值计算[1].

把 (3) 和 (6) 式代入 (2) 式，得到 Z 的方程如下：

$$\mathscr{A} Z^2 + 2\mathscr{B} Z\cos U + \mathscr{C}\cos^2 U = 0, \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{A} &= n'^2 - n^2,\\
\mathscr{B} &= n^2\int_0^t \sin U \frac{dH}{dt}\,dt - n'^2(L'\cos U + H\sin U) + nn'L',\\
\mathscr{C} &= n'^2H^2 - \left(n\int_0^t \sin U\frac{dH}{dt}dt\right)\left(n\int_0^t \sin U\frac{dH}{dt}dt + 2n'L'\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

因此

$$Z = \frac{\cos U}{\mathscr{A}}\left[-\mathscr{B} \pm \sqrt{\mathscr{B}^2 - \mathscr{A}\mathscr{C}}\right]. \tag{9}$$

由图还得出

$$Y = H - Z\tan U. \tag{10}$$

因 $t = 0$ 时，$Z = U = H = 0$，又因已设 L' 为正(见图4.41)，所以 (9) 式中的平方根前面必须取正号．最后，合并 (9) 和(10)，得到

$$Z + iY = \frac{-\mathscr{B} + \sqrt{\mathscr{B}^2 - \mathscr{A}\mathscr{C}}}{\mathscr{A}}\, e^{-iU} + iH. \tag{11}$$

(11) 式是非球面 S 用自由参量 t 表示的一个精确的参量方程.

焦点 Q 在无穷远 ($L' = \infty$) 的特殊情况也是有意义的．为了推导出适当的公式，我们注意到 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 两者都只含有 L' 的一次项，因此当 L' 足够大时，

---

1) 利用从 P 到 N 的光程等于从 P 到 O 的光程这一性质，自然有可能直接从光线追迹算出 $[MN]$．这时，

$$[MN] = [PO] - [PM].$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$-\mathscr{B}+\sqrt{\mathscr{B}^2-\mathscr{A}\mathscr{C}}=\mathscr{B}\left[-1+\sqrt{1-\frac{\mathscr{A}\mathscr{C}}{\mathscr{B}^2}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\mathscr{A}\mathscr{C}}{\mathscr{B}}-\frac{1}{8}\frac{\mathscr{A}^2\mathscr{C}^2}{\mathscr{B}^3}-\cdots$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\mathscr{A}\mathscr{C}}{\mathscr{B}}+o\left(\frac{1}{L'}\right).$$

在 $L'\to\infty$ 的极限情况下，(11) 式则化为

$$Z+iY=\frac{ne^{-iU}}{n-n'\cos U}\int_0^t \sin U\frac{dH}{dt}dt+iH. \qquad (12)$$

我们只讨论了光学系统最后一个面是非球面时的情况，但这种方法可推广到位于光学系统内部的一个非球面的设计．然而在这种情况下计算麻烦得很，这里就不加讨论了[1]．

§4.10.2 不晕的实现[2]

我们已经看到，把光学系统的一个面做成非球面，就有可能实现轴上精确地无象散．现在我们来考虑设计两个非球面，要求它们不仅保证轴上无象散，而且保证满足正弦条件．

设 S 和 S' 是两个非球面，其表面形状有待确定．假定在光学系统中，S 和 S' 是相邻面[3]．但它们与物点或象点间可由任一数目的折射或反射面隔开．我们再一次只考虑系统的最后校正，并假定除 S 和 S' 的表面形状外，所有设计数据都是已知的．

引入两组笛卡儿直角坐标轴，其原点分别在 S 和 S' 的极点 O 和 O' 处，其 Z 轴均沿着系统的轴方向．S 和 S' 面分别以 O 和 O' 处的坐标轴为参考系．

---

1) 详见 E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **61**(1948),494. 别的方法则参看 M. Herzberger and H. O. Hoadley, *J. Opt. Soc. Amer.*, **36** (1946), 334; 和 D. S. Volosov, *J. Opt. Soc. Amer.*, **37** (1947),342.

2) 本节中所叙述的方法，引自 G. D. Wassermann and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc. B*, **62** (1949), 2.

3) 推广到 S 和 S' 不是光学相邻面的光学系统，可参看 E. M. Vaskas, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47** (1957), 669.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

轴上物点 P 发出的光线锥，在 S 面的前空间中仍由关系式(见图 4.42)

$$U = U(t), \quad H = H(t) \tag{13}$$

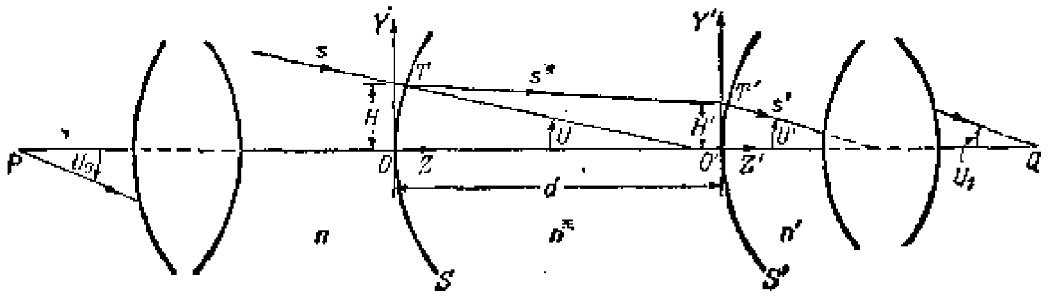


图 4.42　设计两个非球面来达到不晕

确定. 在 S' 面的后空间(在已校正的系统中)，光线锥将由类似的关系式

$$U' = U'(t'), \quad H' = H'(t') \tag{14}$$

确定. 从一选定的轴上象点 P' 进行反向的光线追迹，就可得到(14)的表格形式.

如果物距和象距都是有限值，则取物空间和象空间中的对应光线与系统轴的夹角正弦值为参量 t 和 t'[1]:

$$t = \sin U_0, \quad t' = \sin U_1. \tag{15}$$

如果物在无穷远，则取物空间中相应光线离轴距离 H_0 为参量 t; 如果象在无穷远，则取 $t' = H_1$, H_1 是象空间中相应光线离轴的距离. 在每一种情况下，正弦条件都要求

$$\frac{t}{t'} = \text{常数}. \tag{16}$$

现在，我们的问题可以表述如下：给出(13)和(14)式后，要找出两个面 S 和 S'，它们应保证光锥 (U, H) 相继在这两个面上折射后变为光锥 (U', H')；而且这两个光锥中的对应光线必须满足(16)式.

设 n 是 S 面的前空间的折射率，n' 是 S' 面的后空间的折射率，

---

1) 如果我们希望(除了轴上无象散以外)满足赫谢耳条件而不是正弦条件，则应取 $t = \sin U_0/2$, $t' = \sin U_1/2$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

n^* 是介于这两个面的空间的折射率。又设 $\mathbf{s}$ 是沿 $T(Z, Y)$ 点入射光线方向的单位矢量，$\mathbf{s}^*$ 是沿其折射光线方向的单位矢量（见图 4.42)。

根据折射定律(参看 § 3.2.2)，矢量 $\mathbf{N} = n\mathbf{s} - n^*\mathbf{s}^*$ 必在 T 处的面法线方向上。设 $\boldsymbol{\tau}$ 是此面的子午截线在 T 处的单位切线矢量，则有

$$(n\mathbf{s} - n^*\mathbf{s}^*) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \tag{17}$$

矢量 $\mathbf{s}$，$\mathbf{s}^*$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的分量是

$$\left.\begin{array}{llll}\mathbf{s}: & 0, & -\sin U, & \cos U, \\ \mathbf{s}^*: & 0, & -\sin U^*, & \cos U^*, \\ \boldsymbol{\tau}: & 0, & \dfrac{\dot{Y}}{\sqrt{\dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}}, & \dfrac{\dot{Z}}{\sqrt{\dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}},\end{array}\right\} \tag{18}$$

其中 U^* 是折射光线 TT' 与系统轴的夹角，点表示对参量 t 的导数。(17) 式变成

$$n(\dot{Z}\cos U - \dot{Y}\sin U) = n^*(\dot{Z}\cos U^* - \dot{Y}\sin U^*). \tag{19}$$

设 D 是从 T 到 T' 的距离，D_y 和 D_z 是 D 在 Y 轴和 Z 轴上的投影，d 是从 O 到 O' 的轴上距离，则有

$$\cos U^* = \frac{D_z}{D}, \quad \sin U^* = \frac{D_y}{D}, \tag{20}$$

其中

$$D_y = Y - Y', \quad D_z = d + Z' - Z, \quad D = \sqrt{D_y^2 + D_z^2}. \tag{21}$$

由图还得出

$$Y = H - Z\tan U, \tag{22}$$

$$Y' = H' - Z'\tan U'. \tag{23}$$

(19) 式中的 $\cos U^*$ 和 $\sin U^*$ 用 (20) 式代入，$\dot{Y}$ 用 (22) 式代入，由此得出

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{nD\cos U - n^*D_z}{nD\sin U - n^*D_y} + \tan U\right)^{-1}\left[\frac{dH}{dt} - Z\frac{d}{dt}(\tan U)\right]. \tag{24}$$

与此类似，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{dZ'}{dt'}=\left(\frac{n'D\cos U'-n^*D_z}{n'D\sin U'-n^*D_y}+\tan U'\right)^{-1}\left[\frac{dH'}{dt'}-z'\frac{d}{dt'}(\tan U')\right]. \tag{25}$$

(21)—(25)式如果满足(16)式和下述边界条件：当 $t=t'=0$时，$z=z'=0$；就能完全算出两个校正面．因为用(21)，(22)和(23)式可从(24)和(25)式中消去Y和Y'；并且用(16)式就得到Z和Z'的两个一阶联立微分方程，其形式为

$$\frac{dZ}{dt}=f(Z,Z',t),\quad \frac{dZ'}{dt}=g(Z,Z',t). \tag{26}$$

这两个方程可用标准方法作积分[1]．然而，不仅需要在参量 t 的一个选定范围内确定Z和Z'，而且需要确定Y和Y'，所以对未知量逐步求解比消去Y和Y'更好些．

---

1) 例如，用 Adam 方法(参看 E. T. Whittaker and G. Robinson, *The Calculus of Observations*, Glasgow, Blackie & Son, 4th ed., 1946, 363)，或用 Runge 和 Kutta 方法(参看 C. Runge and H. König, *Numerisches Rechnen*, Berlin, Springer, 1924)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第五章　象差的几何理论

在§4.9中已经讲过，在几何光学范围内，光线路径对高斯理论预期值的偏离，既可以通过光线追迹来研究，也可以利用代数分析来研究．后一种处理方法是本章的研究课题．在这种方法中，要保留特征函数展开式中含有离轴距离高于二次方的项．这些项代表几何象差．

1839年，达格雷（L. J. M. Daguerre，1789—1851）发现了照相术，当初推广高斯理论的一些尝试，主要有赖于这一发现．在此以前，实用光学主要涉及望远物镜的构造，这时则面临制造大孔径大视场物镜这一新课题．匈牙利数学家珀兹伐（J. Petzval）相当成功地解决了一个与此有关的问题，即把含有光线对轴倾角高次方的项补充到高斯公式中[1]．珀兹伐在1840年左右制造一种著名的人象照相镜头[如图6.3(b)所示]，已证明远胜于当时有过的任何一种镜头，他以此表明了他的计算的实际价值．最早对几何象差的系统处理已由赛德耳（L. Seidl）详细发表了[2]，他考虑了一般的共轴球面系统中所有的三次项．后来，他所作的分析又被很多作者推广和简化了．

因为波阵面是光线锥的正交轨面，由此得出，成象光锥不共心，则其相关联的波阵面亦偏离球面形状．波阵面形状的知识，对于在衍射理论的基础上更精细地处理象差是特别重要的（见第九章）．由于这个原因，并且还由于光锥不共心与其波阵面非球面二者有本质的联系，因此我们将一起考虑这两种偏离．我们的分析

1) J. Petzval, *Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen* (Pesth, 1843); 以及 "Bericht über optische Untersuchungen", *Ber. Kais. Akad. Wien, Math. naturwiss. Kl.*, **24**(1857), 50, 92, 129.

2) L. Seidel, *Astr. Nachr.* **43** (1856), No. 1027, 289, No. 1028, 305, No 1029, 321.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

将部分地基于施瓦茨蔡耳德的重要研究[1]，根据上述目的而略加改动.

§5.1 波象差和光线象差；象差函数

考虑一个旋转对称的光学系统. 设 P_0', P_1' 和 P_1 分别是物点 P_0 发出的一条光线与入射光瞳平面、出射光瞳平面和高斯象平面的交点. 如果 P_1^* 是 P_0 的高斯象，则矢量 $\boldsymbol{\delta}_1 = \overrightarrow{P_1^*P_1}$ 称为光线的象差，或简称光线象差(见图 5.1).

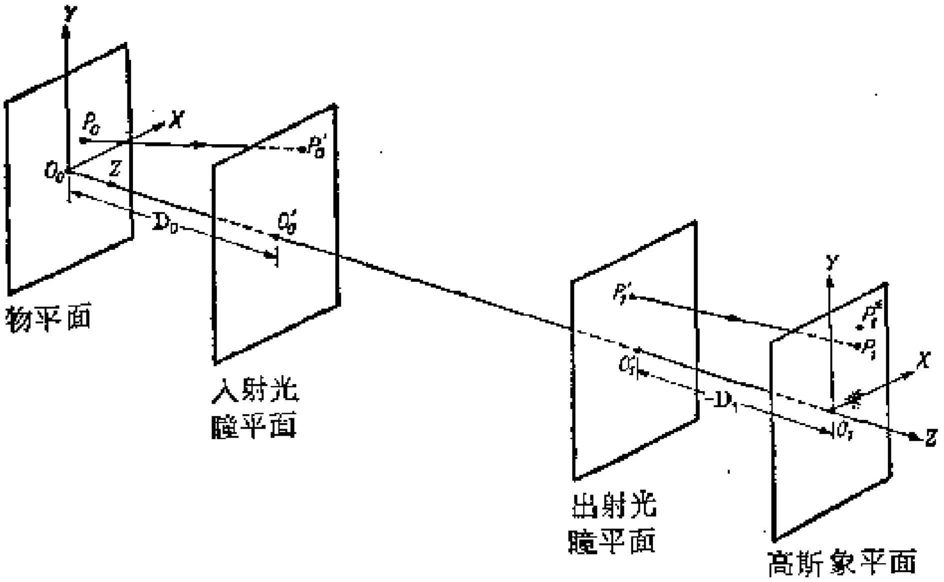


图 5.1 物平面、象平面和光瞳平面

设 W 是一个通过出射光瞳中心 O_1' 的波阵面，它与从 P_0 到达象空间的成象光锥相关联. 在没有象差时，W 与一个中心在高斯象点 P^* 并通过 O_1' 的球面 S 重合. S 称为高斯参考球(见图 5.2).

设 Q 和 $\bar{Q}$ 分别是光线 $P_1'P_1$ 与高斯参考球的交点和与波阵面

1) K. Schwarzschild, *Abh. Königl. Ges. Wis. Göttingen. Math-phys. Kl.*, **4** (1905—1906), Nos. 1, 2, 3. 重新发表于 *Astr. Mitt. Königl. Sternwarte Göttingen* (1905). 把 Schwarzschild 的分析推广到没有旋转对称的系统，见 G. D. Rabinovich, *Akad. Nauk. SSSR, Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **16** (1946), 161.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

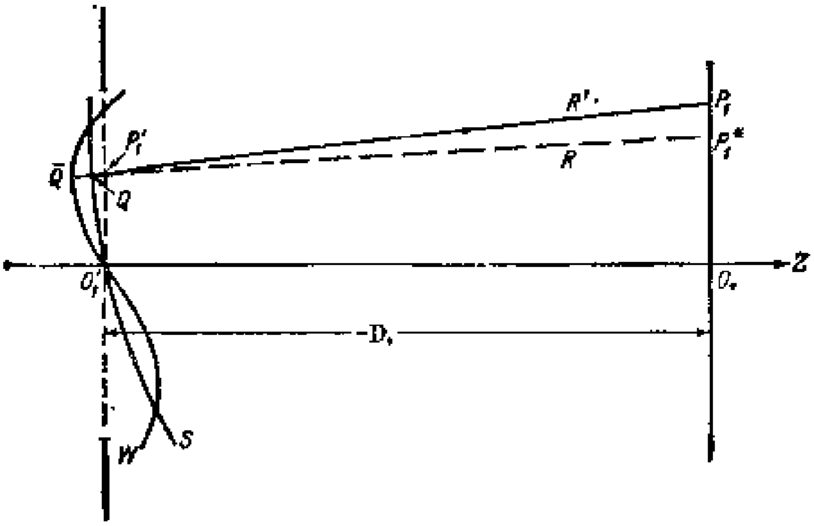


图 5.2 波象差和光线象差

(光线 $\bar{Q}QP_1$ 不一定位于子午面 $O_1'O_1P_1^*$ 上)

W的交点.光程长度$\Phi=[\bar{Q}Q]$可称为Q处波元的象差,或简称波象差. 如果$\bar{Q}$和P_1分别位于Q的两边,这光程长度就作为正的.在普通的仪器中,波象差可大到40或50个波长,但在用于更精密工作的仪器中,(例如天文望远镜或显微镜),波象差必须减小到一个很小的数值,只有一个波长的几分之一.

利用这系统的哈密顿点特征函数,可以容易地导出波象差的表达式. 设方括号[…]象前面一样用来表示光程长度,则有

$$\begin{aligned}\phi &= [\bar{Q}Q]\\ &= [P_0Q]-[P_0\bar{Q}]\\ &= [P_0Q]-[P_0O_1'].\end{aligned}\tag{1}$$

这里用到了$\bar{Q}$和O_1'位于同一波阵面上这一事实,因此$[P_0\bar{Q}]=[P_0O_1']$.

引入两套互相平行的笛卡儿直角坐标轴,其原点分别在物平面和象平面的轴点O_0和O_1处,其Z方向均沿着系统的轴. 物空间各点以O_0处各轴为参考系,象空间各点以O_1处各轴为参考系.两个光瞳平面的Z坐标用D_0和D_1来表示(在图5.1中,D_1是负的).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

根据(1)式，用点特征函数 V 表示的波象差为

$$\Phi = V(X_0, Y_0, O; X, Y, Z) - V(X_0, Y_0, O; O, O, D_1), \quad (2)$$

(X_0, Y_0, O) 是 P_0 的坐标，(X, Y, Z) 是 Q 的坐标. 这里，坐标 (X, Y, Z) 不是独立的，它们由一个表示 Q 位于高斯参考球上的关系式联系着:

$$(X - X_1^*)^2 + (Y - Y_1^*)^2 + Z^2 = R^2. \quad (3)$$

这里

$$X_1^* = MX_0, \quad Y_1^* = MY_0 \quad (4)$$

是高斯象点 P_1^* 的坐标，M 是物平面和象平面之间的高斯横向放大率，R 是高斯参考球的半径，

$$R = (X_1^{*2} + Y_1^{*2} + D_1^2)^{1/2}. \quad (5)$$

利用(3)式，可从(2)式中消去 Z，因此 Φ 可看作只是 X_0, Y_0, X 和 Y 的函数，即[1)]

$$\Phi = \Phi(X_0, Y_0; X, Y).$$

利用象差函数 $\Phi(X_0, Y_0; X, Y)$，可得到光线象差的简单表达式. 由(2)式，得出

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial X}. \quad (6)$$

如果 α_1, β_1 和 γ_1 是光线 QP_1 与各轴的夹角，(X, Y, Z) 和 (X_1, Y_1, O) 分别是 Q 点和 P_1 点的坐标，根据 § 4.1(7)式，以及图 5.2，则有

$$\frac{\partial V}{\partial X} = n_1 \cos\alpha_1 = n_1 \frac{X_1 - X}{R'}, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = n_1 \cos\gamma_1 = -n_1 \frac{Z}{R'}, \quad (7)$$

式中

$$R' = \{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + Z^2\}^{1/2} \quad (8)$$

是从 Q 到 P_1 的距离，n_1 是象空间的折射率. 而且，由(3)式得出

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{X - X_1^*}{Z}. \quad (9)$$

把(7)和(9)式代入(6)式，就得到下述的光线象差分量表

---

1) 一种适合于讨论扩展物体成象的更一般的象差函数，已由下文给出，E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **42** (1952), 547.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

达式:

同样,

$$\left.\begin{aligned} X_1 - X_1^* &= \frac{R'}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \\ Y_1 - Y_1^* &= \frac{R'}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial Y}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(10) 式是精确的,但等式右边含有距离 R', R' 本身取决于 P_1 的坐标,即取决于光线象差[1]. 但对大多数实际场合而言, R' 可用高斯参考球的半径 R 或别的近似式[参看下面的(15)式]来代替.

容易看出,由于对称性,Φ 只是通过 $X_0^2+Y_0^2$, X^2+Y^2 和 X_0X+Y_0Y 这三种组合而依赖于这四个变量的. 如果在 XY 平面上引入极坐标,即令

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= r_0\cos\theta_0, \quad X = r\cos\theta, \\ Y_0 &= r_0\sin\theta_0, \quad Y = r\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

则 Φ 变为 r_0, r, θ_0 和 θ 的函数,或者变为 r_0, r, $\theta_0-\theta$ 和 θ 的函数,二者是等效的. 现在假定在 O_0 和 O_1 处的 X 轴和 Y 轴以同样方式绕系统的轴转过同一角度. 这就使得 r_0, r 和 $\theta_0-\theta$ 保持不变,而 θ 增加一个转过的角度. 因为 Φ 相对于这样的转动是不变的,它必须与最后一个变量无关,即它只随 r_0, r 和 $\theta_0-\theta$ 而定. 因此,象差函数 Φ 可表示为两个矢量 $\boldsymbol{r}_0(X_0, Y_0)$ 和 $\boldsymbol{r}(X, Y)$ 的三个标积

$$\boldsymbol{r}_0^2 = X_0^2 + Y_0^2, \quad \boldsymbol{r}^2 = X^2 + Y^2 \quad 和 \quad \boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r} = X_0X + Y_0Y \tag{12}$$

的函数.

由这个结果得出,如果把 Φ 展开为相对于四个坐标的幂级数,这个展开式将只含有偶次方项. 因为 $\Phi(0, 0; 0, 0)=0$, 所以没有零次方项. 而且除了可能有正比于 $(X_0^2+Y_0^2)$ 的项以外,没有别的二次方项;因为根据(10)式,这样的项会引起线性依赖于坐标的光线象差,这与 P_1^* 是 P_0 的高斯象这一事实相矛盾. 因此展开

---

1) 联系着光线象差和波象差的一对稍有不同的精确方程,已由下文导出,见 J. L. Rayces, *Optica Acta*, 11 (1964), 85.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式的形式为

$$\Phi = c(X_0^2 + Y_0^2) + \Phi^{(4)} + \Phi^{(6)} + \cdots, \tag{13}$$

式中 c 是一个常数，$\Phi^{(2k)}$ 是坐标的 $2k$ 阶多项式，并且 $\Phi^{(2k)}$ 所包含的这些坐标只以(12)式的三个标量不变式的幂的形式出现．一个特定 $2k$ 阶的项就称为代表一种 $2k$ 级的波象差．最低一级($2k=4$)的象差通常称为初级象差或赛德耳象差[1]，这将在 § 5.3 中详细研究．

为了表明某些式子的数量级以及某些计算的近似程度，引进一个参量 μ 是方便的．它可以是任一个一阶的量，例如是系统的角孔径．于是可假定所有通过系统的光线与光轴各夹角用 $O(\mu)$ 表示，符号 $O(\mu)$ 的意思是 μ 的"不超过一适中的倍数"．

考虑在基本关系式(10)中用与 X_1 和 Y_1 无关的量代替 R' 而引起的误差．由(3)和(5)式，则

$$Z^2 = D_1^2 - (X^2 + Y^2) + 2(XX_1^* + YY_1^*) \tag{14}$$

代入(8)式就得出

$$\begin{aligned} R' &= -D_1\left[1 + \frac{X_1^2 + Y_1^2 - 2X(X_1 - X_1^*) - 2Y(Y_1 - Y_1^*)}{D_1^2}\right]^{1/2} \\ &= -D_1 - \frac{X_1^{*2} + Y_1^{*2}}{2D_1} + O(D_1\mu^4). \end{aligned} \tag{15}$$

因此，光线象差分量的关系式(10)变成

$$X_1 - X_1^* = -\frac{1}{n_1}\left(D_1 + \frac{X_1^{*2} + Y_1^{*2}}{2D_1}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial X} + O(D_1\mu^7) \tag{16a}$$

$$= -\frac{D_1}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial X} + O(D_1\mu^5) \tag{16b}$$

$$Y_1 - Y_1^* = -\frac{1}{n_1}\left(D_1 + \frac{X_1^{*2} + Y_1^{*2}}{2D_1}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + O(D_1\mu^7) \tag{17a}$$

$$= -\frac{D_1}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + O(D_1\mu^5). \tag{17b}$$

---

1) 因为与这一级波象差相关联的光线象差是坐标三次方项，有时也称它们为三级象差．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 5.2 施瓦茨蔡耳德微扰程函

施瓦茨蔡耳德在研究几何象差时，使用了一种类似于天体力学中计算轨道元所用的方法。这种计算所引进的变量在无微扰的运动中保持不变，而这些量在实际运动中经受的微小变化则利用一个微扰函数来确定。与这种方法类似，施瓦茨蔡耳德在前已指出的文章中引进了一些变量，在高斯光学精确的范围内，这些变量沿着每一条通过光学系统的光线是不变的。他引进一个微扰函数，称为**赛德耳程函**，利用它来研究在特征函数展开式中考虑到四次方项时这些变量所经受的变化[1]。施瓦茨蔡耳德称这些特定的变量为**赛德耳变量**，因为它们与以前赛德耳使用过的那些变量有关。

在赛德耳理论精确的范围内，前一节所定义的象差函数 Φ 与施瓦茨蔡耳德微扰程函是密切有关的；严格按照施瓦茨蔡耳德方法，可导出任一共轴系统的象差函数展开式中四次方系数的表达式。这个推导将在 § 5.5 中详细作出。这里将定义赛德耳变量，以及考察我们的象差函数与施瓦茨蔡耳德微扰函数之间的联系。

在物平面和高斯象平面上分别引入长度的新单位 l_0 和 l_1，使得

$$\frac{l_1}{l_0} = M \tag{1}$$

---

1) Schwarzschild 也考虑了五级光线象差的一般类型。他的学生 A. Kohlschütter 在其论文 (Göttingen, 1908) 中首次给出了特征函数 (Schwarzschild 微扰程函)展开式中与上述象差相关联的六次方系数的表达式。

研究过五级象差的还有：M. Herzberger, *J. Opt. Soc. Amer.*, **29** (1939), 395, 和他写的 *Modern Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1958)；H. A. Buchdahl, *Optical Aberration Coefficients* (Oxford University Press, 1954)；以及其他作者写的文章。对高级象差理论的评述，见 J. Focke, *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是这两个平面之间的横向高斯放大率. 物平面上的点用坐标 x_0, y_0 来规定,象空间中的点用坐标 x_1, y_1 来规定,使得

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= C\frac{X_0}{l_0}, \quad x_1 = C\frac{X_1}{l_1}, \\ y_0 &= C\frac{Y_0}{l_0}, \quad y_1 = C\frac{Y_1}{l_1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 $(X_0, Y_0,)$ 和 (X_1, Y_1) 是 P_0 和 P_1 的普通坐标(见图 5.1), C 是一个常数, 它的规定见下文. 在高斯光学精确的范围内, $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$.

由 (X_0, Y_0) 射出的光线与入射光瞳交点的坐标 (X_0', Y_0'), 与光线分量的联系为下式:

$$\frac{X_0' - X_0}{D_0} = \frac{p_0}{\sqrt{n_0^2 - p_0^2 - q_0^2}}, \quad \frac{Y_0' - Y_0}{D_0} = \frac{q_0}{\sqrt{n_0^2 - p_0^2 - q_0^2}}, \tag{3}$$

光线与出射光瞳交点的表达式是完全相似的. 在高斯光学精确的范围内, 分母的平方根可分别用 n_0 和 n_1 来代替, 因此得到下述的坐标之间的线性关系式:

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_0' - X_0}{D_0} &= \frac{p_0}{n_0}, \quad \frac{X_1' - X_1}{D_1} = \frac{p_1}{n_1}, \\ \frac{Y_0' - Y_0}{D_0} &= \frac{q_0}{n_0}, \quad \frac{Y_1' - Y_1}{D_1} = \frac{q_1}{n_1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其次在入射光瞳平面和出射光瞳平面上分别引入长度的新单位 λ_0 和 λ_1, 使得

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = M' \tag{5}$$

是这两个平面之间的横向放大率. 用下述变量来代替 X_0', Y_0', X_1', Y_1':

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{X_0'}{\lambda_0} = \frac{X_0}{\lambda_0} + \frac{D_0 p_0}{\lambda_0 n_0}, \quad \xi_1 = \frac{X_1'}{\lambda_1} = \frac{X_1}{\lambda_1} + \frac{D_1 p_1}{\lambda_1 n_1}, \\ \eta_0 &= \frac{Y_0'}{\lambda_0} = \frac{Y_0}{\lambda_0} + \frac{D_0 q_0}{\lambda_0 n_0}, \quad \eta_1 = \frac{Y_1'}{\lambda_1} = \frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{D_1 q_1}{\lambda_1 n_1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在高斯光学精确的范围内, $\xi_1 = \xi_0$, $\eta_1 = \eta_0$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

为了简化下面的计算，选择 C 为[1)]

$$C=\frac{n_0 l_0 \lambda_0}{D_0}=\frac{n_1 l_1 \lambda_1}{D_1} \tag{7}$$

将是方便的．右边两项相等是根据史密斯-亥姆霍兹公式［§ 4.4(48)式］得出的．

由(2)式和(6)式定义的量是**赛德耳变量**．反过来用赛德耳变量表示旧变量的关系式也是需要的．解(2)和(6)式，得到

$$\left.\begin{aligned} X_0&=\frac{D_0}{n_0\lambda_0}x_0, \quad X_1=\frac{D_1}{n_1\lambda_1}x_1,\\ Y_0&=\frac{D_0}{n_0\lambda_0}y_0, \quad Y_1=\frac{D_1}{n_1\lambda_1}y_1, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} p_0&=\frac{n_0\lambda_0}{D_0}\xi_0-\frac{1}{\lambda_0}x_0, \quad p_1=\frac{n_1\lambda_1}{D_1}\xi_1-\frac{1}{\lambda_1}x_1,\\ q_0&=\frac{n_0\lambda_0}{D_0}\eta_0-\frac{1}{\lambda_0}y_0, \quad q_1=\frac{n_1\lambda_1}{D_1}\eta_1-\frac{1}{\lambda_1}y_1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

下一步用赛德耳变量表示象差函数．首先我们注意到，Φ 中的自变量 X 和 Y 可用 X_1' 和 Y_1' 代替，而并不改变§ 5.1(16b)和(17b)式中的误差项．令 ϕ 表示象差函数，这时把它看作赛德耳变量的函数：

$$\Phi(X_0,Y_0;X_1',Y_1')=\phi(x_0,y_0;\xi_1,\eta_1). \tag{10}$$

因此

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_1'}=\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial X_1'}=\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}, \tag{11a}$$

由(2)，(1)，(7)和§ 5.1(4)式，

$$X_1-X_1^{\star}=\frac{D_1}{n_1\lambda_1}(x_1-x_0). \tag{11b}$$

---

1)．C 的另一种选择是

$$C=kn_0l_0\sin\theta_0=-kn_1l_1\sin\theta_1,$$

这在衍射理论的基础上研究成象时常常是有用的．式中，k 是光的真空波数，$2\theta_0$ 和 $2\theta_1$ 是系统的角孔径，即入射光瞳和出射光瞳分别对轴上物点和象点的张角．利用 C 的这种选择，则有

$$x_0=kn_0X_0\sin\theta_0, \quad x_1=-kn_1X_1\sin\theta_1,$$
$$y_0=kn_0Y_0\sin\theta_0, \quad y_1=-kn_1Y_1\sin\theta_1.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

利用(11a)和(11b)式,由§5.1(16b)和(17b)式,得出

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_0 &= -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + O(D_1\mu^5), \\ y_1 - y_0 &= -\frac{\partial \phi}{\partial \eta_1} + O(D_1\mu^5). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

前面已经提到,在赛德耳理论精确的范围内,ϕ是与一个微扰函数有密切关系的,这一微扰函数由施瓦茨蔡耳德引入,并被他称为**赛德耳程函**. 这一微扰函数定义为

$$\phi = T + \frac{D_0}{2n_0\lambda_0^2}(x_0^2 + y_0^2) - \frac{D_1}{2n_1\lambda_1^2}(x_1^2 + y_1^2) + x_0(\xi_1 - \xi_0) + y_0(\eta_1 - \eta_0), \tag{13}$$

式中 $T = T(p_0, q_0; p_1, q_1)$ 是角特征函数,参考原点在 O_0 和 O_1. 现在考虑坐标微小变化产生的影响. 根据§4.1(27)式,此时$Z_0 = Z_1 = 0$,则T的相应变化为

$$\delta T = X_0 dp_0 + Y_0 dq_0 - X_1 dp_1 - Y_1 dq_1, \tag{14}$$

或用赛德耳变量表示,

$$\delta T = x_0\left(d\xi_0 - \frac{D_0}{n_0\lambda_0^2}dx_0\right) + y_0\left(d\eta_0 - \frac{D_0}{n_0\lambda_0^2}dy_0\right) - x_1\left(d\xi_1 - \frac{D_1}{n_1\lambda_1^2}dx_1\right) - y_1\left(d\eta_1 - \frac{D_1}{n_1\lambda_1^2}dy_1\right). \tag{15}$$

利用(15)式,由(13)式推导出变量有微小变化时所引起ϕ的变化为

$$d\phi = (\xi_1 - \xi_0)dx_0 + (\eta_1 - \eta_0)dy_0 + (x_0 - x_1)d\xi_1 + (y_0 - y_1)d\eta_1, \tag{16}$$

因此ϕ可表示为 x_0, y_0, ξ_1, η_1 的函数,并且严格地得出

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 - \xi_0 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_0}, & x_1 - x_0 &= -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}, \\ \eta_1 - \eta_0 &= \frac{\partial \phi}{\partial y_0}, & y_1 - y_0 &= -\frac{\partial \phi}{\partial \eta_1}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

所以,根据ϕ的知识并通过简单微分,可以定出象平面上和出射光

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

瞳平面上的光线象差.

比较(17)和(12)式得出,在赛德耳理论精确的范围内,$\phi - \psi$ 必须与 ξ_1 及 η_1 无关,即

$$\phi(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1) = \psi(x_0, y_0, \xi_1, \eta_1) + \chi(x_0, y_0) + O(D_1\mu^6), \quad (18)$$

式中 $\chi(x_0, y_0)$ 是 x_0 和 y_0 的某一函数. 现根据 ϕ 的定义, $\phi(x_0, y_0; 0, 0) = 0$. 因此 $\chi(x_0, y_0) = -\psi(x_0, y_0; 0, 0)$, 结果得出

$$\phi(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1) = \psi(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1) - \psi(x_0, y_0; 0, 0) + O(D_1\mu^6). \quad (19)$$

在赛德耳理论有效的范围内, (12) 式中的误差项可略去. 但如果要考虑高于四次方的项, 则用象差函数 ϕ 表示光线象差分量的表达式是更加复杂的. 另一方面, 用微扰程函表示光线象差分量的简单关系式 (17) 是精确的;但微扰程函看来没有简单的物理意义.

除了最简单的情况以外,确定高于四次方的项是很麻烦的.由于这个原因,代数计算通常限于赛德耳理论的范围,在必要处辅之以光线追迹.

§ 5.3 初级(赛德耳)象差

利用严格类似于 § 5.1 关于象差函数的考虑, 由对称性得出, 施瓦茨蔡耳德微扰程函的幂级数展开式的形式为

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(4)} + \psi^{(6)} + \psi^{(8)} + \cdots, \quad (1)$$

式中 $\psi^{(2k)}$ 是四个变量的 $2k$ 次方的多项式; 而且这四个变量只在三种组合中出现:

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \rho^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2, \quad \kappa^2 = x_0\xi_1 + y_0\eta_1. \quad (2)$$

在 (1) 式中没有二次方项, 因为按照 § 5.2(17) 式, 二次方项的出现, 与在高斯光学精确的范围内 $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $\xi_1 = \xi_0$, $\eta_1 = \eta_0$ 相矛盾.

因为那些变量只以组合式 (2) 的形式出现, 由此得出, $\psi^{(4)}$ 必须具有下列形式:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\phi^{(4)} = -\frac{1}{4}Ar^4 - \frac{1}{4}B\rho^4 - C\kappa^4 - \frac{1}{2}Dr^2\rho^2 + Er^2\kappa^2 + F\rho^2\kappa^2. \tag{3}$$

式中 A, B, ··· 是常数. (3)式中的符号及数值因子已按照通常的习惯选择;这就导致光线象差的方便表达式. §5.5 中将讨论对任一共轴系统的象差常数的计算.

显然,ϕ 的幂级数展开式与(1)式的形式是一样的,但不包含零级项($\phi^{(0)}=0$),并且首项 $\phi^{(4)}$ 与 $\psi^{(4)}$ 不同之处在于没有 $-\frac{1}{4}Ar^4$ 项,根据 §5.2(19)式,这是很明显的. 因此最低级(四级)波象差的一般表达式为

$$\phi^{(4)} = -\frac{1}{4}B\rho^4 - C\kappa^4 - \frac{1}{2}Dr^2\rho^2 + Er^2\kappa^2 + F\rho^2\kappa^2, \tag{4}$$

B, C, ··· 是与(3)式相同的系数.

把(4)式代入 §5.2(12)式,就得出最低级(三级)光线象差分量的一般表达式:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= x_1 - x_0 = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}(X_1 - X_1^*)\\ &= x_0(2C\kappa^2 - Er^2 - F\rho^2) + \xi_1(B\rho^2 + Dr^2 - 2F\kappa^2),\\ \Delta^{(3)}y &= y_1 - y_0 = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}(Y_1 - Y_1^*)\\ &= y_0(2C\kappa^2 - Er^2 - F\rho^2) + \eta_1(B\rho^2 + Dr^2 - 2F\kappa^2).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

系数 A 不在(4)和(5)式中出现,因此总共有五种类型的最低级象差,它们用五个系数 B, C, D, E 和 F 来表征. 如前面第272页所述,这些象差通称初级象差或赛德耳象差.

为了便于讨论赛德耳象差的影响,这样选择坐标轴,使 yz 平面通过物点,因此 $x_0=0$. 进一步引入极坐标,则

$$\xi_1 = \rho\sin\theta, \quad \eta_1 = \rho\cos\theta, \tag{6}$$

(4)式变为

$$\phi^{(4)} = -\frac{1}{4}B\rho^4 - Cy_0^4\rho^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}Dy_0^2\rho^2 + Ey_0^3\rho\cos\theta + Fy_0\rho^3\cos\theta, \tag{7}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

而(5)式取下列形式:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= B\rho^3\sin\theta - 2Fy_0\rho^2\sin\theta\cos\theta + Dy_0^2\rho\sin\theta,\\ \Delta^{(3)}y &= B\rho^3\cos\theta - Fy_0\rho^2(1+2\cos^2\theta)\\ &\quad + (2C+D)y_0^2\rho\cos\theta - Ey_0^3.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

在(7)式中所有系数均为零这一特殊情况下，出射光瞳上的波阵面(在现有精度内)与高斯参考球重合(参看图 5.2). 一般地说,这些系数将具有有限值,每一项则代表波阵面对理想球面的一种特定类型的偏离. 这五种不同的类型如图 5.3 所示.

与一给定物点相关联的光线象差的意义，可利用所谓象差曲线(或特征曲线)的图形来说明. 这些曲线是由出射光瞳一固定环带(ρ = 常数)射出的所有光线在象平面上的交点描出的. 相应于所有可能 ρ 值的象差曲线所包括的面积就代表一个非理想的象.

下面将依次考虑每一种赛德耳象差[1].

I. 球面象差($B \neq 0$)

当除 B 以外所有系数均为零时,(8)式简化为

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= B\rho^3\sin\theta,\\ \Delta^{(3)}y &= B\rho^3\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

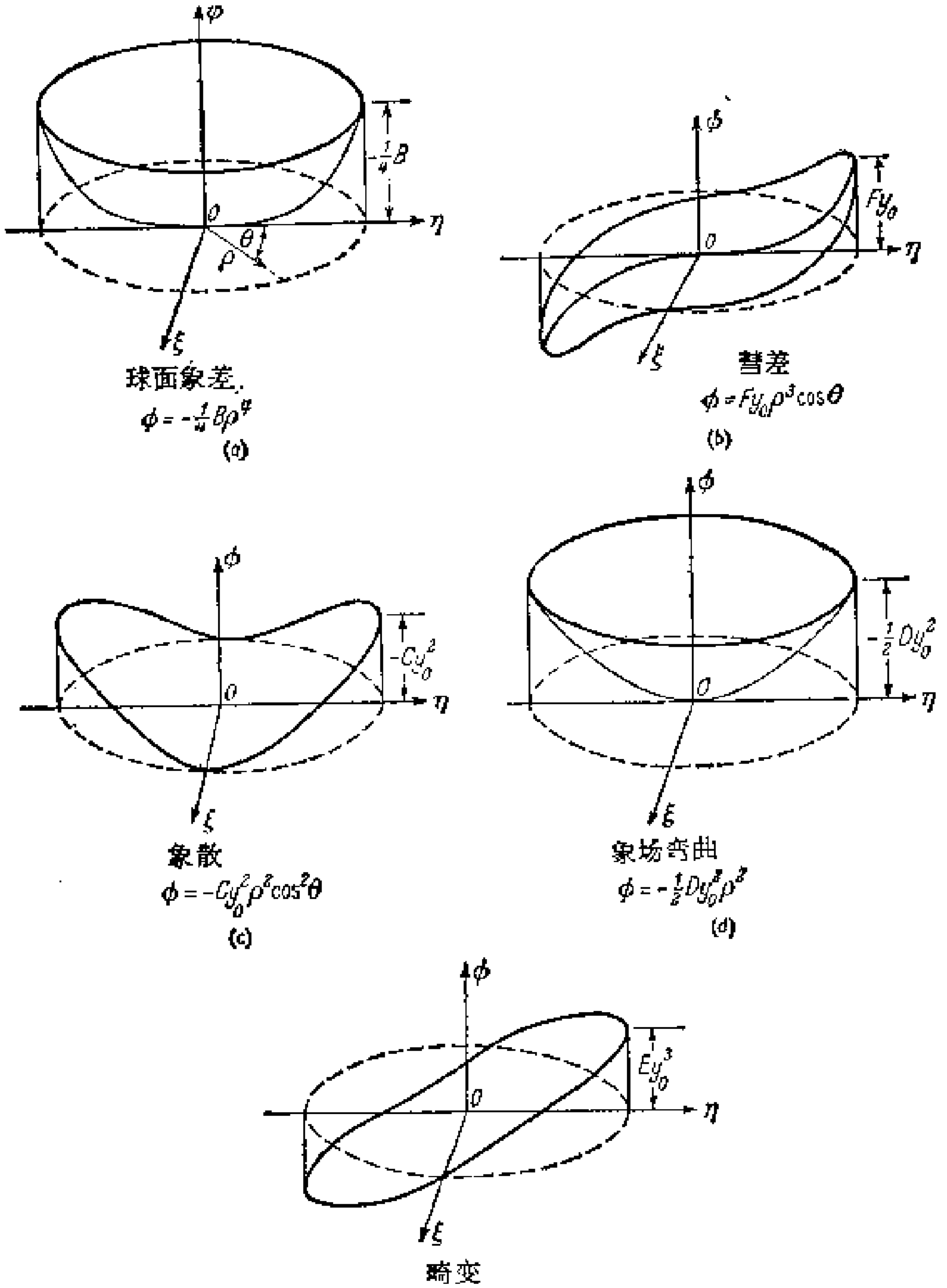
因此,这象差曲线是同心圆,其中心在高斯象点处,其半径随环带半径 ρ 的三次方增大,但与物在视场中的位置(y_0)无关. 象的这种缺陷通称球面象差(球差).

球面象差与 y_0 无关，它对轴外象及轴上象均有影响. 由轴上一物点射出并与轴成较大夹角的光线，与轴的交点将位于高斯焦点前方或后方(图 5.4). 来自孔径边缘的光线与轴的交点，称为边缘焦点. 如果在象区放上一个屏与轴垂直,则有一个放屏的位置,使出现在屏上的圆象斑为一极小;这一极小"象"称为明晰圈.

---

1) 对涉及更高级象差的象差曲线的讨论,见 G. C. Steward; *Trans, Camb. Phil. Soc.*, **23** (1926), 235; 以及 N. Chako, *Trans. Chalmers University of Technology* (Gothenburg), Nr. 191 (1957).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



球面象差

$\phi=-\frac{1}{4}B\rho^4$

(a)

彗差

$\phi=Fy_0\rho^3\cos\theta$

(b)

象散

$\phi=-Cy_0^2\rho^2\cos^2\theta$

(c)

象场弯曲

$\phi=-\frac{1}{2}Dy_0^2\rho^2$

(d)

畸变

$\phi=Ey_0^3\rho\cos\theta$

(e)

图 5.3 初级波象差

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

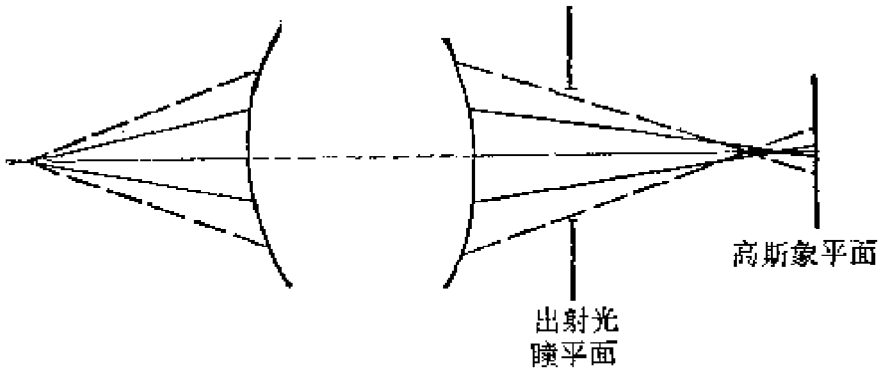


图 5.4 球面象差

II. 彗差 ($F \neq 0$)

用系数 F 来表征的象差通称彗差。根据 (8) 式，在这种情况下光线象差分量为

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= -2F\rho^2 y_0 \sin\theta\cos\theta = -F y_0 \rho^2 \sin 2\theta,\\ \Delta^{(3)}y &= -F\rho^2 y_0(1+2\cos^2\theta) = -F y_0\rho^2(2+\cos 2\theta).\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

可以看出，如果 y_0 固定并且环带半径 ρ 保持不变，则 θ 转过 $0 \leqslant \theta < 2\pi$ 的范围时，P_1 点在象平面上沿着一个圆转过两圈。这圆具有半径 $|F y_0 \rho^2|$，其中心在 y 方向上距高斯焦点 $-2F\rho^2 y_0$ 处。因此这圆与两条通过高斯象并对 y 轴成 30° 倾角的直线相切。当 ρ 取所有可能值时，这些圆覆盖一个以两段直线及一段最大象差圆弧为界的区域(见图 5.5)。这整个图样的大小随物点离轴的距离线性地增大。§ 4.5 中已指出，如果满足阿贝正弦条件，则物平面上紧邻于轴的一个面元将被系统锐成象。因此在这样一种情况下，象差函数展开式不能含有随 y_0 线性变化的项。所以如果满足正弦条件，初级彗差尤其不会出现。

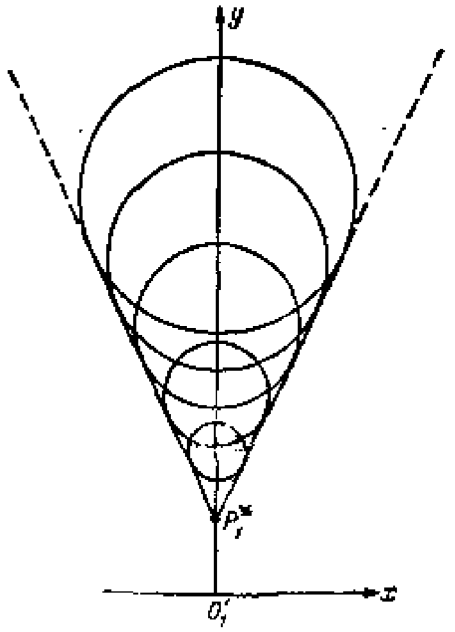


图 5.5 彗差

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

III. 象散（$C \neq 0$）和象场弯曲（$D \neq 0$）

用系数 C 和 D 来表征的两种象差的影响，最好能一起加以研究．如果其他所有系数均为零，则由（8）式，得出

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= D\rho y_0^2 \sin\theta, \\ \Delta^{(3)}y &= (2C + D)\rho y_0^2 \cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

为了看出这些象差的意义，首先假定成象光锥是很窄的．根据§4.6，这样的一锥光线相交成两条短线，其中一条（切向焦线）与子午面垂直，另一条（径向焦线）位于子午面上．现在考虑来自物平面一有限区域内所有各点的光．这时，象空间中的焦线形成两个曲面，即**切向焦面**和**径向焦面**．这些曲面在一级近似下可看作是球面．设 R_t 和 R_s 是它们的半径，当相应的曲率中心位于象平面的入射光一侧时，其半径作为正的（图 5.6 中，$R_t > 0$，$R_s < 0$）．

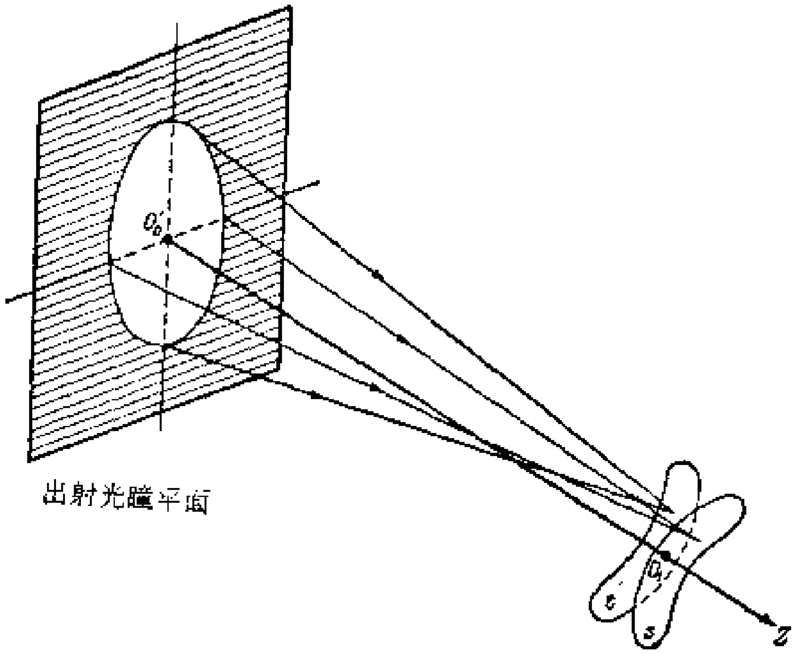


图 5.6　切向和径向焦面

这些曲率半径可用系数 C 和 D 来表示．为了证明这一点，在有曲率的情况下计算光线象差时，首先用普通坐标而不用赛德耳坐标，将是方便的．我们得到（见图 5.7）

$$\frac{\Delta^{(3)}Y_1}{Y_1'} = \frac{u}{D_1 + u}, \tag{12}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

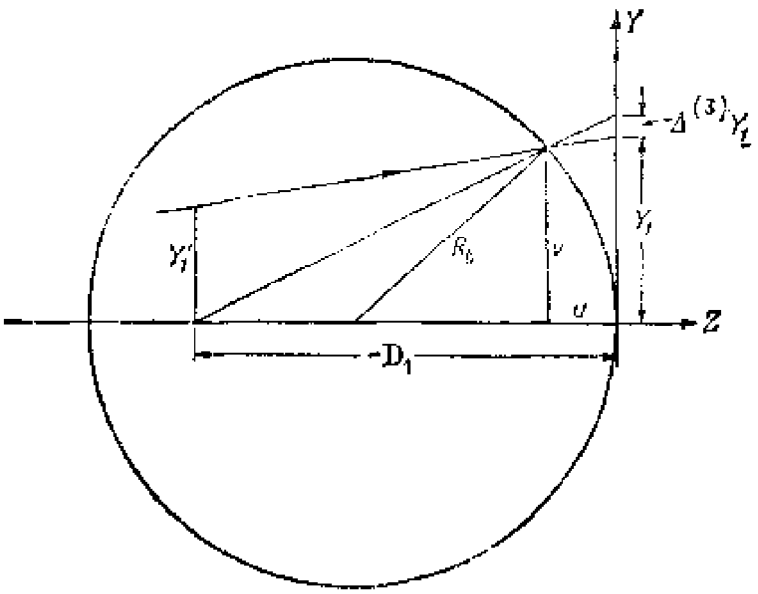


图 5.7 象散和象场弯曲

式中 u 是径向焦线和象平面之间的微小距离．设 v 表示这一焦线与轴的距离，则

$$R_t^2 = v^2 + (R_t - u)^2,$$

即

$$v^2 = 2R_t u - u^2.$$

如果把 u 看作一级小量，则在上式中，v 可用 Y_1 代替，并且 u^2 可略去，因此

$$u \sim \frac{Y_1^2}{2R_t}, \tag{13}$$

如果 u 与 D_1 相比也可略去，则由(12)式，得出

$$\Delta^{(3)}Y_1 = \frac{Y_1^2}{2R_t}\frac{Y_1'}{D_1}. \tag{14}$$

同样，

$$\Delta^{(3)}X_1 = \frac{Y_1^2}{2R_t}\frac{X_1'}{D_1}. \tag{15}$$

下一步将用赛德耳变量来表示这些关系式．把 § 5.2 的(6)和(8)式代入，导出

$$\Delta^{(3)}y = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}\Delta^{(3)}Y_1 = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}\frac{Y_1^2}{2R_t}\frac{Y_1'}{D_1} = \frac{n_1\lambda_1}{2D_1^2R_t}\frac{D_1^4}{n_1^3\lambda_1^3}y_1^2\lambda_1\eta_1,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

即

$$\Delta^{(3)}y = \frac{y_1^2\eta_1}{2n_1R_t}, \tag{16}$$

同样，

$$\Delta^{(3)}x = \frac{y_1^2\xi_1}{2n_1R_s}. \tag{17}$$

在(16)和(17)式中，y_1 可用 y_0 代替．与(11)式比较，并利用(6)式，最后就得到

$$\frac{1}{R_t} = 2n_1(2C + D), \qquad \frac{1}{R_s} = 2n_1D. \tag{18}$$

$(2C + D)$这个量通常称为切向场曲，D 称为径向场曲，

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_s}\right) = 2n_1(C + D), \tag{19}$$

这个量与上述二量的算术平均值成正比，它简称为场曲．

由(13)和(18)式看出，在距轴的高度 Y_1 处，两个焦面的间距(即成象光锥的象散距离)为

$$\frac{Y_1^2}{2}\left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_s}\right) = 2n_1CY_1^2. \tag{20}$$

相应地，$1/R_t$ 与 $1/R_s$ 差值之半

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_s}\right) = 2n_1C \tag{21}$$

则称为象散．在无象散时$(C = 0)$，$R_t = R_s = R$．§5.5.3 中将指出，这共同焦面的半径 R 可由一个简单公式算出，这个公式只包含系统中各面的曲率半径以及所有媒质的折射率．

IV．畸 变$(E \neq 0)$

如果只有系数 E 不为零，则根据(8)式，得出

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= 0,\\ \Delta^{(3)}y &= -Ey_0^3.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

因为上述表达式与 ρ 及 θ 无关，这将是无象散成象，并且成象与出射光瞳半径无关；但是，象离轴的距离不再与物离轴的距离成正比．所以这种象差称为畸变．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果有畸变存在，则物平面上任一与轴相交的直线的象将仍是一直线，但任一其他直线的象将是一曲线。这种影响如图 5.8 所示。图 5.8(a) 中，物为网状，由平行于 x 轴或 y 轴的等距线组成。图 5.8(b) 画出所谓**桶形畸变** ($E>0$)，图 5.8(c) 画出所谓**枕形畸变** ($E<0$)。

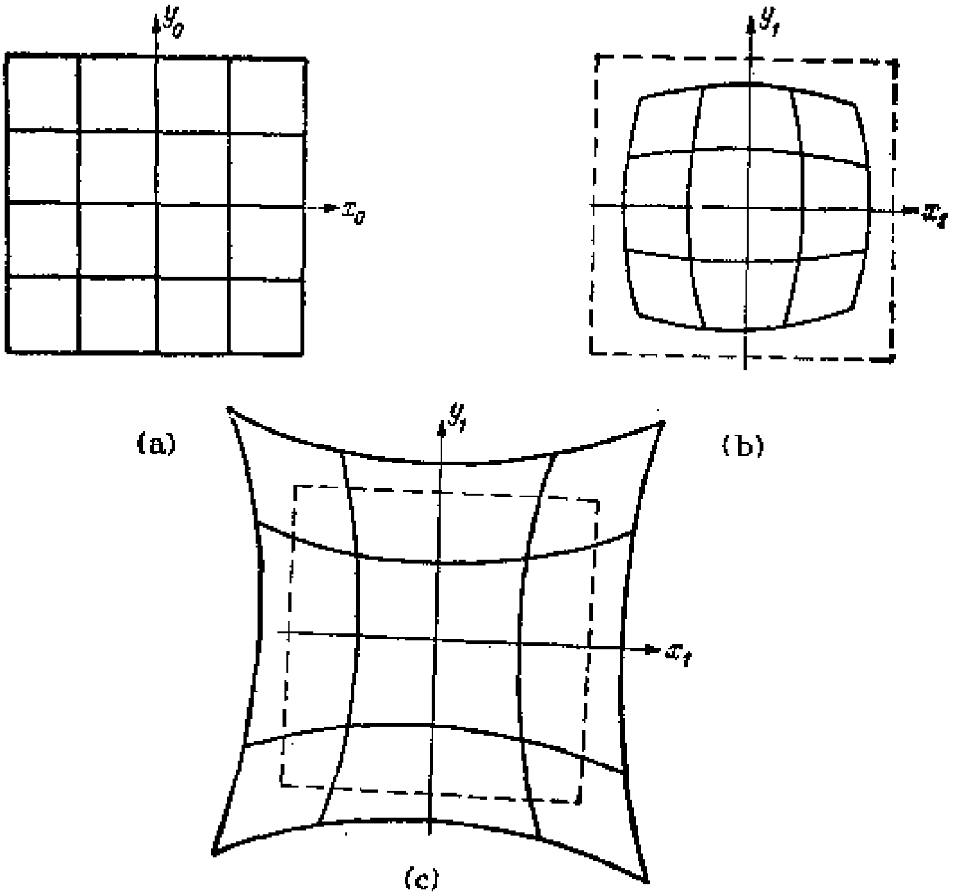


图 5.8 (a) 物 (b) 桶形畸变的象($E>0$)
(c) 枕形畸变的象 ($E<0$)

上面已经看到，五种赛德耳象差中，有三种(即球面象差、彗差和象散)是使象不清晰的，另外两种(即象场弯曲和畸变)是与象的位置及形状有关的。一般地说，设计一个系统使它既无所有初级象差又无高级象差，这是不可能的，因此必须对各种象差的相对大小作适当的折衷。在某些情况下，利用相反的高级象差去平衡赛德耳象差以减少后者的影响。在另外一些情况下，我们必须完全消除某些象差，甚至以引进其他类型的象差为代价。例如，因为有

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

彗差时象显出不对称，在望远镜中总是需要抑制这种象差的，否则精密的位置测量就不能办到．而另一方面，一定数量的象场弯曲和畸变则是相对无害的，因为它们可以用计算来消除．

至此我们仅在几何光学的基础上研究了象差的影响．但如果象差非常小（波象差是波长的数量级或更小），衍射就起着重要的作用．因此象差的几何理论必须用更精细的考虑来补充．这将在第九章中加以讨论．

§5.4 初级象差的相加定理

前面已讨论了初级象差的意义，现在必须把我们的注意力转向计算一般共轴系统的初级象差系数这一更困难的课题．前面已经讲过，这相当于确定施瓦茨希耳德微扰程函幂级数展开式中的四次方项．为了不致中断主要的计算，首先考虑一个光学系统的微扰程函依赖于这系统每个面成象的微扰程函的方式，这将是方便的．

考虑由两个旋转面组成的共轴系统．设 O_0 是轴上物点，O_1 和 O_2 分别是它被第一个面和被两个面所成的高斯象．进一步设

$$T_1 = T_1(p_0, q_0; p_1, q_1) \tag{1}$$

是第一个面上折射的角特征函数，

$$T_2 = T_2(p_1, q_1; p_2, q_2) \tag{2}$$

是第二个面上折射的角特征函数，前者以 O_0 和 O_1 处的各轴为参考系，后者以 O_1 和 O_2 处的各轴为参考系（各套轴相平行）；取 Z 轴沿系统的轴方向．因已假定媒质是均匀的，角特征函数代表从两个原点分别到始段和末段光线的垂足之间的光程（参看图 4.3）．所以这个以 O_0 和 O_2 处的各轴为参考系的系统的角特征函数 T，是由 T_1 和 T_2 相加而得到的：

$$T = T_1 + T_2. \tag{3}$$

在这个表达式中，必须利用每个面的成象公式来消去光线在中间空间内的变量 p_1 和 q_1．方便的做法是在相应的微扰程函关系式中

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

明显地消元.

根据§5.2(13)式,微扰程函 ϕ_1 和 ϕ_2 为

$$\phi_1 = T_1 + \frac{D_0}{2n_0\lambda_0^2}(x_0^2 + y_0^2) - \frac{D_1}{2n_1\lambda_1^2}(x_1^2 - y_1^2) + x_0(\xi_1 - \xi_0) + y_0(\eta_1 - \eta_0)$$

和

$$\phi_2 = T_2 + \frac{D_1}{2n_1\lambda_1^2}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{D_2}{2n_2\lambda_2^2}(x_2^2 + y_2^2) + x_1(\xi_2 - \xi_1) + y_1(\eta_2 - \eta_1);$$

组合的微扰程函 ϕ 为

$$\phi = T + \frac{D_0}{2n_0\lambda_0^2}(x_0^2 + y_0^2) - \frac{D_2}{2n_2\lambda_2^2}(x_2^2 + y_2^2) + x_0(\xi_2 - \xi_0) + y_0(\eta_2 - \eta_0).$$

因此,利用(3)式,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + (x_0 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) + (y_0 - y_1)(\eta_2 - \eta_1),$$

或利用§5.2(17)式,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_1}. \tag{4}$$

如果把 ϕ_1 和 ϕ_2 的幂级数展开式代入(4)式,这就得出[因按§5.3(1)式,这里没有二次方项],

$$\phi = \phi_1^{(0)} + \phi_2^{(0)} + \phi_1^{(4)} + \phi_2^{(4)} + \cdots, \tag{5}$$

没有写出来的各项是六次方及更高次方的项. 显然,现在 $\phi_1^{(4)}$ 和 $\phi_2^{(4)}$ 中的自变量可用它们的高斯值来取代. 因此可用下述方法消去与中间空间有关的变量:在 $\phi_1^{(4)}(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1)$ 中用 ξ_2, η_2 代替 ξ_1, η_1;在 $\phi_2^{(4)}(x_1, y_1; \xi_2, \eta_2)$ 中用 x_0, y_0 代替 x_1, y_1;并把得到的式子相加. 这就给出所需要的 $\phi^{(4)}$,它作为四个变量 x_0, y_0 及 ξ_2, η_2 的函数. 下面更清楚地作此消元.

根据§5.3(3)式,$\phi_1^{(4)}$ 和 $\phi_2^{(4)}$ 的形式为

$$\left.\begin{aligned}\phi_1^{(4)} &= -\frac{1}{4}A_1 r_0^4 - \frac{1}{4}B_1\rho_1^4 - C_1\kappa_{01}^4 - \frac{1}{2}D_1 r_0^2\kappa_{01}^2 \\ &\quad + E_1 r_0^2\kappa_{01}^2 + F_1\rho_1^2\kappa_{01}^2,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \rho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2, \kappa_{01}^2 = x_0\xi_1 + y_0\eta_1;$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}\phi_2^{(4)} = &-\frac{1}{4}A_2\mathrm{r}_1^4 - \frac{1}{4}B_2\rho_2^4 - C_2\kappa_{12}^4 - \frac{1}{2}D_2\mathrm{r}_1^2\rho_2^2 \\ &+ E\mathrm{r}_1^2\kappa_{12}^2 + F_2\rho_2^2\kappa_{12}^2,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中

$$\mathrm{r}_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \rho_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2, \kappa_{12}^2 = x_1\xi_2 + y_1\eta_2;$$

用 ξ_2, η_2 代替 ξ_1, η_1, x_0, y_0 代替 x_1, y_1; 即用 ρ_2 代替 ρ_1, r_0 代替 r_1, 并且用

$$\kappa_{02}^2 = x_0\xi_2 + y_0\eta_2 \tag{8}$$

代替 κ_{12}^2 和 κ_{01}^2, 再相加就得到

$$\begin{aligned}\phi^{(4)} = &-\frac{1}{4}(A_1 + A_2)\mathrm{r}_0^4 - \frac{1}{4}(B_1 + B_2)\rho_2^4 \\ &-(C_1 + C_2)\kappa_{02}^4 - \frac{1}{2}(D_1 + D_2)\mathrm{r}_0^2\rho_2^2 \\ &+(E_1 + E_2)\mathrm{r}_0^2\kappa_{02}^2 + (F_1 + F_2)\rho_2^2\kappa_{02}^2.\end{aligned} \tag{9}$$

对任意多个面组成的共轴系统，类似的结果显然也成立。因此我们就证明了下述的定理:

一个共轴系统的每一种初级象差系数，是这个系统中各个面相应的象差系数之和。

正是在上述分析的这一点上，赛德耳变量的优越性特别明显；因为这一简单而重要的结果基本上取决于赛德耳变量的使用，而当使用普通的变量时则没有类似的结果。

§5.5 一般的共轴透镜系统的初级象差系数

前一节中确立的定理，把决定一般共轴系统初级象差系数的问题简化为计算系统中各个面相应系数的问题。 现在就作此计算。

§5.5.1 利用两条傍轴光线的赛德耳公式

我们还记得，赛德耳象差系数（除了简单的数值因子外）可以认为与施瓦茨察耳德微扰程函 ψ 的幂级数展开式中的四次方项系

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数是一样的．根据§5.2(13)式，把角特征函数T与一些二次方项相加，并把所得到的式子用赛德耳变量来表示，就得出这个函数．因为赛德耳变量与光线分量之间的关系是线性的，由一组变量转换为另一组变量时各项的阶不变．因此

$$\psi^{(4)}(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1) = T^{(4)}(p_0, q_0; p_1, q_1). \tag{1}$$

在§4.1中已导出一个旋转折射面的角特征函数直到四次方项的展开式．根据§4.1(42)式，四次方项的贡献可写成以下的形式[1]:

$$\begin{aligned} T^{(4)}(p_0, q_0; p_1, q_1) = &-\frac{r}{4(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2 \\ &+(q_0-q_1)^2]\left[\frac{p_0^2+q_0^2}{n_0}-\frac{p_1^2+q_1^2}{n_1}\right]-\frac{(1+b)r}{8(n_1-n_0)^3} \\ &\times[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]^2+\frac{a_0}{8n_0^3}(p_0^2+q_0^2)^2 \\ &-\frac{a_1}{8n_1^3}(p_1^2+q_1^2)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

为了方便起见，选轴上的点$z=a_0$和$z=a_1$作为轴上物点和它的高斯象，并且令(见图5.9)

$$s=a_0,\quad s'=a_1,\quad t=a_0+D_0,\quad t'=a_1+D_1. \tag{3}$$

相应的阿贝不变量[§4.4(7)式]将分别用K和L来表示:

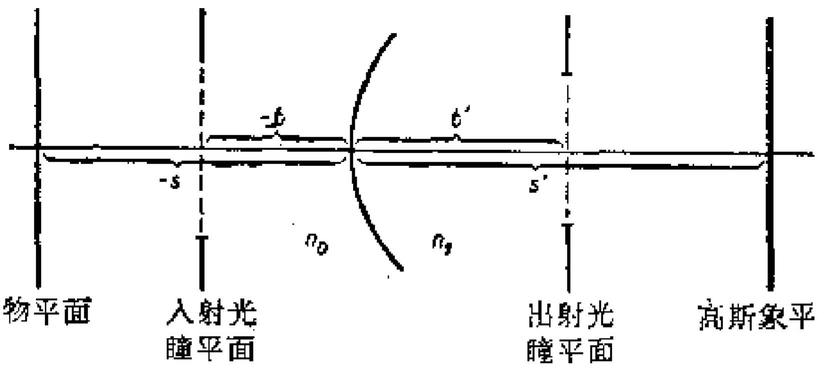


图 5.9　初级象差系数的计算中所用的符号

1) 与§4.1一样，r表示这个面的半径．这个符号不要与符号r混淆，后者在§5.3(2)式中引入，表示旋转不变量$\sqrt{x_0^2+y_0^2}$．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$n_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)=n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)=K, \tag{4}$$

$$n_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)=n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t'}\right)=L. \tag{5}$$

在用赛德耳变量代替(1)式中的光线分量表达式以前，有必要把(1)式改写成稍微不同的形式。由(4)式得出，

$$\frac{r}{8(n_1-n_0)^3}\{(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2\}^2$$

$$=\frac{r^4}{8(n_1-n_0)^4}\left[\frac{n_1}{s'}-\frac{n_0}{s}\right][(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]^2.$$

利用这一关系式，(2)式可写成

$$T^{(4)}=\frac{1}{8n_0s}\left\{\frac{n_0r}{(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]-\frac{s}{n_0}(p_0^2+q_0^2)\right\}^2$$

$$-\frac{1}{8n_1s'}\left\{\frac{n_1r}{(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]-\frac{s'}{n_1}(p_1^2+q_1^2)\right\}^2$$

$$-\frac{br}{8(n_1-n_0)^3}\{(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2\}^2. \tag{6}$$

在(6)式中，各个自变量可用其高斯近似来代替；特别是，分别与入射和折射光线上的点相应的赛德耳变量可以互换。为了使得 $\psi^{(4)}$ 作为 x_0, y_0, ξ_1 和 η_1 的函数，可用下式代替§5.2(9)式：

$$\left.\begin{aligned}p_0&=\frac{n_0\lambda_0}{D_0}\xi_1-\frac{1}{\lambda_0}x_0, & p_1&=\frac{n_1\lambda_1}{D_1}\xi_1-\frac{1}{\lambda_1}x_0,\\ q_0&=\frac{n_0\lambda_0}{D_0}\eta_1-\frac{1}{\lambda_0}y_0, & q_1&=\frac{n_1\lambda_1}{D_1}\eta_1-\frac{1}{\lambda_1}y_0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

有必要对(7)式作进一步的修改。根据§4.4(14)式和§4.4(10)式，或更简单地，注意到通过一个球面的成象就是相对于此球心的投影，就可得出物平面和象平面之间的高斯横向放大率 (l_1/l_0) 以及入射光瞳平面和出射光瞳平面之间的高斯横向放大率 (λ_1/λ_0)。因此，若又用(4)式，则

$$\frac{l_1}{l_0}=\frac{r-s'}{r-s}=\frac{n_0s'}{n_1s},\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_0}=\frac{r-t'}{r-t}=\frac{n_0t'}{n_1t}. \tag{8}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

引入缩写符号

$$h = \frac{\lambda_0 s}{D_0} = \frac{\lambda_1 s'}{D_1}, \quad H = \frac{t}{\lambda_0 n_0} = \frac{t'}{\lambda_1 n_1}, \tag{9}$$

式中已用了(8)式和§5.2(7)式. 这时(7)式变为

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= n_0\left(\frac{h}{s}\xi_1 - \frac{H}{t}x_0\right), \quad p_1 = n_1\left(\frac{h}{s'}\xi_1 - \frac{H}{t'}x_0\right), \\ q_0 &= n_0\left(\frac{h}{s}\eta_1 - \frac{H}{t}y_0\right), \quad q_1 = n_1\left(\frac{h}{s'}\eta_1 - \frac{H}{t'}y_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

如果与前面一样,用 r^2, ρ^2 和 κ^2 表示三个旋转不变量

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \rho^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2, \quad \kappa^2 = x_0\xi_1 + y_0\eta_1, \tag{11}$$

则(6)式的大括号中的项变为

$$(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2 = \left(\frac{n_1 - n_0}{r}\right)^2 [H^2 r^2 + h^2\rho^2 - 2hH\kappa^2],$$

$$\frac{n_0 r}{(n_1 - n_0)^2}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] - \frac{s}{n_0}(p_0^2 + q_0^2)$$

$$= H^2 r^2\left[L - (K - L)\frac{s}{t}\right] + h^2\rho^2 K - 2hH\kappa^2 L,$$

$$\frac{n_1 r}{(n_1 - n_0)^2}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] - \frac{s'}{n_1}(p_1^2 + q_1^2)$$

$$= H^2 r^2\left[L - (K - L)\frac{s'}{t'}\right] + h^2\rho^2 K - 2hH\kappa^2 L.$$

把这些关系式代入(6)式中,再回到(1)式,最后就得到所需要的 $\psi^{(4)}$ 表达式:

$$\begin{aligned} \psi^{(4)} = \frac{1}{8} r^4 H^4 &\left\{\frac{b}{r^3}(n_0 - n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_0 s} - \frac{1}{n_1 s'}\right) - 2L(K - L)\right. \\ &\left.\times\left(\frac{1}{n_0 t} - \frac{1}{n_1 t'}\right) + (K - L)^2\left(\frac{s}{n_0 t^2} - \frac{s'}{n_1 t'^2}\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{8}\rho^4 h^4\left\{\frac{b}{r^3}(n_0 - n_1) + K^2\left(\frac{1}{n_0 s} - \frac{1}{n_1 s'}\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\kappa^4 H^2 h^2\left\{\frac{b}{r^3}(n_0 - n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_0 s} - \frac{1}{n_1 s'}\right)\right\} \end{aligned}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$+\frac{1}{4}r^2\rho^2H^2h^2\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+KL\left(\frac{1}{n_0s}-\frac{1}{n_1s'}\right)\right.$$

$$\left.-K(K-L)\left(\frac{1}{n_0t}-\frac{1}{n_1t'}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{2}r^2\kappa^2H^3h\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+L^2\left(\frac{1}{n_0s}-\frac{1}{n_1s'}\right)\right.$$

$$\left.-L(K-L)\left(\frac{1}{n_0t}-\frac{1}{n_1t'}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\rho^2\kappa^2Hh^3\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+KL\left(\frac{1}{n_0s}-\frac{1}{n_1s'}\right)\right\}. \quad (12)$$

与§5.3(3)式一般表达式相比较，这个公式就给出了旋转折射面的微扰程函四次方项的系数 A，B，$\cdots$ F。

现在推广到由任意数目的折射面组成的共轴系统是直接了当的了．用下标 i 表示属于第 i 个面的量，设 n_i 是第 i 个面后方媒质的折射率．因此，利用§5.4的相加定理，并比较(12)式和§5.3(3)式，由此得出

$$B=\frac{1}{2}\sum_i h_i^4\left\{\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+K_i^2\left(\frac{1}{n_is_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right\},$$

$$C=\frac{1}{2}\sum_i H_i^2h_i^2\left\{\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+L_i^2\left(\frac{1}{n_is_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right\},$$

$$D=\frac{1}{2}\sum_i H_i^2h_i^2\left\{\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+K_iL_i\left(\frac{1}{n_is_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right.$$

$$\left.-K_i(K_i-L_i)\left(\frac{1}{n_it_i'}-\frac{1}{n_{i-1}t_i}\right)\right\},$$

$$E=\frac{1}{2}\sum_i H_i^3h_i\left\{\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+L_i^2\left(\frac{1}{n_is_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right.$$

$$\left.-L_i(K_i-L_i)\left(\frac{1}{n_it_i'}-\frac{1}{n_{i-1}t_i}\right)\right\},$$

$$F=\frac{1}{2}\sum_i H_ih_i^3\left\{\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+K_iL_i\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{n_is_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right\}. \quad (13)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这就是一般的折射面共轴系统初级象差系数的赛德耳公式[1].

(13)式通过规定两条穿过系统的傍轴光线路径的数据来表示初级象差系数，即一条来自轴上物点的光线和一条来自入射光瞳中心的光线. 有必要概括地讲一下有关的高斯公式. 设 d_i 是第 i 面的极点和第 $(i+1)$ 面的极点之间的距离. 因为系统的前 i 个面所成的高斯象就是第 $(i+1)$ 面的物,所以得出转换公式

$$s_{i+1}=s_i'-d_i,\quad t_{i+1}=t_i'-d_i. \tag{14}$$

给出从第一面的极点分别到物平面和入射光瞳平面的距离 s_1 和 t_1 以后,则可根据阿贝关系式:

$$\left.\begin{aligned} n_{i-1}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i}\right)&=n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i'}\right)=K_i,\\ n_{i-1}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{t_i}\right)&=n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{t_i'}\right)=L_i,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

和从(14)式,相继地计算出距离 s_1', t_1', s_2, t_2, s_2', t_2', $\cdots$ 以及相应的数值 K_1, L_1, K_2, L_2, $\cdots$.我们还必须确定量 h_i 和 H_i.为了简单起见,令入射光瞳平面上的任意长度 λ_0 等于1,并利用关系式 $D_i=t_i'-s_i'=t_{i+1}-s_{i+1}$, 则由(9)式看出, h_i 和 H_i 可根据关系式[2]

$$\left.\begin{aligned} H_1&=\frac{t_1}{n_0},\qquad h_1=\frac{s_1}{t_1-s_1},\\ \frac{H_{i+1}}{H_i}&=\frac{t_{i+1}}{t_i'},\quad \frac{h_{i+1}}{h_i}=\frac{s_{i+1}}{s_i'},\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

相继地计算出来. 由(9)式及阿贝关系式(4)和(5), 得到下列关系式:

$$h_iH_i=\frac{s_it_i}{n_{i-1}(t_i-s_i)}=\frac{s_i't_i'}{n_i(t_i'-s_i')}=\frac{1}{L_i-K_i}, \tag{17}$$

---

1) 赛德耳实际上只考虑了由球面组成的共轴系统. 其后的作者考虑了非球面的影响(用常数 b_i 表征),参看 M. von Rohr, *Geometrical Investigation of Formation of Images in Optical Systems*, R. Kanthack 由德文译出 (London, H. M. Stationery Office, 1920), 344.

2) 关系式 $h_{i+1}/h_i=s_{i+1}/s_i'$ 意味着 h_i 正比于一条来自轴上物点的傍轴光线与第 i 面交点的离轴高度. 关系式 $H_{i+1}/H_i=t_{i+1}/t_i'$ 对 H_i 给出类似的解释, 这时用的是一条来自入射光瞳中心的傍轴光线.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

它可用来核对计算,而且以后需用到此式.

§ 5.5.2 利用一条傍轴光线的赛德耳公式

常常希望初级象差系数的表达形式能尽可能清楚地表明这些系数对规定光学系统所用的一些参量的依赖关系,对此目的说来,(13)式不是最方便的一组公式. 要计算(13)式,必须按照高斯光学定律对两条光线作通过光学系统的追迹,即一条来自轴上物点的光线和一条来自入射光瞳中心的光线. 然而赛德耳已指出,可消去与第二条光线有关的数据,因而可用只与第一条光线有关的一些量来表示初级象差系数. 很自然,有一个取决于入射光瞳位置的量仍保留在公式中,因为光阑位置的改变将明显地影响象差.

为了消去与来自入射光瞳中心的光线有关的数据,首先必须用 h_i 来表示高度 H_i. 由(16),(14)和(17)式,得出

$$\frac{H_{i+1}}{h_{i+1}}-\frac{H_i}{h_i}=\frac{1}{h_ih_{i+1}}H_ih_i\left(\frac{t_{i+1}}{t'_i}-\frac{s_{i+1}}{s'_i}\right)$$

$$=\frac{1}{h_ih_{i+1}}H_ih_id_i\left(\frac{1}{s'_i}-\frac{1}{t'_i}\right)=\frac{d_i}{n_ih_ih_{i+1}}. \tag{18}$$

如果把 k_i 定义为

$$H_i=k_ih_i, \tag{19}$$

则由(18)式得出

$$k_{i+1}=k_1+\sum_{j=1}^{i}\frac{d_j}{n_jh_jh_{j+1}}, \tag{20}$$

根据(16)式,这里

$$k_1=\frac{H_1}{h_1}=\frac{t_1(t_1-s_1)}{n_0s_1}. \tag{21}$$

(13)式中与来自入射光瞳中心的傍轴光线有关的其他各量,也可容易地用与另一条光线有关的一些量来表示. 由(17)和(19)式,得出

$$L_i=K_i+\frac{1}{k_ih_i^2}. \tag{22}$$

由(15)和(22)式,进一步得出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{1}{n_i t_i'} - \frac{1}{n_{i-1} t_i} = \frac{1}{n_i r_i} - \frac{1}{n_{i-1} r_i} - \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right) L_i$$

$$= \frac{1}{n_i}\left(\frac{K_i}{n_i} + \frac{1}{s_i'}\right) - \frac{1}{n_{i-1}}\left(\frac{K_i}{n_{i-1}} + \frac{1}{s_i}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right)\left(K_i + \frac{1}{k_i h_i^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{k_i h_i^2}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right). \tag{23}$$

把(19)，(22)和(23)式代入(13)式中，最后得出

$$\left.\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + h_i^4 K_i^2 \left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right), \\
C &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i^2 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + (1 + h_i^2 k_i K_i)^2 \\
&\quad \times \left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right), \\
D &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i^2 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + h_i^2 k_i K_i (2 + h_i^2 k_i K_i) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right) - K_i \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right), \\
E &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i^3 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + k_i (1 + h_i^2 k_i K_i) \\
&\quad \times (2 + h_i^2 k_i K_i)\left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right) \\
&\quad - \frac{1 + h_i^2 k_i K_i}{h_i^2}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right), \\
F &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + h_i^2 K_i (1 + k_i h_i^2 K_i) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

这就是所需要的赛德耳公式的形式． 在这里，入射光瞳的位置只是通过因子 k_1 而引入式中． 由(21)式，k_1 与从第一面的极点到入射光瞳平面的距离 t_1 有关． s_i，s_i'，K_i 和 h_i 各量还是由(14)—(16)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中的适当关系式算出，而各个 k_i 则由 (20) 式定出。

§ 5.5.3 珀兹伐定理

由象散和象场弯曲系数的表达式，可导出一个有意义的关系，它是由珀兹伐给出的。现在有

$$C-D=\frac{1}{2}\sum_i\left\{\left[(1+h_i^2k_iK_i)^2-2h_i^2k_iK_i-h_i^4k_i^2K_i^2\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{n_is_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right]+K_i\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_{i-1}^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i\left\{\frac{1}{n_is_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}+K_i\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_{i-1}^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_{i-1}}\right), \tag{25}$$

式中已用了 (15) 式。

根据 § 5.3，C 和 D 决定径向和切向场曲。设 n_a 表示最后的媒质的折射率，由 § 5.3(18) 和 (21) 式，得出

$$C=\frac{1}{4n_a}\left(\frac{1}{R_t}-\frac{1}{R_s}\right),\quad D=\frac{1}{2n_a}\frac{1}{R_s}. \tag{26}$$

因此 (25) 式可写成

$$\frac{1}{R_t}-\frac{3}{R_s}=2n_a\sum\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_{i-1}}\right). \tag{27}$$

于是我们就得到了两个焦面的曲率之间的关系式，它只包含系统诸折射面的半径以及相应的折射率。如果这系统没有球面象差、彗差和象散，则在一个具有半径 $R_s=R_t=R$ 的曲面上形成一个锐象；根据 (27) 式，这一曲面的半径由

$$\frac{1}{R}=-n_a\sum_i\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_{i-1}}\right) \tag{28}$$

给出。这个结果通常称为珀兹伐定理。

下述条件

$$\sum_i\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_{i-1}}\right)=0 \tag{29}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

通常称为珀兹伐条件. 它是象场平坦的必要条件. 但是应该记住, 这个条件属于赛德耳理论的范围; 超出这一范围就失去它的意义.

不论是否有象差, 一个满足下述条件的球面则称为珀兹伐面, 这个球面与两个焦面相切于其轴上共同点, 并且其半径 R 是由 (28) 式给出的. 根据 (27) 和 (28) 式, 径向焦面、切向焦面和珀兹伐面三者的曲率半径的关系为

$$\frac{3}{R_t} - \frac{1}{R_s} = \frac{2}{R}. \tag{30}$$

§ 5.6 例子: 一个薄透镜的初级象差

现在利用赛德耳公式去求一个放在空气(真空)中而折射率为 n 的薄透镜的初级象差系数. 在这种情况下,

$$n_0 = n_2 = 1, \quad n_1 = n. \tag{1}$$

因已假定透镜厚度 d 可以忽略, 根据 § 5.5(14) 式, 得出

$$s_2 = s_1'; \tag{2}$$

由 § 5.5(15) 式, 给出

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{s_1} &= n\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s_1'}\right) = K_1, \\ n\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s_2}\right) &= \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s_2'}\right) = K_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

进一步由 § 5.5(16) 式和 § 5.5(20) 式, 并利用 (2) 式, 得出

$$\left.\begin{aligned} &h_1 = h_2 = h, \quad k_1 = k_2 = k, \\ &\text{式中} \\ &h = \frac{s_1}{t_1 - s_1}, \quad k = \frac{t_1(t_1 - s_1)}{s_1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

用一些简单的参量来表征这透镜将带来方便. 设 $\mathscr{P}$ 是透镜的光焦度[参看 § 4.4 的 (35) 和 (36) 式]

$$\mathscr{P} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \tag{5}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

并且设

$$\sigma=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \tag{6}$$

由(3)式,

$$(n-1)\frac{1}{r_1}=\frac{n}{s_1'}-\frac{1}{s_1},\quad (n-1)\frac{1}{r_2}=\frac{n}{s_2}-\frac{1}{s_2'}, \tag{7}$$

利用(2)式,因此得出

$$\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{s_1}=\mathscr{P}. \tag{8}$$

这个关系式可写成

$$-\frac{1}{s_1}-\frac{\mathscr{P}}{2}=-\frac{1}{s_2'}+\frac{\mathscr{P}}{2}=\mathscr{K}; \tag{9}$$

$\mathscr{K}$ 对这透镜所起的作用,类似于K对单个面所起的作用. 相应地,$\mathscr{K}$ 被称为**透镜的阿贝不变量**.

以后将看到,透镜两个面的形变系数 b_1 和 b_2 只通过

$$\beta=(n-1)\left(\frac{b_1}{r_1^3}-\frac{b_2}{r_2^3}\right) \tag{10}$$

这个量出现于公式中;这个量可称为**透镜的形变系数**.

现在用参量 $\mathscr{P}$, σ, β 和 $\mathscr{K}$ 来表示在赛德耳公式§5.5(24)中出现的各量. 前三个参量是表征透镜的,最后一个参量规定物的位置. 第一步,由(3)式得出

$$\mathscr{K}_1=\mathscr{K}+\frac{\sigma+n\mathscr{P}}{2(n-1)},\quad K_2=\mathscr{K}+\frac{\sigma-n\mathscr{P}}{2(n-1)}. \tag{11}$$

进一步,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{ns_1'}-\frac{1}{s_1}&=\frac{n^2-1}{n^2}\mathscr{K}+\frac{\sigma}{2n^2}+\frac{\mathscr{P}}{2},\\ \frac{1}{s_2'}-\frac{1}{ns_2}&=-\frac{n^2-1}{n^2}\mathscr{K}-\frac{\sigma}{2n^2}+\frac{\mathscr{P}}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

代入赛德耳公式§5.5(24)式,就导出一个薄透镜的初级象差系数的下列表达式:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
B &= h^4 U,\\
F &= h^4 k U + h^2 V,\\
C &= h^4 k^2 U + 2h^2 k V + \frac{1}{2}\mathscr{P},\\
D &= h^4 k^2 U + 2h^2 k V + \frac{n+1}{2n}\mathscr{P},\\
E &= h^4 k^3 U + 3h^2 k^2 V + k\frac{3n+1}{2n}\mathscr{P},
\end{aligned}\right\} \tag{13}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\beta + \frac{n^2}{8(n-1)^2}\mathscr{P}^3 - \frac{n}{2(n+2)}\mathscr{K}^2\mathscr{P}\\
&\quad + \frac{1}{2n(n+2)}\mathscr{P}\left[\frac{n+2}{2(n-1)}\sigma + 2(n+1)\mathscr{K}\right]^2,\\
V &= \frac{1}{2n}\mathscr{P}\left[\frac{n+1}{2(n-1)}\sigma + (2n+1)\mathscr{K}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

这里将只考虑**入射光瞳与透镜重合**($t_1=0$)的情况．根据(4)式，则有

$$
h = -1,\quad k = 0,
$$

公式(13)变为

$$
\left.\begin{aligned}
B &= U,\\
F &= V,\\
\frac{1}{2}(C+D) &= \frac{2n+1}{4n}\mathscr{P},\\
\frac{1}{2}(C-D) &= -\frac{1}{4n}\mathscr{P},\\
E &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}
$$

可以看出，由(14)式定义的两个量 U 和 V，代表透镜平面内有一光阑时这一透镜的球面象差和彗差．这样的一个透镜没有畸变($E=0$)，但象散和象场弯曲总是出现的($C\neq 0$, $D\neq 0$)．

让我们考察一下，对于一个给定的透镜，其平面内有一光阑，看是否存在一对不晕点($B=F=0$)．根据(15)式，为了没有

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

彗差，必须 $V=0$，即

$$\frac{n+1}{2(n-1)}\sigma+(2n+1)\mathscr{K}=0. \tag{16}$$

则由(9)式给出物距 s_1：

$$\frac{1}{s_1}=-\frac{1}{2}\mathscr{P}+\frac{n+1}{2(n-1)(2n+1)}\sigma. \tag{17}$$

这样选择 s_1，透镜的球面象差就完全确定了．因此对于给定的一个其平面内有一光阑的透镜，一般不存在一对不晕点．但是，如果只给定 $\mathscr{P}$ 和 σ，则用一适当选择的形变系数 β 就可消去球面象差．

反过来说，如果给定物距 s_1 和焦距 $f=1/\mathscr{P}$，则第一步可根据无彗差这一要求来选择半径 r_1 和 r_2．根据(17)，(5)和(6)式，在这种情况下，得出

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r_1}&=\frac{2n+1}{n+1}\frac{1}{s_1}+\frac{n^2}{n^2-1}\mathscr{P},\\ \frac{1}{r_2}&=\frac{2n+1}{n+1}\frac{1}{s_1}+\frac{n^2-n-1}{n^2-1}\mathscr{P}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

例如，对于物在无穷远 $(s_1=\infty)$，并且 $n=1.5$，由上式给出，

$$r_1=\frac{5}{9}\frac{1}{\mathscr{P}}=\frac{5}{9}f,\quad r_2=-5\frac{1}{\mathscr{P}}=-5f. \tag{19}$$

图 5.10 中示出这样一个无彗差透镜，图中的 C_1 和 C_2 是这透镜两个面的曲率中心．

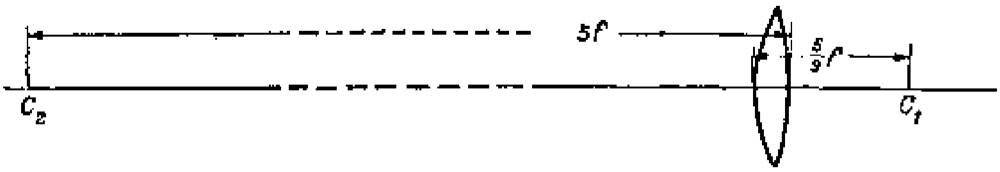


图 5.10　无彗差薄透镜(物在无穷远)

第二步，用一适当选择的 β 可消去球面象差．当物在无穷远时，根据(9)式则有 $\mathscr{K}=-\mathscr{P}/2$，因此由(16)式得出，$\sigma=(2n+1)(n-1)\mathscr{P}/(n+1)$；于是根据无球面象差的条件 $U=0$，就给出 β 的下述表达式：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$-\frac{1}{2}\beta=\mathscr{P}^3\left\{\frac{n^2}{8(n-1)^2}-\frac{n}{8(n+2)}+\frac{1}{2n(n+2)}\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)}-(n+1)\right]^2\right\},$$

由此得出

$$\beta=-\frac{n^3}{(n^2-1)^2}\mathscr{P}^3. \tag{20}$$

当 $n=1.5$ 时，上式给出

$$\beta=-\frac{54}{25}\mathscr{P}^3, \tag{21}$$

因此，利用 (19) 和 (10) 式，

$$729b_1+b_2=-540. \tag{22}$$

这个式子是可以满足的，例如取 $b_1=b_2=-0.74$.

如果不消除彗差，则可首先设法尽量减小球面象差. 可以发现，如果焦距是正的，则只当物位于某一限定范围内时，才能完全除去球面象差；当 $n=1.5$ 时，这一范围位于透镜后方从 $0.36f$ 到 $0.44f$. 物在其它任何位置时，总有一定数量的球面象差存在.

为了改善象场弯曲，透镜必须与一个放在适当位置的光阑一起使用，这可由一般公式 (13) 定出. 对于一个具有正焦距并且 $n=1.5$ 的透镜，只当物位于透镜前方一焦距长度到透镜后方半焦距长度的范围内时，才能消去象场弯曲.

对于一个由若干透镜组成的系统，计算变得更加复杂. 这时消除色差具有头等重要性. 由两个胶合薄透镜组成的消色差望远物镜的初级象差，研究起来还大概比较容易一些，可以发现，除了象散和象场弯曲以外，它的所有别的初级象差均可消去；因此它只适用于小视场范围（对一个 $f/10$ 的系统，至多到 3° 左右）.

§ 5.7 一般的共轴透镜系统的色差

§ 4.7 中已简单讨论过色差. 这里将利用前几节的一般形式，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

导出象的位置色差和放大率色差的显示式[1]. 假定这系统对单色光已作精确校正. 如果只考虑一级效应,这一理想化是许可的;因为与象差本身的大小相比,波长改变很小时相应的单色象差的变化可假定是很小的;所以一般说来,这些变化与赛德耳理论中所忽略的项有相同的数量级.

根据 § 5.5(15) 和 § 5.5(14) 式,

$$n_{i-1}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i}\right)=n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i'}\right)=K_i, \tag{1}$$

$$s_{i+1}=s_i'-d_i. \tag{2}$$

如果用 δ 表示波长有微小改变 $\delta\lambda$ 时一个量的相应变化,则由(1)和(2)式,得出

$$n_i\frac{\delta s_i'}{s_i'^2}-n_{i-1}\frac{\delta s_i}{s_i^2}=-\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)K_i, \tag{3}$$

$$\delta s_{i+1}=\delta s_i'. \tag{4}$$

用 h_i^2 乘(3)式,并且利用关系式

$$\frac{h_{i+1}}{h_i}=\frac{s_{i+1}}{s_i'}, \tag{5}$$

我们得到

$$n_i\left(\frac{h_{i+1}}{s_{i+1}}\right)^2\delta s_{i+1}-n_{i-1}\left(\frac{h_i}{s_i}\right)^2\delta s_i=-h_i^2K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right). \tag{6}$$

令 α 表示系统中的面数. 把所有象(6)式那样形式的方程加起来,就得到

$$n_\alpha\left(\frac{h_{\alpha+1}}{s_{\alpha+1}}\right)^2\delta s_{\alpha+1}=n_\alpha\left(\frac{h_\alpha}{s_\alpha'}\right)^2\delta s_\alpha'=n_0\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2\delta s_1$$

$$-\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right).$$

因为物的位置与波长无关,$\delta s_1=0$,我们就得到象的**位置色差** $\delta s_\alpha'$

---

1) 实质上,我们再一次按照 K. Schwarzschild 的分析, *Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.*, **4** (1905—1906), No. 3. 重印于 *Astr. Mitt. Königl. Sternwarte Göttingen* (1905).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的下述表达式：

$$\delta s_a' = -\frac{1}{n_a}\left(\frac{s_a'}{h_a}\right)^2 \sum_{i=1}^{a} h_i^2 K_i \left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right). \tag{7}$$

其次考虑系统的放大率M的色差。我们有

$$M = \frac{l_1}{l_0}\frac{l_2}{l_1}\frac{l_3}{l_2}\cdots\frac{l_a}{l_{a-1}}. \tag{8}$$

现在利用§5.5(8)式，

$$\frac{l_i}{l_{i-1}} = \frac{n_{i-1}}{n_i}\frac{s_i'}{s_i},$$

因此

$$M = \frac{n_0}{n_a}\left(\frac{s_1'}{s_1}\frac{s_2'}{s_2}\frac{s_3'}{s_3}\cdots\frac{s_a'}{s_a}\right). \tag{9}$$

取对数，再微分，

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{\delta n_0}{n_0} - \frac{\delta n_a}{n_a} + \sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\delta s_i'}{s_i'} - \frac{\delta s_i}{s_i}\right)$$

$$= \left(\frac{\delta n_0}{n_0} - \frac{\delta n_a}{n_a}\right) + \frac{\delta s_a'}{s_a'} - \frac{\delta s_1}{s_1} - \sum_{i=2}^{a}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_{i-1}'}\right). \tag{10}$$

上式中那个求和可改写为

$$\sum_{i=2}^{a}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_{i-1}'}\right) = \sum_{i=2}^{a}\frac{d_{i-1}\delta s_i}{s_i s_{i-1}'} = \sum_{i=2}^{a}\frac{d_{i-1}}{s_i^2}\frac{h_i}{h_{i-1}}\delta s_i.$$

但由于用到§5.5(18)式，

$$\frac{d_{i-1}}{h_{i-1}} = (k_i - k_{i-1})h_i n_{i-1},$$

因此

$$\sum_{i=2}^{a}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_{i-1}'}\right) = \sum_{i=2}^{a} h_i^2 n_{i-1}\left(\frac{k_i - k_{i-1}}{s_i^2}\right)\delta s_i,$$

或者按k_i的顺序重新排列，

$$\sum_{i=2}^{a}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_{i-1}'}\right) = -n_0\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 k_1\delta s_1 + n_a\left(\frac{h_{a+1}}{s_{a+1}}\right)^2 k_a\delta s_{a+1}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$-\sum_{i=1}^{\alpha} k_i\left[n_i\left(\frac{h_{i+1}}{s_{i+1}}\right)^2 \delta s_{i+1} - n_{i-1}\left(\frac{h_i}{s_i}\right)^2 \delta s_i\right].$$

利用(4)和(5)式改写等式右边第二项，利用(6)式改写最后一项，我们得到

$$\sum_{i=2}^{\alpha} \delta s_i\left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s'_{i-1}}\right) = -n_0\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 k_1\delta s_1 + n_\alpha\left(\frac{h_\alpha}{s'_\alpha}\right)^2 k_\alpha \delta s'_\alpha$$

$$+\sum_{i=1}^{\alpha} h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right).$$

把上式代入(10)式，并用到 $\delta s_1 = 0$ 这一事实，我们就得到

$$\frac{\delta M}{M} = \left(\frac{\delta n_0}{n_0} - \frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha}\right) + \frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha}\left(1 - \frac{n_\alpha}{s'_\alpha} h_\alpha^2 k_\alpha\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{\alpha} h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right).$$

但由于用到§5.5(22)和§5.5(15)式，

$$\frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha}\left[1 - \frac{n_\alpha}{s'_\alpha} h_\alpha^2 k_\alpha\right] = \frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha}\left[1 - \frac{n_\alpha}{s'_\alpha(L_\alpha - K_\alpha)}\right] = \frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha - t'_\alpha},$$

因此最后得到了放大率色差 δM 的下述表达式：

$$\frac{\delta M}{M} = \left(\frac{\delta n_0}{n_0} - \frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha}\right) + \frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha - t'_\alpha} - \sum_{i=1}^{\alpha} h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right). \quad (11)$$

如果物空间和象空间的折射率相等(通常正是这种情况)，则等式右边头两项就消去了。如果系统对于象的位置是消色差的，则[由(7)式给出的] $\delta s'_\alpha$ 也为零，于是我们得到了对于象的位置消色差和对于放大率消色差的下述两个条件：

$$\sum_{i=1}^{\alpha} h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) = 0, \quad (12)$$

和

$$\sum_{i=1}^{\alpha} h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i} - \frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) = 0. \quad (13)$$

对于一个在空气中的薄透镜，利用§5.6中的适当公式，我们就得到这两个求和的表达式：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\Sigma h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)=h^2\mathscr{P}\frac{\delta n}{n-1} \tag{14}$$

和

$$\Sigma h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)=h^2 k\mathscr{P}\frac{\delta n}{n-1}, \tag{15}$$

式中的 h, k 和透镜光焦度 $\mathscr{P}$ 由 § 5.6(4)和 §5.6(5) 式给出。分别把(14)式代入(7)式，把(15)式代入(11)式，就得到象的位置色差和放大率色差的相应表达式。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第六章 成象仪器

前面三章主要利用高斯光学和赛德耳理论的预示结果来说明光学成象的几何理论. 这一光学分支极其有用，一个突出的例子就是它能用很直观的形式来表示光学仪器的工作原理. 虽然光学系统的性质不能单独用高斯理论来估计，但可用高斯理论来指出各个光学元件所起的作用，因此常常不必涉及十分复杂的光学设计技术，就能得到一个简单(虽则有点近似)的图象来描述这个系统的作用.

在过去,光学仪器正是随着技术上困难的克服而得到发展的. 由于下述两个原因,简直不可能一步一步地叙述光学系统的设计. 第一,对一已知装置的种种限制不是简单理论所能预测的;在一些特殊情况下,这需要补加更详细的分析、其中常包括冗长的计算. 第二,种种实际困难使得某方面很有价值的装置不能使用. 因此,我们不打算讨论在各种情况下对理论和实际的种种限制，而只给出一些较重要的光学仪器装置所根据的基本原理，为以后更详细讨论光学成象理论的各章打下基础[1].

§ 6.1 眼 睛

最简单的光学仪器、也许就是只有单个会聚透镜在光敏面上

1) 对光学仪器更详细的讨论,例如可参看 *Dictionary of Applied Physics*, ed. R. Glazebrook (London, Macmillan, 1923), Vol. IV; L. C. Martin, *An Introduction to Applied Optics*, Vol. II (London, Pitman, 1950); G. A. Boutry, *Optique Instrumentale* (Paris, Masson, 1946). 讨论仪器特殊类型的参考书和论文,详见 D. A. Jacobs, *Fundamentals of Optical Engineering* (New York, McGraw-Hill, 1943).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

形成物的一个实象那一类．这类光学系统的例子在照相机和眼睛中就有(图 6.1)．眼睛的后部内表面[1]称为网膜，它由一层光敏细胞组成．因为眼睛构成了许多光学系统不可缺少的一部分，所以对眼睛特性的了解就成为仪器光学很重要的一部分．本节将描述眼睛的一些特性．

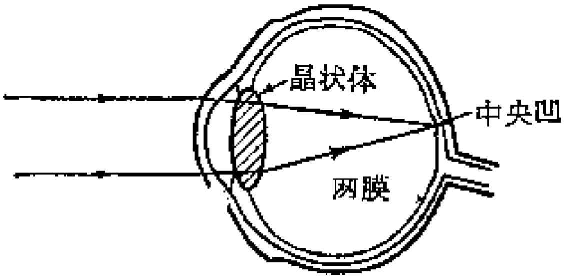


图 6.1　人的眼睛

眼睛内的折射主要发生在眼睛的第一个表面即角膜上，但也发生在眼睛的晶状体前后表面上．晶状体位于可收缩的彩廉后面．根据进入眼睛的总光通量的大小，彩廉的孔直径可由于不自觉的肌肉作用而改变，其数值大约在 1.5 毫米到 6 毫米之间．晶状体是双凸的，它的密度以及折射率都不是均匀的，而是朝着外缘方向减小的．这在某种程度上足以校正球面象差(见§ 5.3)．晶状体的折射率平均值是 1.44，而介于晶状体和网膜之间的玻璃状液的折射率大约是 1.34，接近于水的数值．

晶状体前后表面的曲率半径可由于肌肉收缩而改变，供聚焦之用．这种调焦的本领称为眼睛的调节，正常眼的最小明视距离是 25 厘米左右．眼睛的调节本领，因不同人而大不相同，对于每个人又随年龄而变[2]．利用外加眼镜来校正过分偏离常态的眼睛，这成了眼科的课题．眼睛中发生的变态主要有三种：

(a) 近视，这时来自一个无穷远物点的光线会聚到位于网膜前面的一个焦点上． 这可用一个发散透镜放在眼睛前面加以校正．

---

1) 对生理光学的详细讨论，读者可参考 H. Helmholtz 的标准著作，*Handbuch der Physiologischen Optik* (Hamburg and Leipzig); L. Voss, 3 Aufl., I (1909), II (1911), III (1910); 英译本编者 J. P. C. Southall (Optical Society of America 出版，1924)；以及 J. P. C. Southall, *An Introdaction to Physiological Optics* (Oxford University Press, 1937).

2) 眼睛的光焦度在 10 岁时可包括 14 个屈光度的范围，25 岁时可包括 10 个屈光度的范围，50 岁时可包括 2.5 个屈光度的范围．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(b) 远视，这时一个无穷远物的真实焦点位于网膜后面．可用一个会聚透镜加以校正．

(c) 象散，这时眼睛的光焦度在包含其光轴的不同平面上是不同的．这种缺陷可用眼镜片的一个柱面或超环面加以校正．

网膜含有两种主要类型的光敏细胞，杆状的和锥状的．根据通常的颜色视觉理论，锥状细胞可细分为三种色敏类型．它们在网膜中部一小穴(中央凹)内占优势，具有最大的浓度．由中央凹确定的最明视场，决定视觉的定象，或者说决定眼睛“注视”的方向；这个最明视场的角范围略小于1度．在中央凹内的锥状细胞直径介于0.0015毫米和0.005毫米之间．杆状细胞对颜色范围的选择性不那么高，它们在网膜外围占优势，对低强度的光源最敏感．这就是眼睛例如扫过夜空时出现“视觉转变”现象的原因．

利用任一已知光学系统分辨细节的能力是有一极限的．在§8.6.2中将要看到，从根本上说，这一极限是由于光的波动性引起的．距离很近的两个物点可用眼睛分辨的实际极限，称为眼睛的视觉敏锐度，这个量显然对光学设计者极有意义，因为目视仪器应达到的光学和机械容限都取决于这个量．对于一正常眼，用角度测量的这一极限角间隔约为1弧分，假定焦距为15毫米，这相当于网膜上的间隔约0.0045毫米．当眼睛的孔径超过5毫米时，色差和球面象差的效应将使分辨本领降低．因此在设计目视仪器时，通常假定进入眼睛的光锥直径不大于4—5毫米．设计目视仪器以便补偿眼睛的缺陷，这种设计即使有，也是罕见的，因为眼睛中出现的各种数据因人而异．

§6.2 照 相 机

在照相机中(图6.2)，利用单个透镜或一透镜组在照相底片或底版的表面上形成物的一个倒立实象．物相对于照相机，可以是不动的，也可以是动的．在后一种情况中，曝光时间一定要短；因此，为了收集足够的光，孔径必须尽可能大．由§4.8(24)式得出，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

从一扩展物发射到象的单位面积上的光(照度 E)与 d^2/f^2 成正比，d 是入射光瞳的直径，f 是焦距；即它与 F 数(标称焦比)的平方成反比。它的大小通常可用一可变光阑加以改变。

在无象差的情况下，一远物对第一节点的张角为 $\delta\theta$，则其象的线大小为 $f\delta\theta$。因此，为了产生大的象，焦距一定要长。由此可见，照相机的两个主要特征就是它的光学系统的焦距以及它能使用的焦比范围。照相机另一可能需要的条件就是它应包括一个大的角视场。通常设计的照相机所包括的视场在 10 度到 90 度之间，所用的焦距从 1 吋到 6 呎之间。在天文照相术中需要更长的焦距 (6—60 呎)，这时含有若干个有效点光源而角度范围很小 (~1°) 的场，常常必须以大尺度再现。

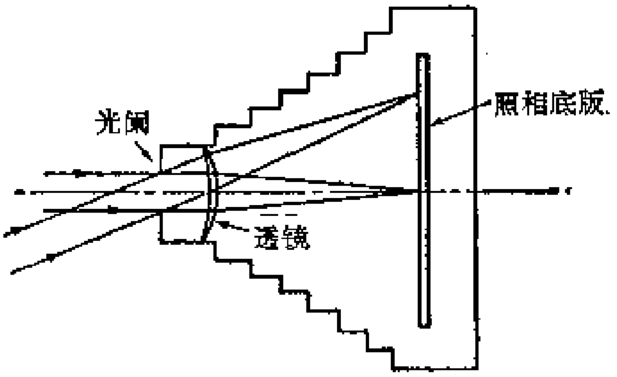


图 6.2 照相机

最简单的小照相机使用单个会聚透镜，通常是弯月形(凹凸)的，离透镜不远处有一光阑，如图 6.2 所示。对色差效应没有校正，因此，在照相乳胶一般只对光谱蓝端一窄范围 (4000—4800 埃) 灵敏的情况下，这种透镜才比较令人满意。这种透镜通常用于较廉价的照相机中，焦比 $f/11$、包括 45° 视场。

这种弯月形透镜一度称为"观景透镜"，它约首创于 1812 年，其后(在引入照相术后不久)出现舍伐列 (Chevalier) 消色差复合透镜[图 6.3(a)]。这种消色差组合的目的在于使照相上的激活光焦点与目视光 (λ = 5800 埃附近最亮)焦点重合；焦比低于 $f/16$ 就不能得到良好的象。人象照相术需要"快"得多的透镜(即具有更低焦比的透镜)，结果导致珀兹伐人象透镜被广泛使用，这种透镜约首创于 1840 年[图6.3(b)]，由两组分开的复合透镜组成。这种装置给出了一个曲率相当大的视场面，但焦比低至 $f/4$ 时在几度范围的场中仍可得到良好的清晰度。达耳迈耶 (J. H. Dallmeyer) 改

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

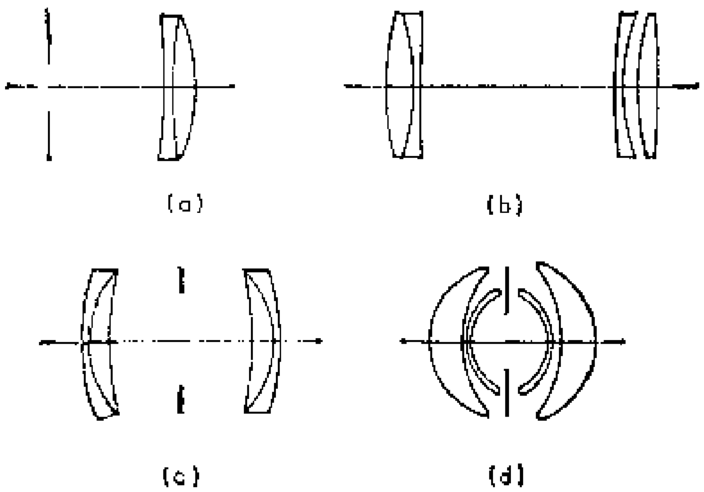


图 6.3

(a) 命伐列透镜 (b) 珀兹伐透镜
(c) 快速直线透镜 (d) 小孔径宽视场透镜

进的珀兹伐透镜已广泛用于电影放映器中.

1841 年前后已经知道，对称的透镜能自动消除畸变. 这只有在放大率等于 1 的情况下才完全正确，不过对于其他的工作距离也基本上正确. 这一原理已成为设计多种由一长串照相透镜组成的镜头的基础. 1866 年达耳迈耶首创快速直线透镜（或译作快速消畸透镜）[图 6.3(c)]，它已用于多种照相机中，但迟至 1920 年才使焦比低至 $f/8$，其视场约 45°. 许多公司都制造这种透镜，一般称它为"不晕透镜"(aplanat). 在很宽视场的透镜设计中，也继续遵守这一导致消除畸变的对称原理. 这种透镜的最初形式是 1900年戈兹(C. P. Goerz)拟球心阑镜头(hypergon)，它在焦比约为 25时能包括宽达 150° 的视场，虽然通常在 $f/16$ 时包括90°就已经足够了. 1933年出现的四元件小孔径宽视场透镜(Topogon)[图 6.3(d)]，在 $f/6.3$ 时将包括 90° 的视场，它是近代宽角度镜头的基本设计.

在十九世纪的大部分时间内，透镜设计者只限于使用两种主要类型的玻璃：硅酸硼冕牌玻璃和重火石玻璃. 1890 年左右，耶拿(Jena)公司引进了一种全新类型的玻璃——钡冕玻璃，它的折射率高而色散本领低. 在透镜系统中结合使用这种钡冕玻璃，可

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

得到更高次的校正.耶拿的鲁道夫（P. Rudolph，他以创制多种照相镜头而著名)创造了“去象散”一词来描述透镜在某一离轴角上的象散可减小到零. 鲁道夫只利用较老类型的玻璃已制成一种去象散透镜，后来常称为蔡斯(Zeiss) Protar透镜[图 6.4(a)]. 而且，他利用三种类型的玻璃亦可制成一种去象散三合透镜. 对称地使用两个这样的三合透镜,就构成高度校正的透镜组. 这种透镜组，由蔡斯制成的称为三合 Protar 透镜，由戈兹制成的称为 Dagor 透镜或双去象散透镜[图6.4(b)]. 这一类透镜一般可工作于 $f/4.5$，视场 50°. 鲁道夫进一步发现，如果每一半都由四个胶合元件组成，则这一系统成为“可变换的”、即每一半各有不同的焦距，二者能单独地或组合起来使用. 1894 年已制成这样的透镜,称为双 Protar 透镜.

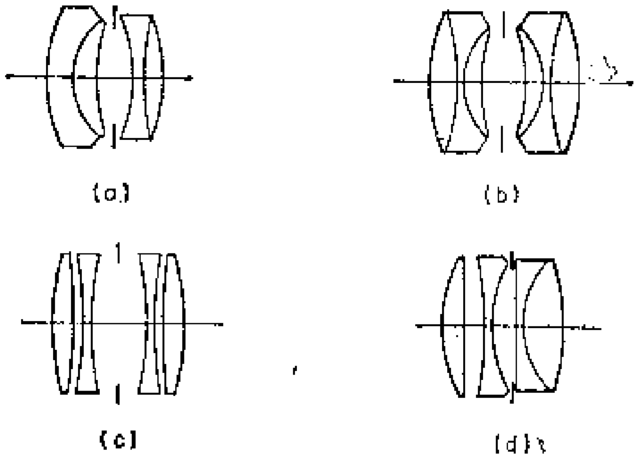


图 6.4

(a) Protar 透镜　(b) Dagor 透镜
(c) Celor 透镜　(d) Tessa 透镜

1898 年戈兹已制成由四个分立元件组成的透镜，称为塞洛透镜[图 6.4(c)]. 这已成为设计焦比低至 $f/4.5$ 的多种重要透镜的基础,例如斯坦海耳（H. A. Steinheil）的 Unifocal 透镜,以及用于航空照相术的 Cooke 航空透镜，鲁道夫按照类似的方法设计，1902 年制成忒萨透镜[图 6.4(d)]. 这种透镜一直很著名,因为它比较便宜，焦比低至 $f/3.5$ 而视场宽到 60° 时成象仍很好. 现已制成具有各种不同焦距的忒萨透镜.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

鲁道夫的早期对称设计，即 1895 年制成的 Planar（词义为“平面”）透镜，用两个弯月形透镜作为其中第一个和最后一个元件[图 6.5(a)]. 1920 年以来，已制成多种快速透镜，其中用弯月形透镜作为第一个元件，而最后一个元件大多数用的是胶合双透镜，例如默特（Merté）制成的蔡斯 Biotar 透镜[图 6.5(b)]. 就是这样的.

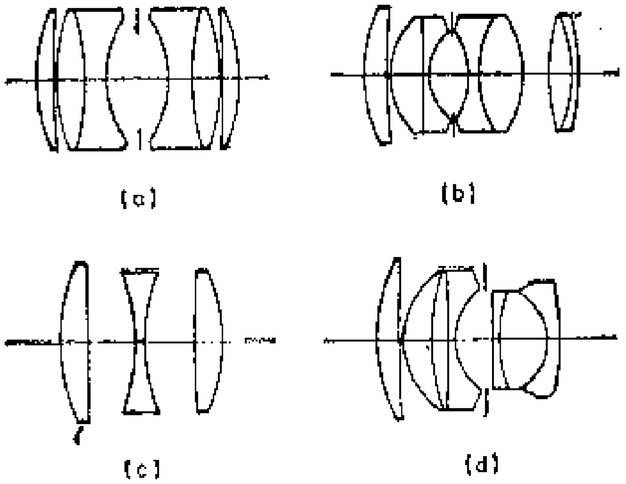


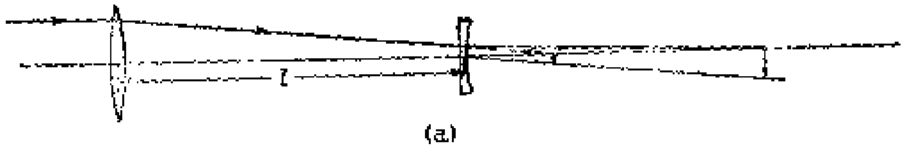
图 6.5

(a) Planar 透镜　　(b) 蔡斯 Biotar 透镜
(c) Cooke 三透镜组　　(d) Sonnar 透镜

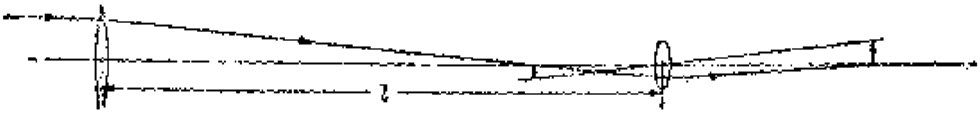
透镜设计中的元件分立化趋势，起始于 1895 年泰勒（H. D. Taylor）制成的去象散三透镜组，或者称为库克（cooke）三透镜组[图 6.5(c)]. 这时可利用在三个分立元件组成的系统中各个参量可以改变这一十分有利的条件. 这种“去象散”设计已基本上取代了中级以下的相照机内较老的快速直线型“不晕”透镜了. 由库克三透镜组发展而成的高速型透镜[例如 Sonnar 透镜，$f/1.5$，图 6.5(d)]，已广泛用于电影摄影机和小型照相机中. 在 Sonnar 透镜中，中央的负元件和第二个正元件均为三合透镜.

某些有特殊用途的照相机要求有效焦距长和相应视场小，则其中的光学系统需要包括一个物镜和一个放大透镜. 在远距照相镜中，放大透镜是一个放在原象前方的发散元件[图 6.6(a)]. 在摄日仪（photoheliograph，一种用于大尺度地拍摄太阳的仪器）中，放大透镜通常是一个会聚系统[图 6.6(b)]. 在这些系统中，有效

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a)



(b)

图 6.6

(a) 远距照相镜 (b) 摄日仪

焦距 f 由 § 4.7(3) 式近似地给出

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{l}{f_1f_2},$$

式中，f_1 和 f_2 分别是物镜和放大透镜的焦距，l 是两镜的距离．有效焦距比物镜到焦平面总长度可长达 15 倍[1]．

最后应当注意，只在扩展物的情况下，照相物镜的 F 数才是"起作用的速率"的近似量度．当物是点光源时(在天文照相中实际上如此)，在理想条件下，到达象平面的光将会聚在一个无限小的面积内，因此不用 F 数而用孔径直径的平方来表征它的集光本领．现实情况更加复杂，因为有几个因素使得光扩展到一个有限面积上(虽然这个面积常常很小)．其中主要的因素是衍射(见第八章)，照相乳胶成粒状以及大气的不稳定性．

§ 6.3 折射望远镜[2]

望远镜是一种可用来看到远物放大象的光学系统．**天文折射**

1) 对照相透镜更详细的讨论，见 W. Merté, R. Richter and M. von Rohr, *Das Photographische Objectiv* (Vienna, J. Springer, 1932). 较新近的设计参看下列论文：W. Taylor and H. W. Lee, *Proc. Phys. Soc.*, **47** (1935), 502; H. W. Lee, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **7** (1940), 130; R. Kingslake, *Proceedings of the London Conference on Optical Instruments* (London, Chapman & Hall, 1951), 1; C. G. Wynne, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 298.

2) 对望远镜更详细的讨论，例如可参看 A. Danjon and A. Couder, "*Lunettes et Télescopes*" (Paris, Revue d' Optique, 1935).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

望远镜的原理如图 6.7 所示. 它由两个会聚透镜组成；其中第一个称为物镜，通常是消色差双合透镜，它形成一个倒立实象 I；第二个透镜称为目镜，它用来考察实象 I. 在正常的调准状态下，物镜第二焦平面与目镜第一焦平面重合，因此入射平行光束亦以平行光束出射. 利用一个辅助透镜就可使象正立.

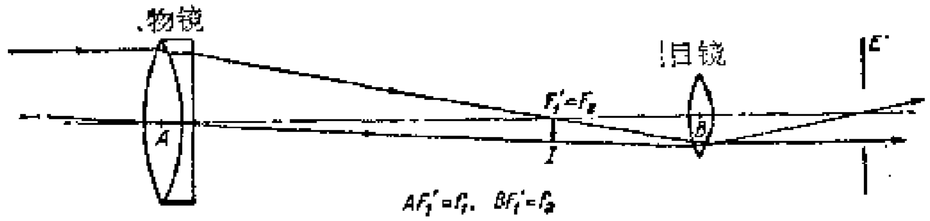


图 6.7 天文折射望远镜

系统的入射光瞳与物镜重合；它由系统其余部分所成的象，即出射光瞳，在图 6.7 中用 E' 来表示. 令眼睛的入射光瞳与 E' 重合；则所有沿不同的离轴角进入物镜的光都射到眼睛内.

用来观察无穷远物的仪器的放大率，定义为出射和入射光瞳处的角放大率. 利用史密斯-亥姆霍兹公式，即 § 4.4(49) 式，这等于两个光瞳平面上线性放大率的倒数，因此这种仪器的放大率等于入射光瞳半径与出射光瞳半径之比. 由 § 4.3(31)式可直接得出这种仪器放大率的表达式，这时，因假定角度很小，所以可用 γ 和 γ' 来代替 $\tan\gamma$ 和 $\tan\gamma'$. 这就给出了

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{f_1}{f_2}.$$

现在可以把眼睛调节到不是无穷远的距离上，并可把望远镜顺利地调准以形成一虚象，假定它在与眼睛相距 D 处[1]. 但是 D 不应小于 25 厘米左右，如前所述，这是正常眼可看清一物而不疲劳的最近距离.

明确知道的最早期望远镜是伽利略在 1609 年制成的. 在这

1) 这时，放大率变为

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_1}{D}.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一系统中(图 6.8),物镜是一会聚透镜,而目镜是一发散透镜,位于原象前方,使得物镜和目镜的焦点在目镜后方重合.这时在无穷远处得到一正象,而没有中间象. 这种望远镜通常称为**伽利略望远镜**. 在这种望远镜中,孔径光阑不在物镜平面上,因为物镜被目镜所成的象位于两镜之间,所以这个象不能到达眼内. 眼睛靠近目镜后方,因此眼睛的瞳孔就成为孔径光阑和出射光瞳. 在视场界限上各点的主光线将通过物镜边缘部分,因此物镜作为场光阑而不作为孔径光阑.

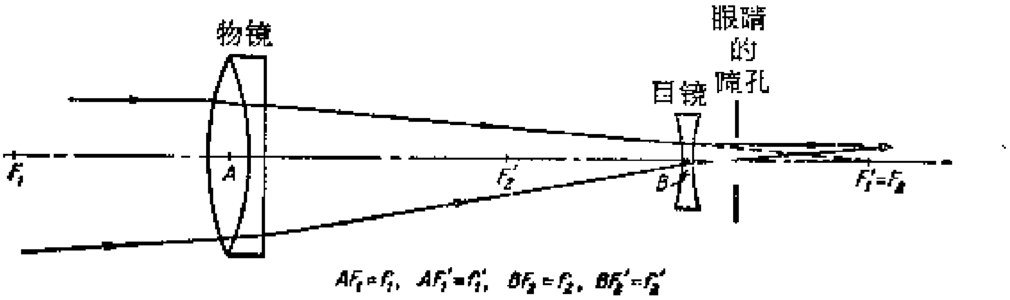


图 6.8 伽利略望远镜

伽利略望远镜的缺点是: 它局限在小视场内,并且没有一个可把叉丝或标线放在其上的实象. 另一方面,它的总长度小,并且给出正象,这就使得此系统用于观剧镜很合适,通常放大二至三倍.

在双目望远镜中,所用的光学装置与天文望远镜相似,但利用四次反射而得到一正象,如图 6.9 所示. 这四次反射都发生在所谓 Porro 棱镜的玻璃-空气界面上,入射角为45°;这个角度当然是超过临界角的. 这种利用反射的设计既方便又有效,常用于小型光学仪器中. 另一种双目望远镜使用 König 正象棱镜. 这棱镜中使用了"屋脊"设计,在屋脊处互成直角(在 1 弧秒以内)的两个相

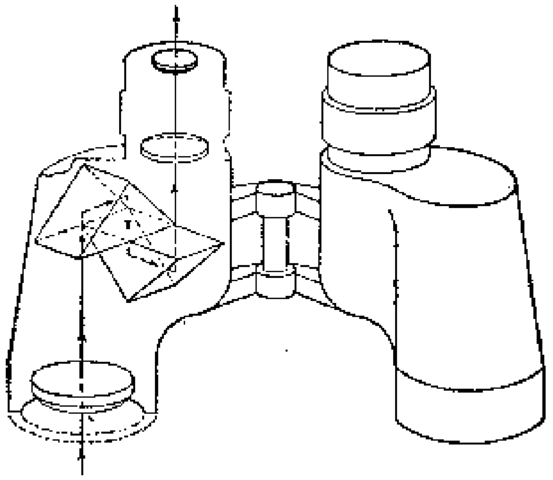


图 6.9 双目望远镜

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

邻反射面横跨过光束，如图 6.10 所示。在通常的双目望远镜中，两个物镜的距离较大是有好处的，因为这能增大体视效应[1]。

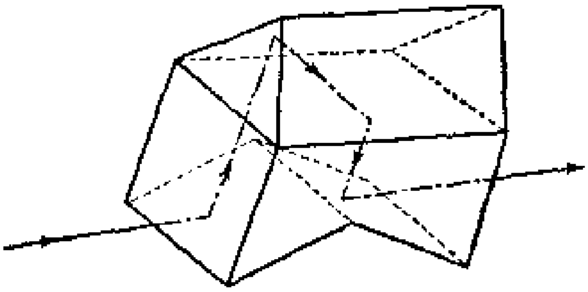


图 6.10 König 正象棱镜

地上望远镜一般类似于天文望远镜；但必须得到正象，其办法或者是象双目望远镜那样利用正象透镜，或者是利用附加透镜。一种典型的系统如图 6.11 所示。

望远物镜通常是一消色差双透镜组，适当选取其球面曲率半径，使球面象差很小。如果用的是胶合双透镜，则通常合适的设计是：其中第一个(冕牌玻璃)

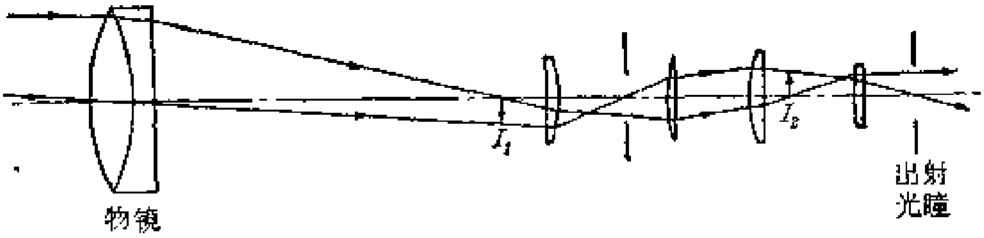


图 6.11 地上望远镜

元件是等凸的，而第二个(火石玻璃)元件是平凹的[图 6.12(a)]。如果要求既没有彗差又没有球面象差，例如用于高质量的天文望

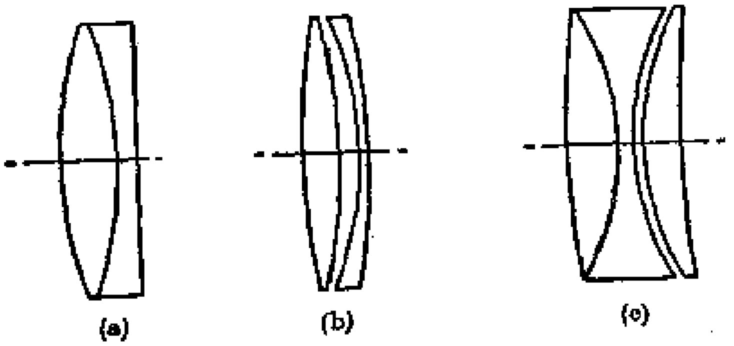


图 6.12

(a) 胶合消色差透镜 (b) 不胶消色差透镜
(c) 照相-目视物镜

---

1) 对双目望远镜更详细的论述，见 M. von Rohr, *Die Binokularen Instrumente* (Berlin, J. Springer, 1920).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

远镜中，则设计时需要利用两个不胶合元件外加的灵活性，选好半径以得出不晕的设计. 这种设计可近似地用图 6.12(b) 表示. 它包含一个凹凸火石玻璃元件. 如果采用无彗差设计，并把某一面修琢为非球面以达到轴上无象散，则上述凹凸元件第一个面的深凹曲线可以减小凹度.

通常的物镜是把冕牌玻璃透镜放在前面，这种物镜最初称为夫琅和费物镜. 很少使用"火石玻璃在前面"的物镜，即斯坦海耳物镜，因为火石玻璃(不如冕牌玻璃稳定)对大气侵蚀较敏感.

照相-目视物镜如图 6.12(c) 所示，这是常用于折射望远镜中的第三种物镜. 利用三种不同的玻璃，可在给定的光谱范围内大大减小焦点的色差. 这种物镜对"照相"和"目视"的波长差不多一样好，曾一度广泛用于天文仪器中，其孔径达到 12 吋左右. 可是，中央元件两深凹曲线，定心困难，以及早期使用各种不稳定的火石玻璃，这都减损了这种镜头的价值.

目视望远镜的目镜，概括地说，必须满足两个要求. 第一，它必须具有能给出所要求放大率的焦距. 第二，它必须具有足够大的孔径以便收集来自扩展物的光. 这些要求用单透镜就能达到，如图 6.13(a) 所示；但更方便的是，也可以用两个较小的透镜，如图 6.13(b) 所示的冉斯登(Ramsden)目镜的光学装置.

目镜应在一个便于放置眼睛的位置上形成孔径光阑的象. 这

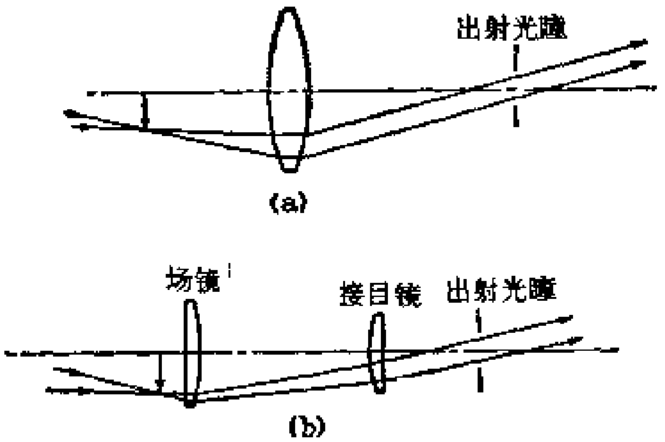


图 6.13

(a) 单透镜目镜 (b) 冉斯登目镜

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

个象离开目镜最后一个面的距离，称为接目距离(eye-relief).

二元件目镜的第一个元件称为场镜，因为它通常很靠近原象．但它应与原象有一段距离，一方面免得看见这个透镜上的任何灰尘或缺陷，另方面使得叉丝或标线能与象平面重合．第二个元件则称为接目镜．

最常用的目镜是冉斯登目镜；而另一主要类型是惠更斯目镜，如图 6.14(a) 所示，它的场镜位于原象的前方．惠更斯目镜的缺点，首先是可得到的接目距离相当短，其次是它不能外加叉丝来使用．惠更斯目镜不能得出象冉斯登目镜那样对球面象差的高级校正，但它没有横向色差和轴外彗差．

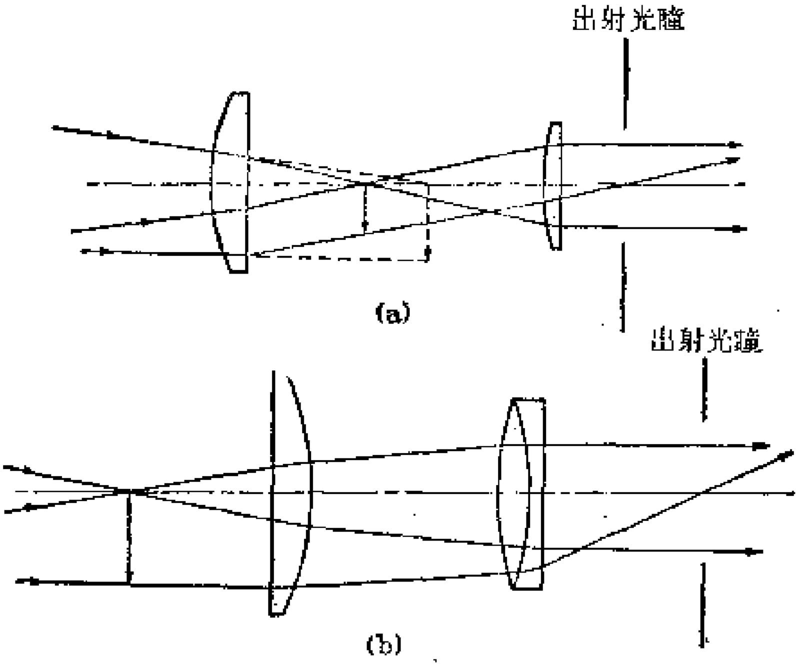


图 6.14

(a) 惠更斯目镜 (b) *Kellner* 目镜

用两透镜代替单透镜(见图 6.14)，有助于排除有害的色差；而且，用双合透镜作为接目镜，可大大改善对冉斯登目镜的校正．更复杂的是"无畸变"目镜和"对称"目镜，它们各用四个元件；大体上类似于冉斯登目镜．它们对象差尤其是对畸变都校正得更好，并且对给定的光焦度可得到较长的接目距离．

潜望镜是一种仪器，用来观察被障碍物挡住而直接看不见的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

物体，它的原理与望远镜的原理是一样的，但有两个要求使得设计这种仪器更为复杂．第一，潜望镜必须有一段弯曲的光路才能工作，并且必须得出正立的象．要得出正立的象，需作偶数次反射或不作反射；图 6.15 示出两种简单装置，其中第一种使入射和出射

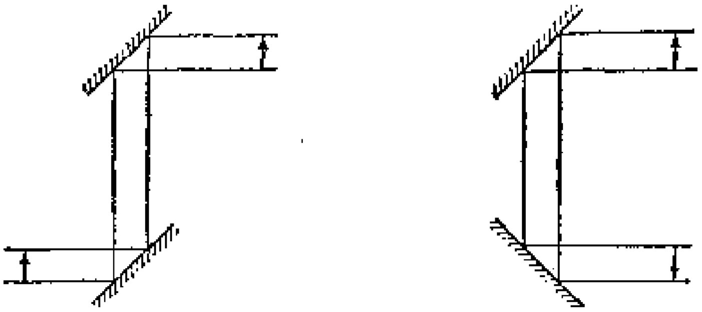


图 6.15 潜望镜

光束方向平行，第二种使入射和出射光束方向逆平行．第一种可配合正象望远系统使用，第二种可配合倒象望远系统使用．另一种装置如图 6.16 所示，其中的出射光束方向是固定的，而第一个棱镜可转动，以便观察不同的方向．Dove 棱镜 D 内有一次反射，它的转速为顶部元件转速之半，以便保持正象．第四个元件是“屋脊”型（Amici）棱镜，以便总共发生四次反射．

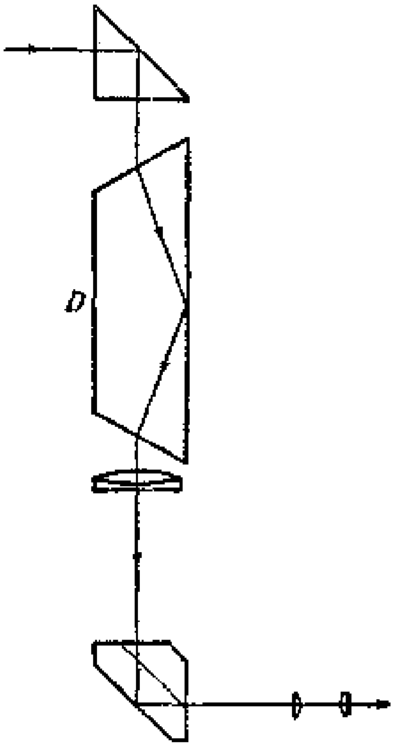


图 6.16 具有 Dove 棱镜的潜望镜

潜望镜的第二个复杂问题是这样引起的：虽然望远系统仍装在窄管内，但希望有一个大的角视场．直径 8 吋而长 40 呎的管子，顶多只能有 2 度的总视场．这个问题的解决办法是利用一系列透镜把光传输到管内．这些透镜可以有不同的间距．图 6.17 示出三透镜系统的三种不同安排，系统的放大率为 1．

这三个系统的视场范围及其有效孔径如表 14 所示．很明显，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

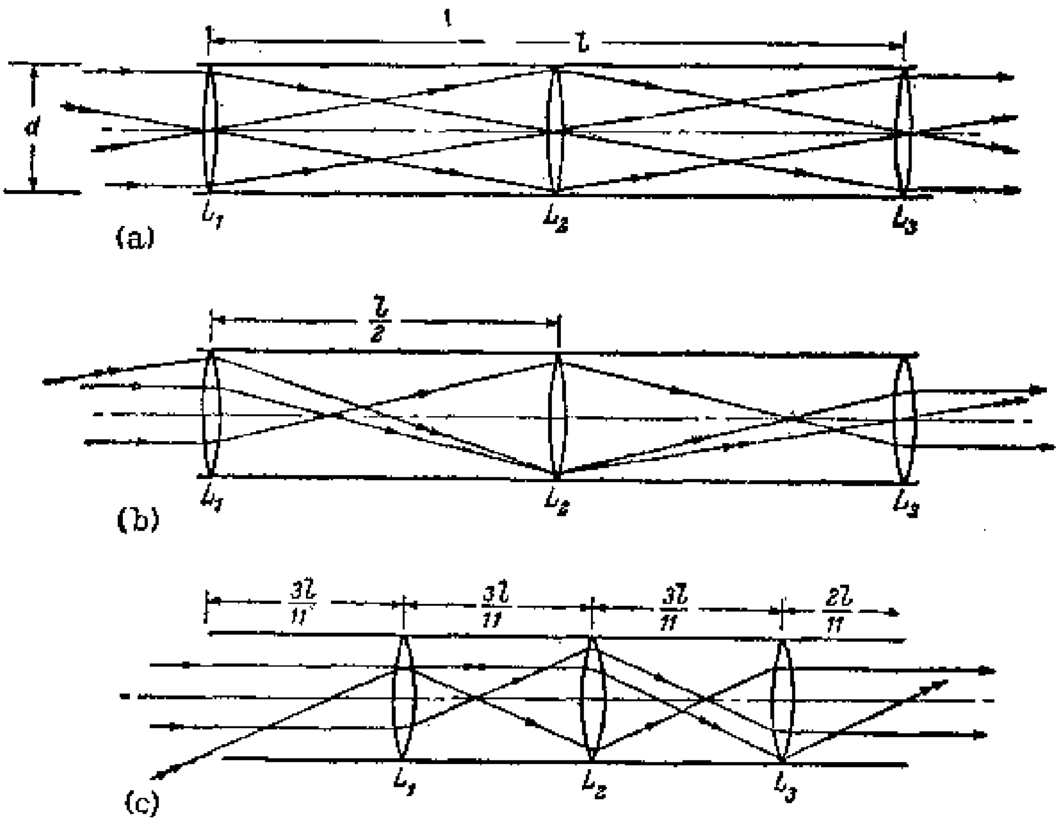


图 6.17　三透镜系统放大率为 1

表　14

	透镜焦距			象	轴上孔径	视场(弧度)	视场边缘的渐晕
	L_1	L_2	L_3				
(a)	$l/2$	$l/4$	$l/2$	倒立	d	$2d/l$	0
(b)	$l/6$	$l/6$	$l/6$	正立	$d/2$	$2d/l$	100%
(c)	$l/11$	$l/11$	$l/11$	正立	$d/2$	$11d/2l$	~86%

所具有的透镜数目愈多，存在各种可能性的范围就愈广[1]。

§ 6.4　反射望远镜

在天文反射望远镜中，来自天体目标的光接收在第一凹面镜上。此镜与折射望远镜中的物镜起同样的作用，即在其焦平面上

1) 进一步的细节可参看 T. Smith, *Dictionary of Applied Physics*, Ed. R. Glazebrook (London, Macmillan, 1923) Vol. IV, P. 350.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

形成物的一个实象。这个象或者直接在照相底版上接收，或者用目镜观察。这种类型的装置是现今使用的天文望远镜最普通的一种了。和折射望远镜的情况一样，放大率等于物镜焦距与目镜焦距之比。

1668年牛顿制成了第一台这种类型的望远镜。在他所用的这台装置里，把一个小平面镜放在被凹面镜反射后的光路中，以便把光线转到管子的一侧，在那里可以方便地观察到象（图 6.18）。这种装置通常称为**牛顿望远镜**。

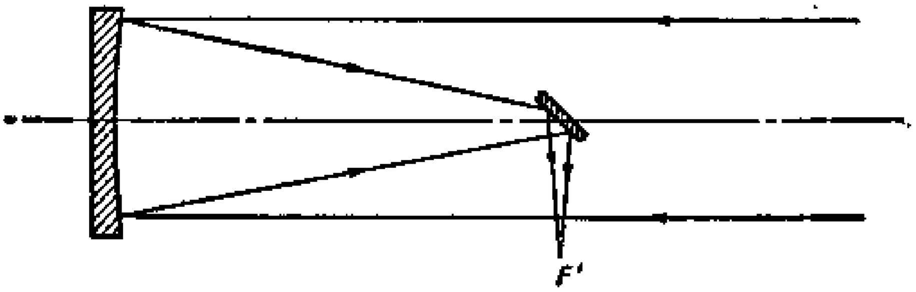


图 6.18 牛顿望远镜

为了获得一个无象散的轴上象，镜面形状必须是一个抛物面。由于抛物面镜所成的轴外象因彗差而大大变坏，以及使用大的相对孔径，这就使得可用的视场很小。在 36 吋及 $f/6$ 的镜的情况下，可包括的总场约为 20 弧分；而在现有的最大望远镜（Hale 望远镜）的情况下，第一面镜直径为 200 吋，场的角直径约为 45 分[1]。

其他类型的反射望远镜，使用两个主镜，即第一凹面镜和第二反射镜。在**卡塞格伦**（Cassegrain）**望远镜**中（图 6.19），第二反射

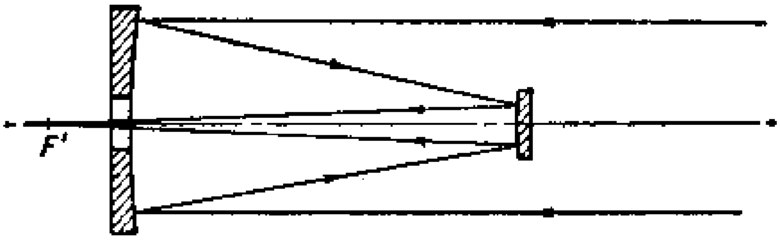


图 6.19 卡塞格伦望远镜

1) F. E. Ross, *Publ. Astr. Soc. pac.*, **46** (1934), 342. 对 200 吋望远镜的一般论述，见 J. A. Anderson, *Pub. Astr. Soc. Pac.*, **60** (1948), 221；以及 B. Rule, 同前, p. 225.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

镜是凸面镜．在大型天文望远镜中，这种装置常取代了牛顿装置．可利用不同的反射镜来给出不同的焦距．如果第一面镜的形状是抛物面，则第二面镜的形状必须是双曲的．这两个镜子可选取其它的形状，使获得一个无象散的轴上象以及不同大小的轴外彗差．在 § 4.10 中已经提到施瓦茨察耳德建议的两镜系统是完全不晕的；不过这两个镜子的形状更为复杂．卡塞格伦系统常用于地上观景望远镜中，因为它使得仪器紧凑价廉而具有长焦距，并能获得高放大率而不需要短的接目距离．

格雷果里 (Gregorian) 望远镜使用凹面镜作为第二反射镜，把它放在第一面镜的原焦点以外．这种望远镜不如卡塞格伦望远镜常用．

在最大的反射望远镜中，可利用第二面镜得到很长的焦距，比最大的折射望远镜的焦距还要长．在 Coudé 装置中，光束被第三平面镜反射，顺极轴而下(望远镜绕极轴转动)，使得光束能射入一个固定的摄谱仪内．

反射望远镜主要优点之一是它完全没有色差．这一点，以及它的镜面所需要的曲率比透镜小得多，就使得反射望远镜能具有比折射望远镜小得多的焦比．这不仅能得到更亮的象，而且形成紧凑得多的光学系统．此外，反射镜能制成比透镜更大的尺寸，因为镜子内部的光学不均匀性并无影响．

天文反射望远镜的缺点主要是：镜面和望远镜管对热效应敏感，不能把很小的角视场扩大，以及制造足够刚性的底座在力学上有困难．事实上，这最后一点已成为 Hale 望远镜制造者面临的最困难问题．

成功地使用带有照相底版的反射望远镜，这就要求把场扩大．扩大可用的场有一种方法是使用场透镜，令其正好位于照相底版的前面．设计这些场透镜时要引进轴外彗差，用来补偿主要反射镜的这种彗差．使用 36 吋望远镜可得到约为 $1\frac{1}{2}^\circ$ 的场[1]．

---

1) 见 F. E. Ross, *Astrophys. J.*, **81** (1935), 156.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

1930 年左右，施密特创制的光学装置，在试图用大的反射系统拍摄宽角视场上取得了更大的成就，这种装置已在 § 4.10 中提到了[1]. 一个抛物面镜使轴向光线理想成象，但离轴不远的一些象就有显著彗差. 而一个球面镜在其曲率中心 C 处加上一个孔径光阑，就会在一个与镜同心的大范围球状场表面上得到一些均匀象，每个象都有显著球差. 施密特在孔径光阑处加上一个近乎平面平行的薄板，称为校正板，其中一个面是平面，而另一个面已经过修琢（图 6.20，6.21）. 这个校正板的效用是"预校正"进入系统的平面波阵面，以便精确地补偿球面镜引起的球面象差.

我们可以容易地导出施密特照相机校正板非球面轮廓的表达式. 为此，让我们来比较球面镜和抛物面镜的表达式. 半径 $R = 2f$ 的球面镜方程为（见图 6.22）:

$$(z^{(s)} - 2f)^2 + y^2 = (2f)^2,$$

即

$$z^{(s)} = \frac{y^2}{4f} + \frac{y^4}{64f^3} + \cdots,$$

而对于具有相同傍轴半径（$R = 2f$）的抛物面，

$$z^{(p)} = \frac{y^2}{4f}.$$

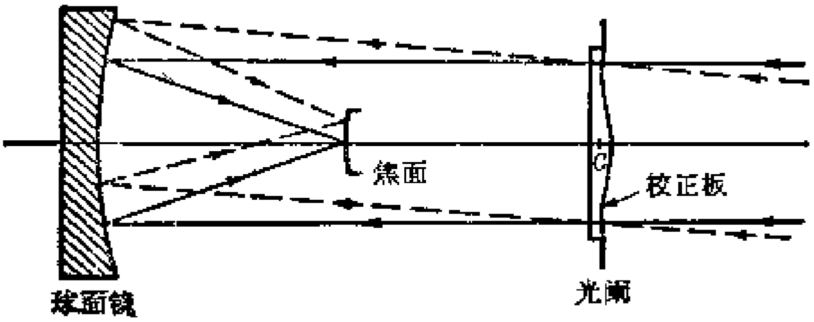


图 6.20　施密特照相机
（校正板的修琢已大为夸大）

1) B. Schmidt, *Central-Zeitung f. Optik u Mechanik*, **52** (1931), Heft 2, 和 *Mitt. Hamburg. Sternw. Bergedorf*, **7** (1932), No.36,15.又见于 R. Schorr, *Zeitschr. f. Instrumkde*, **56** (1936),336, *Mitt. Hamburg. Sternw.Bergedorf*, **7** (1936), Nr. 42, 175, 和 *Astr. Nachr.*, **258** (1936), 45.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

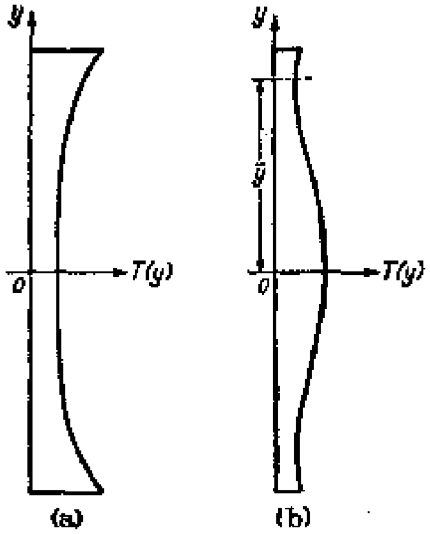


图 6.21 施密特校正板的断面图
（其修琢已大为夸大）

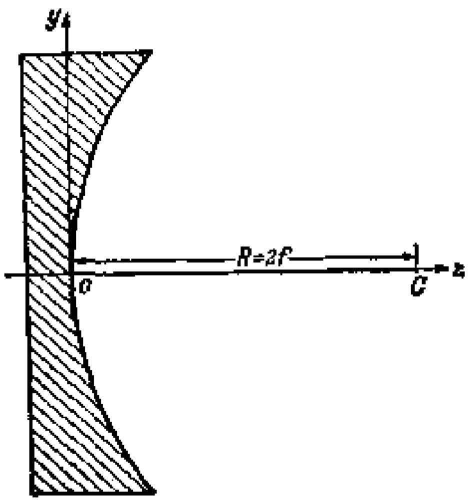


图 6.22 球面镜

沿轴方向入射的一束平行光线被抛物面反射后将得出无象散的象，因此在半径为 y 的一个环带上，必须加到球面镜入射波中的预校正量近似地等于

$$2(z^{(s)}-z^{(p)})=\frac{y^4}{32f^3},$$

其他含有 y 的六次方和更高次方的各项已忽略[1]。 光线通过校正板后仍然是近乎平行的，因此不管 y 是在镜上还是在板上测量，二者没有明显的差别。因此，如果设 n 是板的折射率，则板在半径为 y 的环带上的厚度 $T(y)$ 必大于其轴上厚度 $T(0)$，二者的差值由下式给出：

$$(n-1)[T(y)-T(0)]=2(z^{(s)}-z^{(p)}),$$

即

$$T(y)-T(0)=\frac{y^4}{32(n-1)f^3}. \tag{1}$$

这样的一个校正板的断面如图 6.21(a) 所示。

校正板所要求的非球面性是很不显著的。例如，设有一个 $f/3.5$ 施密特照相机，其校正板的孔径直径 $2y_0=40$ 厘米，则 $f=140$

1) 如果施密特照相机的焦比不低于 $f/3$ 左右，则可证明这一近似是容许的。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

厘米．已知$n=1.5$，则根据(1)式，表征最大非球面性的$[T(y)-T(0)]_{极大}$等于$y_0^4/32(n-1)f^3=0.0036$厘米．

把球面镜与略有不同的"参考抛物面"作比较，可得出更好的校正．设f'是抛物面的焦距，则$z^{(p)}=y^2/4f'$．可得出校正板轮廓不用(1)式表示，而用下式表示：

$$T(y)-T(0)=\frac{y^4-Ay^2}{32(n-1)f^3},\tag{2}$$

式中

$$A=16f^3\left(\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}\right).$$

利用一个按(2)式制作的校正板，这时平行于轴入射的光线通过系统后将会聚于一点，从镜的轴点到这一点的距离为f'．这一附加的自由度(f'的选择)可用来使板引入的色差减到最小．因为

$$当\ y(2y^2-A)=0\ 时，\ \frac{dT}{dy}=0,$$

由此得出，一条平行于轴并在高度$\bar{y}=\sqrt{A/2}$处入射的光线，是不被校正板偏转的．半径$\bar{y}=\sqrt{A/2}$的环带通常称为**中性带**．为了把色差减到最小，中性带必须相当靠近校正板的边缘[1)]，如图6.21(b)所示．

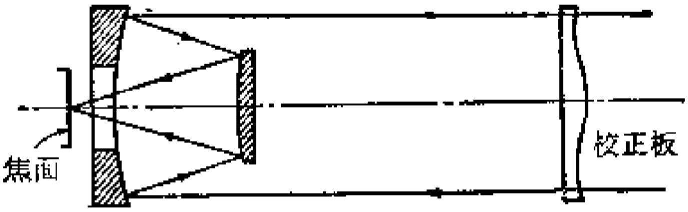
显然，校正板对倾斜通过它的光线，给不出与垂直通过时精确相同的偏移．结果，系统去不掉轴外象差．不过，按通常的标准判断，在与镜同心的球状接收面上所成的象都是质量很好的[2)]；甚至

---

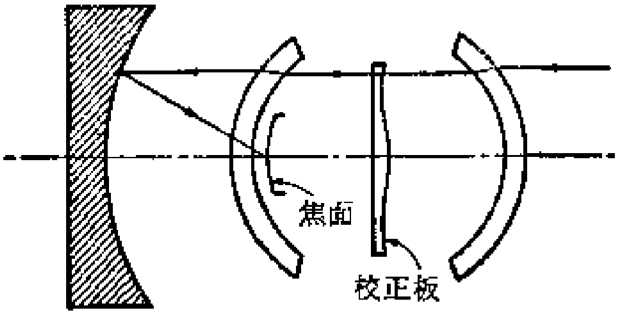
1) 更确切地说，当中性带约在板半径y_0的0.87处时，可以证明，颜色混淆圈的直径是最小的．这相当于选取$A=\frac{3}{4}y_0^2$．对这一点的讨论，见 B. Strömgren, *Vierteljahrsschrift der Astr. Ges.*, **70** (1935), 82, 和 E. H. Linfoot, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **109** (1949), 279. [又见于他写的 *Recent Advances in Optics* (Oxford, Clarendon Press, 1955) 182, 192].

2) 这一点，部分是由于场曲可以证明是系统唯一的初级象差．(B. Strömgren, 同前注引文)．对施密特照相机五级象差的研究，见 C. Carathéodory, *Elementare Theorie des Spiegelteleskops von B. Schmidt* (Leipzig, Teubner, 1940)，和 E. H. Linfoot, 同前注引文．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a)



(b)

图 6.23

(a) 施密特-卡塞格伦照相机 (b) *Baker* 超施密特照相机

在低焦比和大视场的施密特照相机中也是如此，这种照相机工作时，场的范围比通常设计的系统所能达到的范围要大许多倍。

利用施密特照相机原理的更复杂的系统，已作过研究[1]，并且有些已制成了。其中最重要的有两种：一种是施密特-卡塞格伦照相机，它使用两个(球面或非球面)镜和一个校正板[图 6.23(a)]；另一种是 Baker 超施密特照相机，内有一个球面镜，两个弯月镜和一个校正板[图 6.23(b)]。前者的优点是，它用平的场表面工作，与施密特照相机相比，其位置也便于操作；还有，这一系统的总长度比具有相同焦距的施密特照相机短些。Baker 超施密特照相机则能以非常低的焦比工作。

§6.5 照明仪器

一个照明仪器所起的作用是：从一个人造光源收集尽可能多

1) 对这些系统的评述，见 H. Slevogt, *Zeitschr. f. Instrumkde*, **62** (1942), 312; H. Köhler, *Astr. Nachr.*, **278** (1949), 1; E. H. Linfoot, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **108** (1948), 81. [又见于他写的 *Recent Advances in Optics* (Oxford, Clarendon Press, 1955) Chapter IV]. 对 Baker 超施密特照相机更详细的描述，见 F. L. Whipple, *Sky and Telescope*, **8** (1949), 90.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的光，使光偏转以穿过一个光学系统的入射光瞳，并使光充满所规定的入射光瞳接收角．光只能来自一个有限大小的光源，因而照明仪器的设计随光源的性质以及所要求的照明技术条件而定．

图 6.24 表示，光学系统的入射光瞳直径为 r，这一系统所要求的照明方向与轴的夹角最大为 ϕ．假定光源是圆形的，令其直径为 d．为了使效率最大，这一照明系统必须以放大率 r/d 工作，而它的孔径对入射光瞳的张角必须为 2ϕ．工作距离 W 必须大于某一规定值．由图 6.24 考虑得知，对于较小的 d 值，收集角 2ϕ 较大，浪费的光就较少．还有，照明角大（ϕ大），常能使 w/r 值较小，因此就能以合适的效率使用较大的光源．由此可见，在任一特定情况下，对具有合适效率的最大光源都有一限制，当需要大的照明角时，这一限制较不严格．在照相放大机中（$\phi\sim 20°$），通常用大光源（毛灯泡或冷阴极管）提供效率合适的照明．在活动影片放映机中（$\phi\sim 5°$），要求有最大的亮度，用电灯丝是合适的．对于探照灯来说，要求只在一两度范围内有一强光束，那就只能用特别小而亮的光源，除非仪器的尺寸大到不适当．

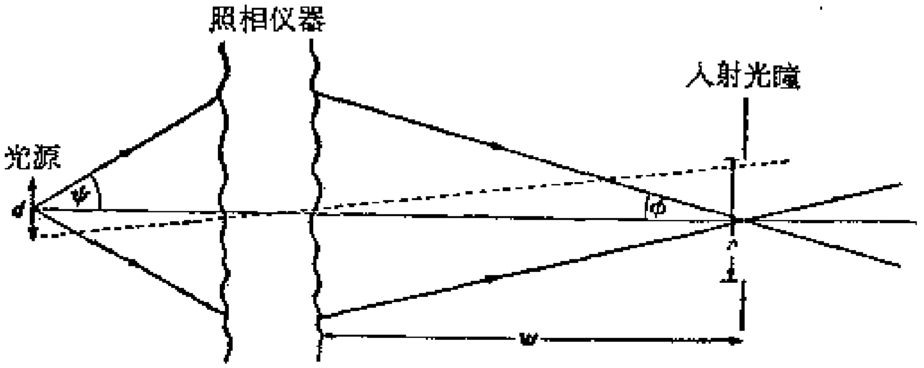


图 6.24　与照明仪器有关的符号

在许多仪器中，可利用一个合适的光源和一个聚光透镜来提供照明．聚光透镜必须充分消除象差，以便能利用光源很小这一特点．每一个聚光透镜可认为具有一个“焦球”，它表示能有效使用的光源最小尺寸．双平凸聚光透镜这一种设计[图 6.25(a)]，通

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

常足够好地给出满意的结果,有时则用三透镜组作为聚光透镜[图 6.25 (b)]. 在另外一些情况下,用单透镜大概就足够了.

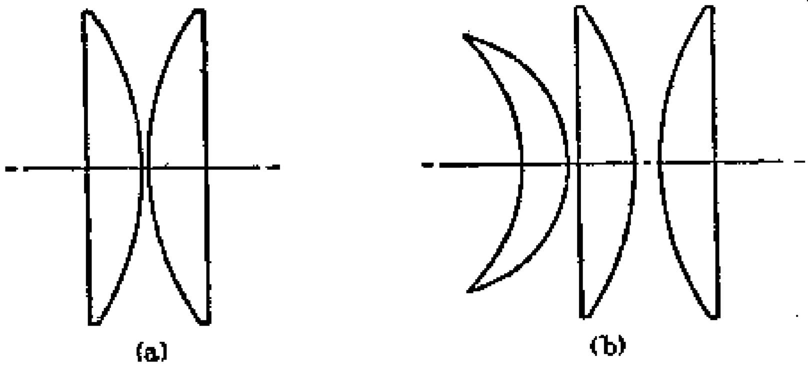


图 6.25 聚光透镜

显微镜所要求的照明,涉及更复杂的考虑,以后将概括地加以讨论(§ 8.6.3 和 § 10.5.2).

§ 6.6 显 微 镜

一个物件的表观大小是由它在网膜上的象的大小来确定的. 如果眼睛没有辅助装置, 则这一物体的表观大小取决于物件对眼睛的张角. 如 § 6.1 所述,对于正常眼,最小明视距离是 25 厘米左右. 这是观察某一物体细部时的最佳距离. 如果把一个会聚透镜放在眼睛的前面,物体可显得更靠近了;因为这个透镜将在比物距远的某一距离处形成一个放大虚象(见图 6.26), 眼睛看见的就是这一个虚象,而不是物体本身.

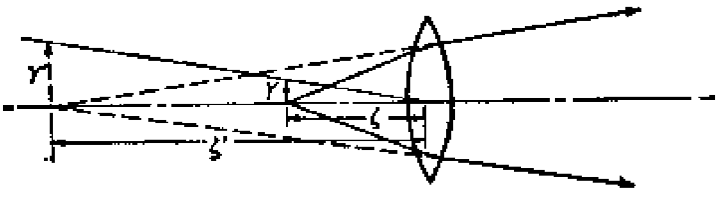


图 6.26 放大镜

观察靠近的物体所用的目视仪器的放大率, 定义为下述两个张角之比: 适当放置一物,使它的象位于眼前方标准距离(通常为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

25 厘米）处，这时此物的象对眼睛的张角作为分子；而当此物放在眼前方标准距离处直接用眼睛看时，此物的张角作为分母．这个定义与下述定义是等效的，即把放大率M定义为当象位于仪器出射光瞳前方标准距离时所具有的通常线性放大率．对于一个简单透镜，则有（见图 6.26）

$$M = \frac{Y'}{Y} = \frac{\zeta'}{\zeta}, \tag{1}$$

式中 $\zeta' = 25$ 厘米，是标准距离．利用 § 4.4(31) 式，

$$\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta'} = \frac{1}{|f|}, \tag{2}$$

因此

$$M = 1 + \frac{\zeta'}{|f|} = 1 + \frac{25}{|f|}, \tag{3}$$

在最后的表达式中，焦距 f 用厘米测量．因 f 通常小于 25 厘米，放大率可简单写成

$$M \sim \frac{25}{|f|}. \tag{4}$$

常用的放大镜有多种形式；在袖珍放大镜或钟表工人的目用放大镜中最常见的是简单双凸透镜或消色差双合透镜．通常也用一对分立的平凸透镜，与冉斯登目镜相类似［图 6.13(b)］．很明显，如果要求表观视场较大，并具有大的放大率，则物和眼之间的距离将太短而很不方便．为此，人们发展了**显微镜**光学系统（1610 年左右，伽利略首创），其中使用一个短焦距物镜和一个放大目镜，放大是通过两级来实现的（图 6.27）．

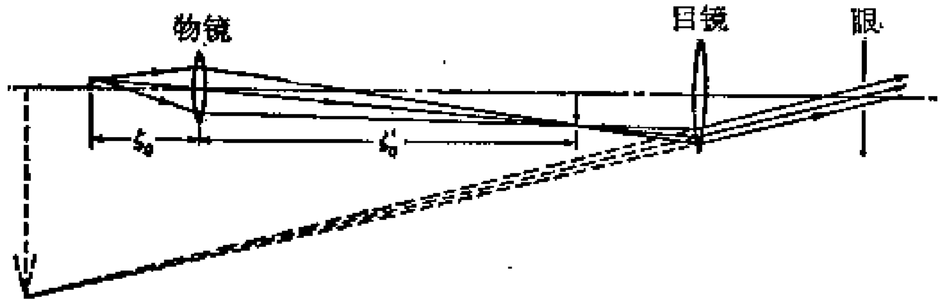


图 6.27　显微镜原理的图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

显微镜的物镜形成物的一个放大象，其位置正好适合于眼睛通过目镜来观察．物镜的放大率为$-\zeta_0'/\zeta_0$，其中ζ_0和ζ_0'是物镜的工作距离，二者满足(2)式．设f_1是用厘米测量的目镜焦距，根据(4)式，目镜的放大率可写成$25/|f_1|$．因此整个工作系统的放大率为

$$M=-\frac{25}{|f_1|}\frac{\zeta_0'}{\zeta_0},$$

负值表示象是倒立的．物镜和目镜的放大率通常分别写在显微镜的技术要求中．

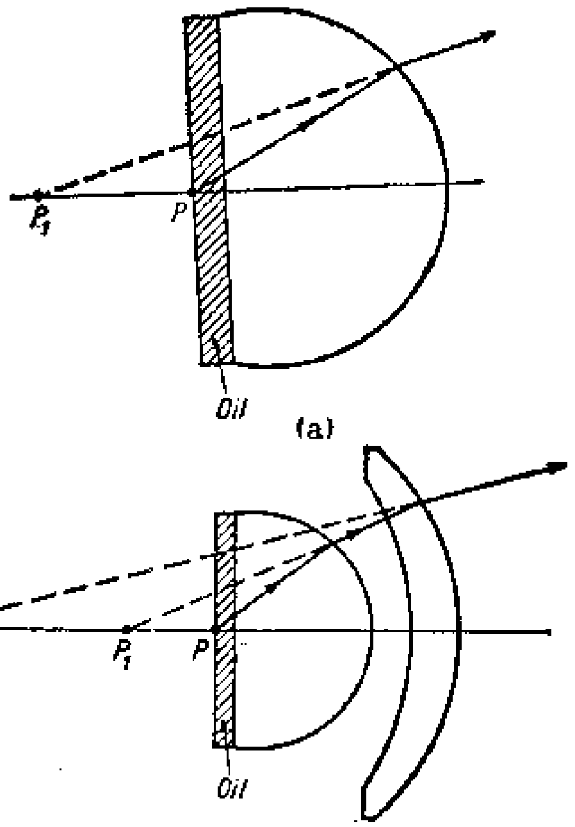
在显微镜物镜一般技术要求中，另一个重要的量是它的数值孔径（N. A.），在§4.8.2中已指出，它定义为乘积$n\sin\theta$，其中θ是物方的半个角孔径（即来自轴上一物点的光线被物镜接收而形成的光线锥角之半），n是物空间的媒质折射率．这个数值孔径不仅是物镜集光本领的量度，而且也是它的分辨本领（即它所能达到的细节分辨极限）的量度，后一点将在§8.6.3中讨论．在这里，我们将讨论如何获得最大的数值孔径．

显微镜物镜一般必须高度地校正球面象差和彗差以及色差，因为物镜应在尽可能大的孔径范围内接收光线．在低放大率（~10倍）的物镜中，可使用两个分立的胶合消色差透镜[图6.29(a)]，这一透镜组是已校正球面象差和彗差的．但这一透镜组不适宜作为高放大率（~50倍以上）的物镜．因此，要使用不同的透镜系统，其中利用了一个球面相应存在着不晕点这一事实（参看§4.2.3），方法如下：

物放在靠近平凸透镜的点P处[图6.28(a)]，介于物和透镜之间的空间内充满了油，它的折射率大约等于透镜折射率．设C是透镜弯曲部分的曲率中心，r是它的曲率半径，则与C相距r_1/n_1的一点将在与C相距n_1r_1处形成一个虚象P_1，这两点之间的成象是不晕的．在这种方法中，可使用较大的数值孔径，此时来自P点的光线角发散度在系统内部减小了，没有引入单色象差．但是引入了色差，它必须由系统其余部分加以补偿．

光线角发散度还可以利用一个弯月形会聚透镜来进一步减

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(b)

图 6.28 显微镜中,光线角发散度的减小

小[1][图 6.28(b)]. 弯月形透镜前表面的曲率中心在P_1处. 它的后表面曲率半径满足以下的条件: 即 P 是相对于它的一个不晕点. 经这一面折射的光线在另一个不晕点 P_2 处形成一个虚象. 进一步增加弯月形透镜的数目,可逐次产生虚象 P_3, P_4, $\cdots$, 后一个比前一个更远离 P 点,因此光线角发散度也一次比一次减小. 但是,很

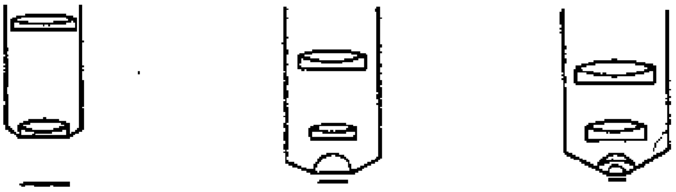


图 6.29 显微镜物镜

(a) 低放大率 (b) 中放大率 (c) 高放大率

1) 这个方法出自 G. B. Amici, *Ann. de chim. et phys.* (3), 12 (1844). 117.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

少使用多于两个的透镜，因为在多于两个透镜的情况下，不能适当地补偿色差。

刚才描述的油浸物镜与直径相同的干物镜相比，可容纳更宽的光线锥。因为在干物镜的情况下，从保护物体的盖玻片出射的光线锥进入到空气中，结果光线由于折射而向外弯开，所以角发散度就增大了；反之，在油浸物镜的情况下，光线从盖玻片出射时不折射。只有利用油浸物镜才能获得最大的数值孔径（～1.4）。

有些显微镜物镜还要求对包括近紫外波长（λ ～ 2500 埃）、可见波长和近红外波长的光均能工作。例如，当显微镜要连同摄谱仪和光度学仪器使用时，必须高级消色差。

伯奇（C. R. Burch）首次系统地研究了显微镜消色差物镜的设计[1]，他以 § 4.10 所述的施瓦茨察瓦德对两镜组成的不晕系统的解析结果作为起点。伯奇发现，如果数值孔径要超过 0.5，则至少必有一镜是非球面的。然而在一个反射系统中，不能获得象最好的常规油浸物镜所具有的那样大的数值孔径。典型的伯奇消色差物镜如图 6.30 所示。除了消色差以外，它的主要优点在于工作距离（物与物镜最近面间的距离）很长，可以有物镜焦距那样长。其缺点是第二面镜子所起的障碍作用；在使用球面的数值孔径较小的系统中，上述障碍可超过 45%。

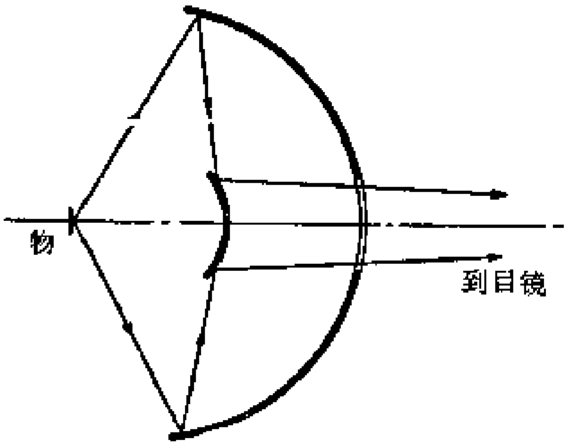


图 6.30 伯奇反射显微镜物镜

反射和折射结合的显微镜物镜也已作过研究。布沃思（A. Bouwers）[2] 制成了一个系统，其中在玻璃内镀银的同心球面上发生反

1) C. R. Burch, *Proc. Phys. Soc.*, **59** (1947), 41；同前，**59** (1947), 47. 第一篇文章也包括了对显微镜消色差物镜较早期研究的评述。
2) A. Bouwers, *Achievements in Optics* (Amsterdam, Elsevier, 1946).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

射，第二个面镜银取这样的分布，使实际障碍减小到20%．格雷(D. S. Grey)也描述过由两镜组成并具有低障碍比的物镜[1]．它使用一些光焦度相当大的石英和萤石元件，虽然在紫外和可见波长范围内要作适当的颜色校正，但实际上却取代了在别的情况下需对镜面作出的修琢．

放在显微镜下面观察的物体通常是不发光的，因此必须被照明．在大多数情况下，物体具有透明材料薄片的形状．因此，它是从背后照明的，或称为透射照明(transilluminated)．在小数值孔径(N. A. 达 0.25)的系统中，用一凹面镜把斜入射的天空漫射光反射到所观察的物体上即可，而在别的情况下需要用一个人造光源照明．要得到足够的光强，可使用附加透镜系统(聚光器)．有多种照明方法，其中两种将在第十章中介绍．

本节只涉及显微镜的一些基本原理．对显微镜中成象的充分论述，需要一些更精细的方法(见 § 8.6.3，§ 9.5 和 § 10.5)．

---

1) D. S. Grey, *Proceedings of the London Conference on Optical Instruments* (London, Chapman & Hall, 1951), 65.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第七章　干涉理论基础和干涉仪

§7.1 引　　言

在第三章中，我们从电磁理论的基本方程导出了光传播的几何模型，而且证明了，当采取某些近似时，一束光中的强度变化可以用光线管横截面的变化来描述．当两个或两个以上的光束叠加在一起时，一般，强度分布不能再用这样简单的方式来描述．例如，如果用适当的仪器把光源来的光分成两束，然后把它们叠加起来，我们就发现叠加区域中的强度在极大与极小之间逐点变化：极大超过二光束强度之和，极小可能是零．这种现象称为干涉．下面我们就要看到，严格单色光束的叠加总能产生干涉．然而实际物理光源产生的光决不会是严格单色的，而是如我们从微观理论所得知的，其振幅和位相都有极快的不规则涨落，以致眼睛和通常的物理探测仪器都跟不上．如果两束光来自同一光源，则这两束光中的涨落一般是相关的，完全相关的称为完全相干光束，部分相关的称为部分相干光束．在不同光源来的光束中，涨落是完全不相关的，这些光束就称为相互不相干的．当不同光源来的这种光束叠加在一起时，在通常实验条件下观察不到干涉，总强度处处都等于各光束强度之和．以后(第十章)我们将看到，二光束中涨落之间存在的“相关度”，决定了光束叠加产生的干涉效应的“清晰度”，反过来，相关度又通过干涉效应的清晰度表现出来．

从单个光束得到几个光束，有两种一般方法，人们根据这两种方法对产生干涉的装置进行分类，一种方法是，让光束通过并排放置的几个小孔．这种方法称为波阵面分割，它只适用于光源足够小的情况．另一种方法是采用一个或多个部分反射的表面，在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

各表面上，一部分光被反射，一部分光透射．这种方法称为振幅分割；它可用于扩展光源情况，因而效应的强度可比波阵面分割的大．无论在哪种情况，把两个光束叠加产生的效应（双光束干涉）和两个以上光束叠加产生的效应（多光束干涉）分开考虑是有方便之处的．

在历史上，干涉现象曾经是确定光的波动性的依据（见历史引言），现在，它们在例如光谱学和基本量度学中，具有重要的实际应用．在本章中，我们将主要讨论理想化情形，即完全单色光束之间的干涉．浅近的单色理论足以描述大多数干涉实验仪器的作用．必要时，我们将借助傅里叶定理把实际光源并非单色这一事实显明地考虑进来；但是，这一事实总是暗含在我们对初级扩展光源的看法当中的，我们认为这种光源是由大量互不相干的点光源组成．在整个这一章中，可能时，我们就假定各个光束都遵守几何光学定律，而忽略衍射效应．这个效应，正如我们在§3.14中简单说明的，是发生在焦点或阴影边界附近．这些效应我们将在第八章中就单色光情况进行详细讨论．至于一般情况，即多色部分相干光的干涉和衍射，则在第十章中加以研究．

§7.2 两个单色波的干涉

前面，光的强度 I 是这样定义的，它等于在单位时间内、在垂直于能流方向的单位面积上通过的能量的时间平均值．对于平面波，根据§1.4(8)、(9)式，

$$I = v\langle w\rangle = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle \boldsymbol{E}^2\rangle = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\langle \boldsymbol{H}^2\rangle, \tag{1}$$

而且，我们在第三章中曾经看到，对于更一般类型的波，这些关系式也仍然有效，至少可作为近似表示．由于我们将对同一媒质中的强度进行比较，所以我们可以把量 $\langle \boldsymbol{E}^2\rangle$ 取作强度的量度．我们将主要讨论单色场，因而可把电矢量 $\boldsymbol{E}$ 表成如下形式：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{R}\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}+\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}].\quad(2)$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是一复矢量,它的三个笛卡儿直角分量为

$$A_x=a_1(\boldsymbol{r})e^{ig_1(\boldsymbol{r})},\quad A_y=a_2(\boldsymbol{r})e^{ig_2(\boldsymbol{r})},\quad A_z=a_3(\boldsymbol{r})e^{ig_3(\boldsymbol{r})},\quad(3)$$

式中的 a_j 和 $g_j(j=1,2,3)$ 都是实函数．对于一个均匀平面波，振幅 a_j 是常数，而相函数 g_j 的形式为 $g(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\delta_j$，其中 $\boldsymbol{k}$ 是传播矢量，δ_j 是决定偏振态的相常数．

从(2)式，

$$\boldsymbol{E}^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}^2e^{-2i\omega t}+\boldsymbol{A}^{*2}e^{i2\omega t}+2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*),\quad(4)$$

对比周期 $T=2\pi/\omega$ 大得多的间隔取时间平均,由而得到

$$\langle\boldsymbol{E}^2\rangle=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}(|A_x|^2+|A_y|^2+|A_z|^2)$$

$$=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2).\quad(5)$$

现在假定，两个单色波 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 在某一点 P 叠加在一起． P 点的总电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2,\quad(6)$$

因而

$$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E}_1^2+\boldsymbol{E}_2^2+2\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2,\quad(7)$$

因此，P 点的总强度为

$$I=I_1+I_2+J_{12},\quad(8)$$

式中

$$I_1=\langle\boldsymbol{E}_1^2\rangle,\quad I_2=\langle\boldsymbol{E}_2^2\rangle\quad(9a)$$

是这两个波的强度,而

$$J_{12}=2\langle\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle\quad(9b)$$

是干涉项．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是这两个波的复振幅,其中

$$A_x=a_1e^{ig_1},\cdots\cdots,\quad B_x=b_1e^{ih_1},\cdots\cdots.\quad(10)$$

一般地讲，这两个波的(实)位相 g_j 和 h_j 是不同的，因为这些波可以由不同的道路传到 P；但是,如果实验条件使得各个对应分量的位相差都一样,同等于 δ，则

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 = g_3 - h_3 = \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}, \tag{11}$$

式中 $\Delta\mathscr{S}$ 是这两个波从它们的共同光源到 P 点的光程差，λ_0 是真空波长．用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示时，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2 &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{A}e^{-i\omega t}+\boldsymbol{A}^*e^{i\omega t})\cdot(\boldsymbol{B}e^{-i\omega t}+\boldsymbol{B}^*e^{i\omega t})\\ &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}e^{-2i\omega t}+\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}^*e^{2i\omega t}\\ &\quad+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}),\end{aligned} \tag{12}$$

因而

$$\begin{aligned}J_{12} = 2\langle\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B})\\ &= a_1b_1\cos(g_1-h_1)+a_2b_2\cos(g_2-h_2)+a_3b_3\cos(g_3-h_3)\\ &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\cos\delta.\end{aligned} \tag{13}$$

此式表明了干涉项对两个波的振幅分量和位相差的依赖关系．

在 (13) 式的推导中，我们并没有利用电磁理论，尤其是，没有利用振动是横向的这个事实．我们在历史引言中曾经提到菲涅耳和阿喇果当时发现偏振方向相互垂直的两个光束不发生干涉，他们由此断定，光振动必定是横向的．这一结论很容易由 (13) 式证明．假定这两个波沿 z 方向传播，并设第一个波的电矢量位于 xz 平面内，第二个波的电矢量位于 yz 平面内．这时，

$$a_2 = 0,\quad b_1 = 0,$$

因而，根据 (13) 式，干涉项

$$J_{12} = a_3b_3\cos\delta.$$

由于菲涅耳和阿喇果的观察证明了在这些情况下不发生干涉，所以我们必须断定 $a_3 = b_3 = 0$，也就是说，这两个波的电矢量必定垂直于 z 方向．因此，光波必定是横波，这与我们早先从电磁理论的推论一致．

现在设两个线偏振波沿 z 方向传播，但 $\boldsymbol{E}$ 矢量同沿 x 轴，看它们叠加产生的强度分布如何．这时，

$$a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以,利用(5)、(9a)和(13),

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}a_1^2, \quad J_2 = \frac{1}{2}b_1^2, \\ \text{并且} \qquad J_{12} &= a_1 b_1 \cos\delta = 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

因此,由(8)式,得出总强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta, \tag{15}$$

显然,

$$\left.\begin{aligned} &I_{极大} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \\ &当\ |\delta| = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \cdots; \end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

$$\left.\begin{aligned} &I_{极小} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}, \\ &当\ |\delta| = \pi,\ 3\pi,\ \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{16b}$$

在 $I_1 = I_2$ 的特殊情形下,(15)式化为

$$I = 2I_1(1 + \cos\delta) = 4I_1\cos^2\frac{\delta}{2}, \tag{17}$$

因而,强度在极大值 $I_{极大} = 4I_1$ 和极小值 $I_{极小} = 0$ 之间变化(图7.1).

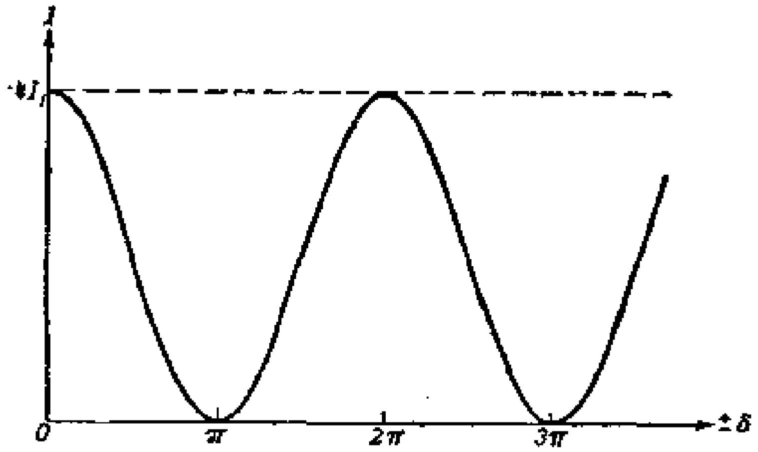


图 7.1 两个等强度光束的干涉;强度随位相差的变化

同样的公式也适用于自然非偏振光,因为后面我们将看到(§10.8.2),一束自然光可以表成为振动方向相互垂直的(比如说,沿 x 和 y)、两束不相干的线偏光的叠加. 因此,x 分量间的干涉和 y 分量间的干涉可以分开考虑,这时,把各个强度加起来就得

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

到总强度．因为各情况的 δ 相同，所以仍然得到上列公式．

§ 7.3　双光束干涉：波阵面分割

§ 7.3.1　杨氏实验

最早的光的干涉演示装置是杨氏提出的．光从单色点光源 S 发出，射到屏 $\mathscr{A}$ 的两个针孔 S_1 和 S_2 上；这两个孔靠得很近，并且与 S 等距离（图 7.2），因而它们就成为两个同相的次级单色点光源[1]，从它们出来的光束在远离屏 $\mathscr{A}$ 的区域叠加在一起，形成干涉图样．

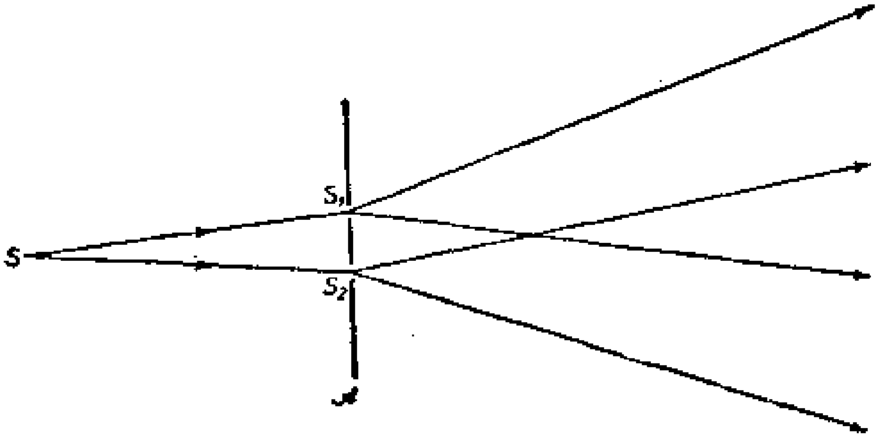


图 7.2　杨氏实验

设想我们观察 xOy 平面上的干涉图样，这平面垂直于 S_1S_2 的垂直等分线 CO，而 x 轴平行于 S_1S_2（图 7.3）．设 d 为两个针孔的间隔，a 为两个针孔连线到观察面的距离．对于观察面上某一点 $P(x, y)$：

$$s_1 = S_1P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}, \tag{1a}$$

$$s_2 = S_2P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2}, \tag{1b}$$

1）这些次级光源具有方向性，这将在衍射理论（第八章）中详细讨论．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

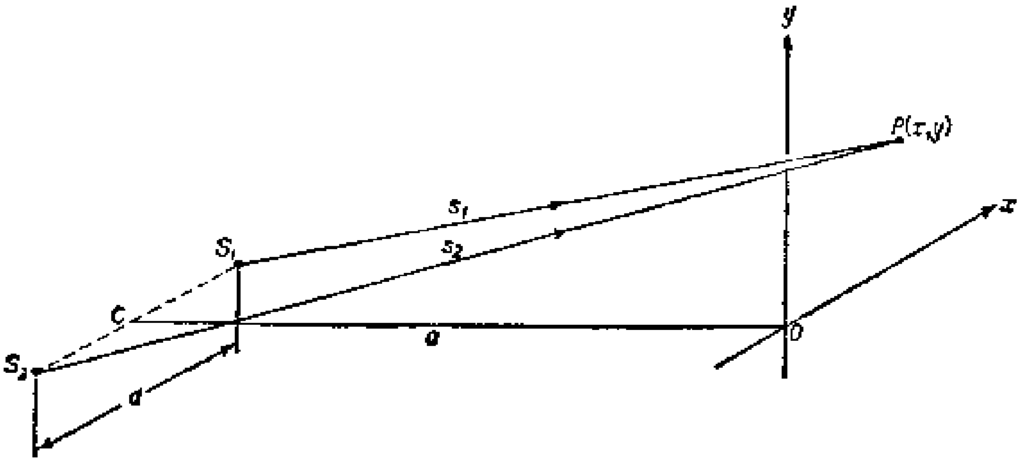


图 7.3　两个点光源产生干涉的几何图示

所以

$$s_2^2 - s_1^2 = 2xd. \tag{2}$$

因此，从 S_2 和 S_1 到达 P 点的光的几何程差可以表成如下形式：

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_2 + s_1}. \tag{3}$$

实际上，由于可见光的波长很短，只有当 d 比 a 小得多时，图样才便于观察．这时，如果 x 和 y 也比 a 小得多，则

$$s_2 + s_1 \sim 2a, \tag{4}$$

所以，略去 d/a、x/a、y/a 的二次项和高次项，得到

$$\Delta s = \frac{xd}{a}. \tag{5}$$

设 n 是实验所在媒质（假定是均匀的）的折射率，则从 S_2 和 S_1 到 P 点的光程差为

$$\Delta\mathscr{S} = n\Delta s = \frac{nxd}{a}, \tag{6}$$

相应的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{nxd}{a}. \tag{7}$$

由于角 S_1PS_2 很小，我们可以认为从 S_1 和 S_2 来的光波在 P 点沿同方向传播，所以强度可以由 §7.2(15) 式来计算；根据 (7) 式

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

和 § 7.2(16) 式,当

$$x=\frac{ma\lambda_0}{nd},\quad |m|=0,1,2,\cdots\cdots \tag{8a}$$

时,强度为极大,而当

$$x=\frac{ma\lambda_0}{nd},\quad |m|=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots\cdots \tag{8b}$$

时,强度为极小. 这样,紧靠 O 点附近的干涉图样是由一系列亮带和暗带组成,称为干涉条纹(图 7.4),它们是等距的,其走向与两光源连线 S_1S_2 相垂直. 相邻亮带的间隔为 $a\lambda_0/nd$. 在干涉图样的任意一点上,下式所定义的数 m 称为该点的干涉序:

$$m=\frac{\delta}{2\pi}=\frac{\Delta\mathscr{S}}{\lambda_0}. \tag{9}$$

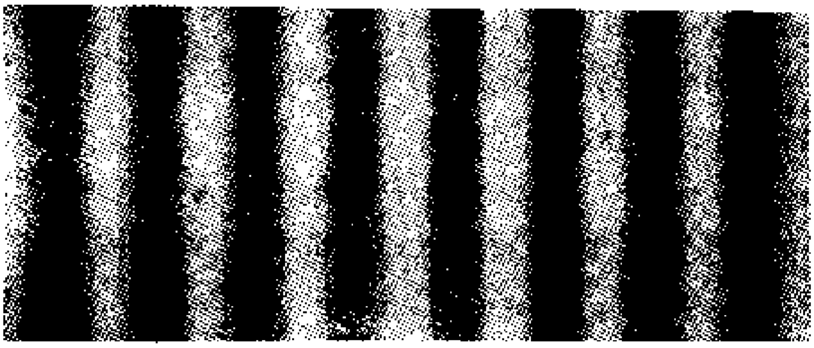


图 7.4 杨氏条纹

这样,亮条纹对应于整数序.

§ 7.3.2 菲涅耳双面镜和类似装置

杨氏实验,作为建立光的波动学说的决定性一步,具有重要的历史意义. 它也提供了一种用非常简单的仪器测量单色光波长的方法,虽然精度很低;所需测量的只是 d, a 和条纹间距,它在空气 $(n\sim 1)$ 中等于 $a\lambda_0/d$. 然而,这里从初级光源 S 到叠加区域,光的路径因有遮断不能直通,几何光学不能适用. 这对产生干涉效应并非必要,为了证明此点,人们随后设计了若干产生两个相干光源的其它方法.

图 7.5 的装置是一个例子,它叫做菲涅耳双面镜.从点光源 S

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

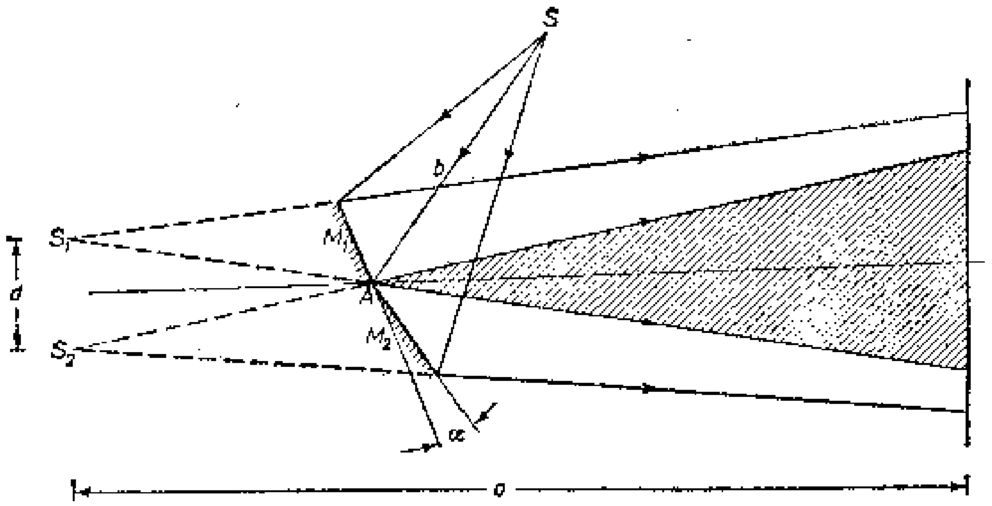


图 7.5 菲涅耳双面镜

来的光，入射到两个平面镜 M_1 和 M_2 上，它们相互倾成一个很小的角度；光在这两个镜面上反射后，产生 S 的两个虚象 S_1 和 S_2，它们就成为两个相干光源．显然，平面 SS_1S_2 垂直于二镜面的交线，与之相交于 A 点．设 $SA=b$，则

$$S_1A=S_2A=b,$$

所以，S_1S_2 的垂直平分线也通过 A 点．S_1 和 S_2 的间隔是

$$d=2b\sin\alpha, \tag{10}$$

式中 α 是两个镜面的夹角．

比菲涅耳双面镜更加简单的装置是**洛埃镜**（图 7.6）．点光源 S_1 放在离平面镜 M 相当远并且接近镜平面的地方，使得光在几乎是掠入射下被反射．相干光源是初级光源 S_1 和它在镜中的虚象 S_2．这时，S_1S_2 的垂直平分线位于镜面平面内．

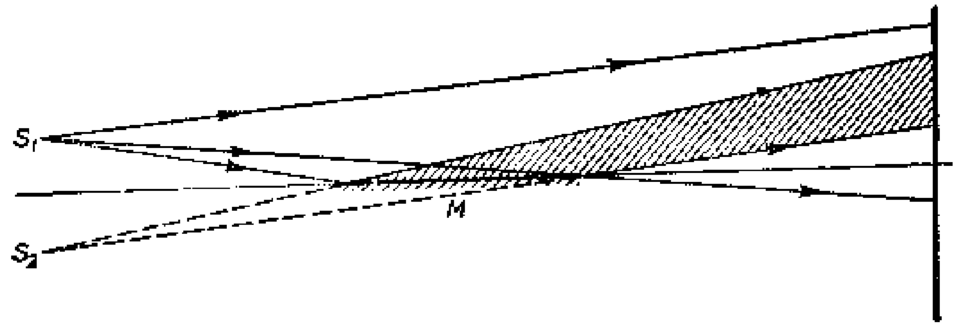


图 7.6 洛埃镜

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

还可以提一下另外两种类似的装置．一种叫非涅耳双棱镜（图 7.7），它由二个相同的棱镜组成，棱镜的折射角很小，底贴着底，并且折射棱互相平行．从点光源 S 来的一束光，经折射后被分成为两束，相互交叠在一起．这两束折射光不是严格无象散的，但由于折射角和所用光束的角孔径都很小，所以我们可以忽略这一像差，而认为这些棱镜形成 S 的两个虚象 S_1 和 S_2．另一种叫比累(Billet)剖开透镜（图 7.8），它由一个凸透镜沿直径剖成两半，并垂直于光轴拉开一点距离而构成．于是，从单个点光源 S 产生两个实象 S_1 和 S_2.

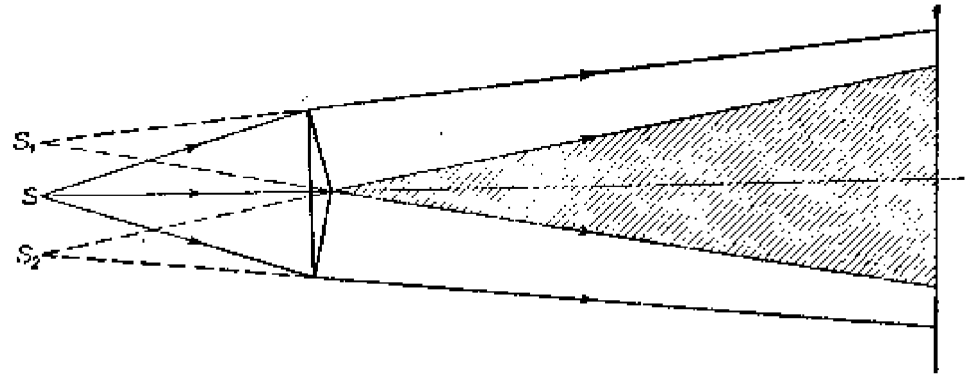


图 7.7　非涅耳双棱镜

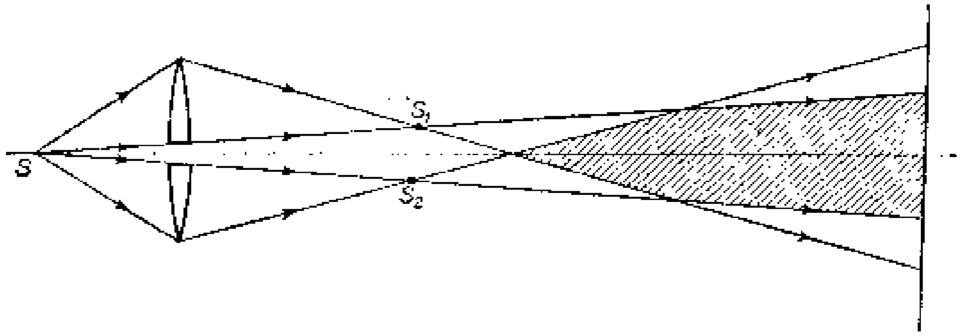


图 7.8　比累剖开透镜

在所有这些采用初级点光源的装置中，在光源 S_1 和 S_2 的发散光束的公共区域（图 7.5 到 7.8 的斜线区域）内，在单色光下，任何平面上都可以看到有干涉条纹．这种条纹称为非定域条纹．同前，用 s_1 和 s_2 表示距离 S_1P 和 S_2P，则从 S_2 和 S_1 到叠加地区，二波位相差为常数的那些点的轨迹是一个曲面，由下式确定：

$$s_2 - s_1 = 常数. \qquad (11)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，合成强度的极大与极小组成一个以 S_1S_2 为转轴，以 S_1 和 S_2 为公焦点的回转双曲面族．在与 S_1S_2 的垂直平分线 CO 正交的平面上，条纹是这些双曲面的截线，因而它们是双曲线；但是，正如我们在 § 7.3.1 中所看到的，在 O 点附近，这些条纹近似为等距直线，走向与 S_1S_2 垂直．在垂直于 S_1S_2 的平面内，双曲面的截线是同心圆，但是，这种条纹用上述各装置不能观察到．然而，它们能在**梅斯林实验**中观察到．梅斯林（G. Meslin）把比累剖开透镜的两半不是沿横向而是沿光轴拉开一个距离（图 7.9）．这样一来，光源 S_1 和 S_2 就位于光轴上不同的两点，相应光束在二点之间的一个区域相交叠．在这个区域可观察到条纹，在垂直 S_1S_2 的各个平面上，条纹是同心圆，圆心在光轴上；只能看到半圆部分，因为二光束的公共区域以通过光轴的一个平面为界面．

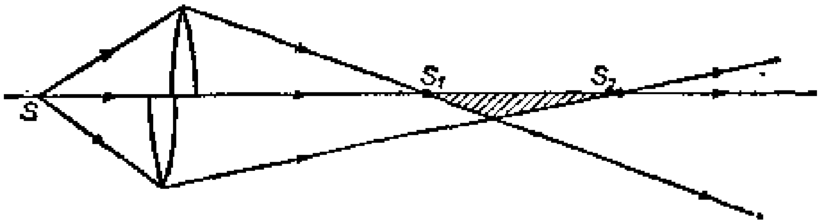


图 7.9　梅斯林实验

§ 7.3.3　准单色光条纹和白光条纹

以上我们假定初级点光源是单色的．现在我们去掉这个限制，而假定例如在菲涅耳双面镜（图 7.5）实验中使用多色光的点光源 S。后面我们将看到（§ 7.5.8），这种光可以用分布在某一频率范围的互不相干的许多单色成分的组合来表示．每个成分各产生一个上述的干涉图样，各点的总强度是这些单色图样的强度之和．我们假定这些成分占据平均波长 λ_0 附近 $\Delta\lambda_0$ 的一个波长范围．所有单色图样的中央极大（距 S_1 和 S_2 路程相等）都通过 O 点互相重合，但在其它地方，各图样要相互错开，因为它们的尺度正比于波长；在观察面内，m 序各极大将排列开一段距离 Δx，由（8），

$$\Delta x = \frac{|m|a}{nd}\Delta\lambda_0. \qquad (12)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

首先我们考虑波长范围 $\Delta\lambda_0$ 比平均波长 $\bar{\lambda}_0$ 小得多的情形，即

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\bar{\lambda}_0} \ll 1. \tag{13}$$

满足这条件的光我们称为准单色光[1].

在视场范围内，如果 m 满足下列条件

$$|m| \ll \frac{\bar{\lambda}_0}{\Delta\lambda_0}, \tag{14}$$

或者根据(9)式，如果

$$|\Delta\mathscr{S}| \ll \frac{\bar{\lambda}_0^2}{\Delta\lambda_0}, \tag{15}$$

则 Δx 与相邻极大的平均间隔 $a\bar{\lambda}_0/nd$ 相比即可忽略，因而可以认为各成分的图样是重合的. 这时，观察面上条纹的情景同波长为 $\bar{\lambda}_0$ 的严格单色光源所给出的一样.

如果光是准单色的，但不满足(15)式，则条纹没有单色光条纹那样清晰，总强度取决于各单色成分的强度分布情况.

如果光不是准单色的，即如果不满足(13)式，则观察到的现象还依赖于所用辐射探测器的光谱响应度. 一个实用上很重要的情形是，光为白色，观察为目视；这时有效波长范围从大约 4000 埃伸展到大约 7000 埃，因而 $\Delta\lambda_0/\bar{\lambda}_0$ 约为1/2. 这时，在零级单色条纹位置上有一个白色的中央条纹，两边各有几个彩色的极大和极小，再往外，眼睛看起来是均匀的白色照明. 在离图样中央某距离处，这光不是正常的白光. 例如，在距离中央条纹 x 处，按(8)式，对下列 λ_0 有强度极大：

$$\lambda_0 = \frac{nd}{a}\frac{x}{m}, \quad |m| = 1, 2, 3, \cdots, \tag{16a}$$

而对下列波长有强度极小：

$$\lambda_0 = \frac{nd}{a}\frac{x}{m}, \quad |m| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots. \tag{16b}$$

---

1) 因为 $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$，所以(13)式也可以表成如下形式：

$$\frac{\Delta\omega_0}{\bar{\omega}_0} \ll 1,$$

式中 $\Delta\omega_0$ 是有效频率范围，$\bar{\omega}_0$ 是平均频率.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此如果让这光进入一分光镜，并令分光镜狭缝平行于单色条纹的方向，那末对于进入的光，x 是常数，光谱上就横排着一条条平行于狭缝的亮带和暗带——这是所谓沟槽光谱的一个例子。这些带在光谱波数 $(1/\lambda_0)$ 标尺上是等间隔的，相邻亮带的间隔为 $a/nd|x|$.

以后我们将看到，白光条纹图样在干涉量度学中是很有用的，因为在一些特殊情形下靠它能够认出对应程差为零的单色条纹。前面我们曾把菲涅耳双面镜所产生的中央条纹归入强度极大；菲涅耳双棱镜、比累剖开透镜以及杨氏实验的情况也是如此。然而，采用洛埃镜时，镜平面上的条纹则是强度极小，当用白光光源时，它看起来是黑的。这是因为波从镜面反射时，不管波长如何，位相都要改变 π（反射相变，见 §1.5.2）。在梅斯林实验中，图样中央也是强度极小，以后我们将看到（§8.8.4），这是由于光波在通过焦点时要经受一个 π 的相变的缘故。

§7.3.4 使用狭缝光源；条纹的可见度

前面的讨论用的都是一个初级点光源，但是，由于实际光源都具有一定的大小，因而我们必须考虑光源的大小对条纹的影响。对实际物理光源的描述要涉及微观理论，这已超出了本书的范围。但是，为了我们的目的，可以把情况理想化，把光源看作是由大量互不相干的点光源所组成。于是，波场中任何点的强度是各个点光源产生的强度之和。

在我们前面所描述的各个装置（梅斯林实验除外）中，条纹都垂直于包含初级点光源 S 与派生光源 S_1 和 S_2 的那个平面，由此可知，如果 S 垂直于这一平面移动，则条纹只平行于它们的长度移动。因此，可以把一个线光源——或实际上一个足够窄的狭缝光源——放在这一方向而不损害条纹的清晰度，至少在条纹弯曲可以忽略时是如此。同样，在杨氏实验中，针孔也可以用平行于狭缝光源的窄缝来代替。用这种方法能增加图样的强度，虽然同时也给实验带来一个困难，要使光源取向正确。

要图样中得到更多的光，就必须增加光源狭缝的宽度，但是这

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

样一来条纹就变得不太清晰了．拿菲涅耳双面镜来说，如果光源 S 在平面 SS_1S_2 内与 SA 成直角地位移到 S'（图 7.10），则次级光源 S_1、S_2 位移到 S_1'、S_2'，如果不考虑二次项，则它们的间隔 d 不变，因而条纹间距也不变；但是，中央条纹要从 O 位移到 O'，因为它位于 $S_1'S_2'$ 的垂直平分线上，这线还通过 A 点．设 $SS'=\zeta$（在图 7.10 中取为正），

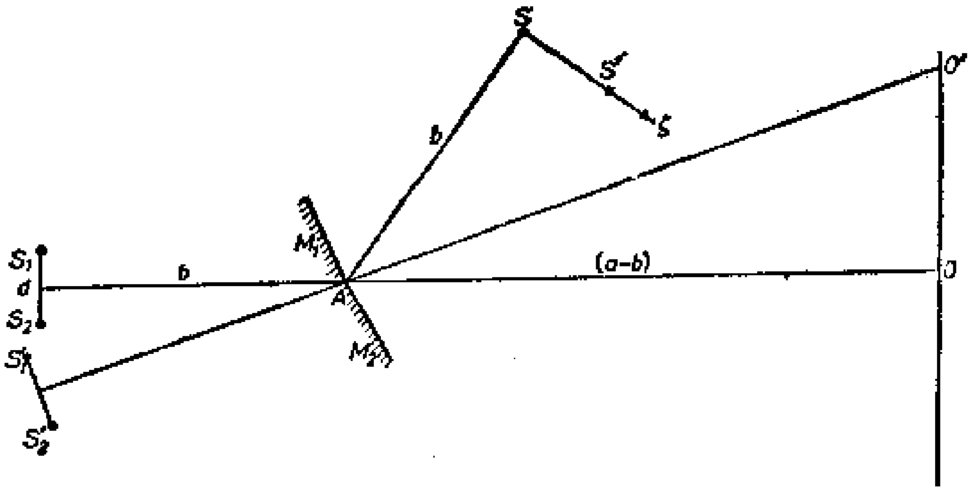


图 7.10　采用狭缝光源时菲涅耳双面镜图示

则 $S_1S_1'=S_2S_2'=\zeta$，所以

$$OO'=\frac{(a-b)\zeta}{b}. \tag{17}$$

因此，在 P 点，如果从光源 S 来的光的光程差为 $\Delta\mathscr{S}$，则从光源 S' 来的光的光程差按（6）式是

$$\Delta\mathscr{S}'=\Delta\mathscr{S}-\frac{nd}{a}OO'=\Delta\mathscr{S}-D\zeta, \tag{18}$$

式中

$$D=\frac{(a-b)nd}{ab}. \tag{19}$$

相应的位相差是

$$\delta(\zeta,\Delta\mathscr{S})=\frac{2\pi}{\lambda_0}(\Delta\mathscr{S}-D\zeta). \tag{20}$$

现在设光源是一个中心位于 S、宽度为 e 的狭缝．我们假定

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

构成这狭缝光源的点源数目如此之多，以致我们可以把它当作实际连续分布来处理，并且设想把它分成许多垂直于平面 SS_1S_2 的元条带．设 $id\zeta$ 是一个元条带的光被一个镜面反射时在 P 点产生的强度，则通过 S' 的那个元条带在 P 点产生的干涉强度按 §7.2(17) 式为

$$i(\zeta,\ \Delta\mathscr{S})d\zeta = 2i(1+\cos\delta)d\zeta,$$

因而 P 点的总强度由下式给出：

$$I(e,\Delta\mathscr{S}) = 2i_1\int_{-e/2}^{e/2}(1+\cos\delta)d\zeta. \tag{21}$$

将(20)式代入(21)式，计算出积分，得到

$$I(e,\ \Delta\mathscr{S})=2I_1\left\{1+\left(\frac{\sin\frac{\pi De}{\lambda_0}}{\frac{\pi De}{\lambda_0}}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}\right)\right\}, \tag{22}$$

式中 $I_1 = i_1e$.

仿照迈克耳孙，我们取下式所定义的可见度 $\mathscr{V}$ 作为 P 点条纹清晰度的量度：

$$\mathscr{V} = \frac{I_{极大}-I_{极小}}{I_{极大}+I_{极小}}, \tag{23}$$

式中 $I_{极大}$ 和 $I_{极小}$ 是紧靠 P 点的极大强度和极小强度．显然，当 $I_{极小}=0$ 时，$\mathscr{V}$ 有极大值 1，两个相同的单色点光源所产生的条纹就属于这种情形，而当 $I_{极大}=I_{极小}$ 时，$\mathscr{V}$ 下降为零，条纹消失．在本例情况下，

$$I_{极大} = 2I_1\left(1+\frac{\left|\sin\frac{\pi De}{\lambda_0}\right|}{\frac{\pi De}{\lambda_0}}\right),\quad I_{极小} = 2I_1\left(1-\frac{\left|\sin\frac{\pi De}{\lambda_0}\right|}{\frac{\pi De}{\lambda_0}}\right), \tag{24}$$

所以

$$\mathscr{V} = \frac{\left|\sin\frac{\pi De}{\lambda_0}\right|}{\frac{\pi De}{\lambda_0}}. \tag{25}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

图 7.11 给出了可见度 $\mathscr{V}$ ((25)式)随光源宽度 e 的变化曲线. 我们看到,当 e 不超过 $\lambda_0/4D$ 时,或由(20)式,当 P 点对应光源各元条带的位相差范围不超过 $\pi/2$ 时,可见度比约 0.9 为大. 如果我们取这个条件来定义可产生良好条纹的最大缝宽(这带有点任意性),则由(19)式,有 $e \leqslant \lambda_0 ab/4(a-b)nd$, 或利用(10)式,

$$e \leqslant \frac{\lambda_0 a}{8(a-b)n\sin\alpha}, \tag{26}$$

同前, 式中 α 是两个镜面的夹角. 显然, 当 $(a-b)$ 减小时, 即当观察面移向镜面连接处时, e 的容许值增加. 例如,取典型值,令 $\alpha=2$ 弧分, $a=120$ 厘米, $b=100$ 厘米, $\lambda_0=5500$ 埃, $n=1$, 则 $e \leqslant 0.7$ 毫米; 按(8)和(9)式,亮条纹的间距是 $a\lambda_0/2bn\sin\alpha$; 在本例情况下,它等于 0.57 毫米.

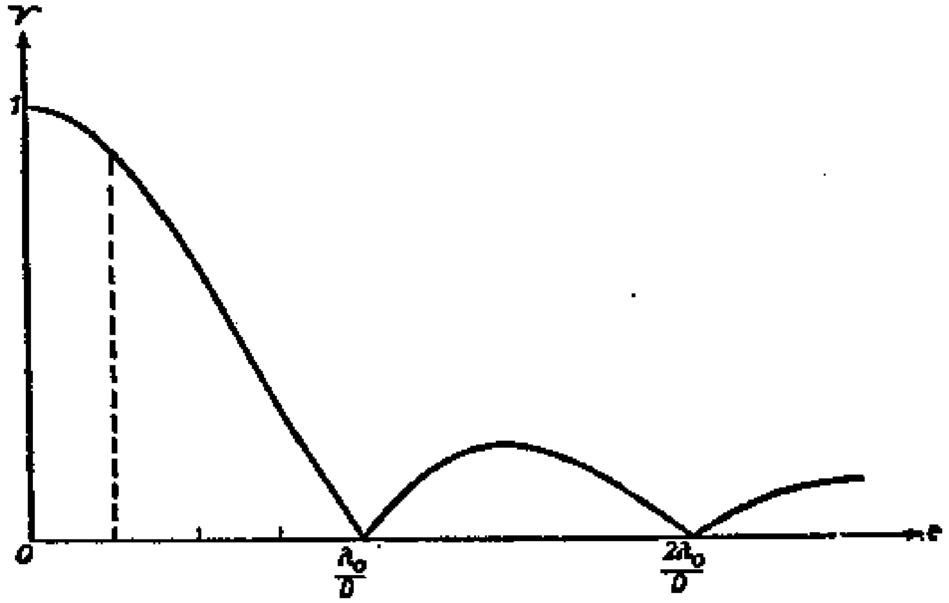


图 7.11 条纹可见度随光源狭缝宽度的变化(非涅耳双面镜)

同样考虑适用于非涅耳双棱镜、比累剖开透镜以及杨氏实验的光源宽度. 对于洛埃镜,情况则不同,因为这里光源 S 垂直于镜平面移动时,它的象向反方向移动. 因此,当采用有限宽度的狭缝光源时,各个元图样的中央极小虽然重合在镜平面上,但它们的条纹间距不同,因而远离镜平面时,条纹可见度下降.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§7.3.5 应用于测量光程差：瑞利干涉仪

我们需要提前说一下衍射理论的一个结果，即在杨氏实验中，次级光源 S_1 和 S_2 所发的光在初级光源 S 的几何光线方向上强度最大．在杨氏实验中，这些光线在 S_1 和 S_2 后边是发散的，但是如果在这两个孔前面放上一个透镜（图 7.12），则可以使这些光线会聚到透镜的 S 共轭点 O．这样 O 点附近干涉图样的强度就增加了，而且当加大 S_1、S_2 两孔距离时，还能观察到条纹．相邻亮条纹的间隔仍然是 $a\lambda_0/nd$，而且按照等光程原理，如果透镜对 S 是非象散的，则零级条纹在 O 点．如果透镜对 S 不是非象散的，则零级条纹将偏离 O 点，偏离之量取决于从 S 通过两孔到 O 的光程差；当光程差是 $\Delta\mathscr{S}$ 时，偏离之量等于相邻亮条纹间隔乘以 Δm，其中

$$\Delta m = \frac{\Delta\mathscr{S}}{\lambda_0}. \tag{27}$$

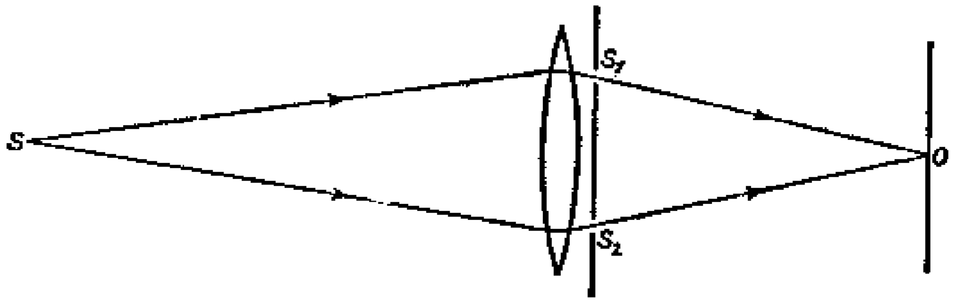


图 7.12 在杨氏装置中使用一个透镜的图示

显然，正象迈克耳孙所作的那样[1]，这装置可用作透镜性能的定量检验．如果让一个孔固定在这个透镜中心上方，而令另一个孔处于不同径向位置来测量 Δm，即可知道从 S 来的波阵面在通过透镜后偏离球面的情况（波象差）．

类此，如果把一块厚度为 l 和折射率为 n' 的透明材料板放在 S_2 的光路上，则光程 $[SS_2O]$ 增加 $(n'-n)l$，因而 O 点的干涉序将改变 Δm，

---

1) A. A. Michelson, *Astrophys. J.*, 47 (1918), 283.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\Delta m = \frac{(n' - n)l}{\lambda_0}. \tag{28}$$

从Δm, l 和 λ_0 的测量可以测定这板与周围媒质的折射率差($n' - n$)．这种装置构成**瑞利干涉仪**[1]的基础，瑞利干涉仪是一种用于精确测定气体折射率的仪器，它的现代样式如图 7.13 中的正面图和侧面图所示．从狭缝光源 S 发出的光，经过透镜 L_1 准直后，落到平行于 S 的狭缝孔径 S_1 和 S_2 上；从 S_1 和 S_2 出来的几何光线再平行地穿过分开的气室 T_1 和 T_2，然后由透镜 L_2 又会聚到它的焦平面上，在此形成平行于狭缝的干涉条纹[2]． S_1 和 S_2 要分得很开以便能容下气室，所以条纹很密，需要高倍放大方能观测；而且，对光源狭缝 S 的宽度限制也就相应地严格起来，所以图样中的光量很小．因为只有在垂直于条纹的方向上需要放大，所以，用细玻璃棒作成一个柱面目镜，使它与条纹平行，效果最好．图样用这方法观察时，看起来比用球面目镜亮得多，但是，使用柱面目镜还有一个更重要的优点． 它能提供一个固定的副条纹系统作为基准标记，其间隔与主条纹系统的相同，但是是由从气室下面过来的 S_1 和 S_2

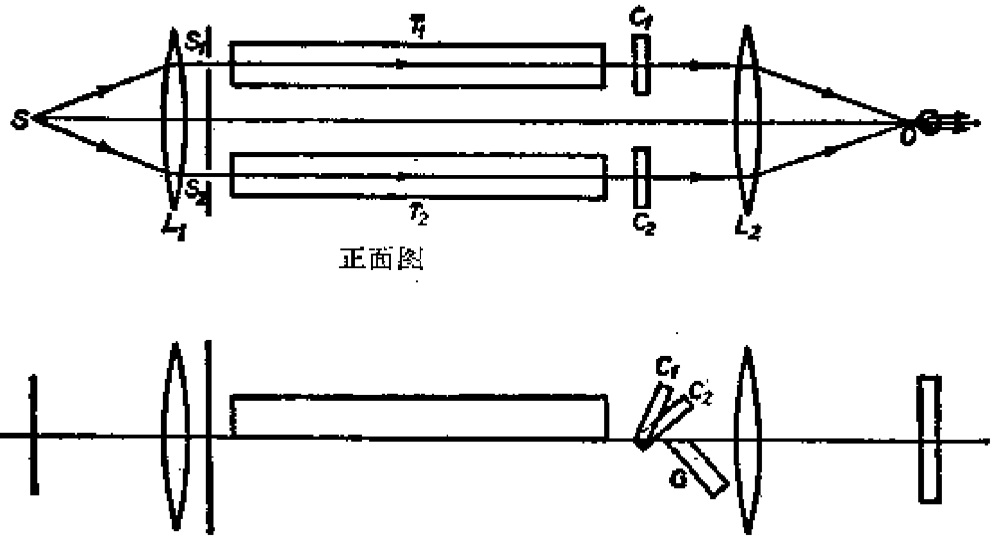


图 7.13 瑞利干涉仪

1) Lord Rayleigh, *Proc. Roy. Soc.*, **59** (1896), 198.
F. Haber and F. Löwe, *Zeits f. angew Chem.*, **23** (1910), 1393.

2) L_2 焦平面上的严格强度分布可由夫琅和费衍射理论(§8.5)得到．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的光所形成. 转动玻璃板 G, 使基准系统垂直移动, 直到它的上边缘与主系统的下边缘衔接, 中间那一条很锐的分隔线是通过 L_2 观察到的 G 的边缘. 这样, T_1 和 T_2 中光程变化所引起的主条纹系统的位移, 靠眼睛的游标视锐度来检测. 眼睛的这个视锐度很高, 可检测出小到 1/40 序的位移. 这时, 光学系统的偶然位移也变得无关重要, 只要两个条纹系统所受的影响程度相同.

为了方便,工业上用的瑞利干涉仪并不采用条纹计数,而是用补偿光程差. 为此,让从气室出来的光通过两块薄玻璃板,其中一块 C_1 是固定的,另一块 C_2 可绕水平轴转动,以使 S_2 来光的光程可重复改变. 先用单色光校准补偿器,定出其相当于主系统位移 1 序的平均转角. 然后用两个条纹系统作为光程 $[SS_1O]$ 和 $[SS_2O]$ 相等的零位指示标. 在正常使用时,先把两个气室抽空,并采用白光用补偿器将主系统和基准系统的中央条纹调到大致相重. 然后采用单色光将二零序条纹调到完全重合. 接着, 将待测气体充入某一气室,再先采用白光,后采用单色光,调节补偿器使零序条纹相重[1].

---

1) 因为从 S_1 和 S_2 到主图样,两个光程途经不同色散的媒质,所以,和 §7.3.3 中讨论的简单情况不同,这里不同波长的零序一般不重合,因而当采用白光时, 没有完全白色的条纹. 颜色带得最少的条纹满足条件 $\partial m/\partial\lambda_0=0$, 它发生在可见光谱中某一平均波长 $\lambda=\bar{\lambda}_0$ 处,这一波长与眼睛的波长响应度有关. 仿照透镜上使用的"消色差"一词,人们称此条纹为**消色差条纹**. 设补偿器所引进的光程差为 $\Delta\mathscr{g}$, 则 O 点的干涉序为

$$m=[(n'-1)l+\Delta\mathscr{g}]\frac{1}{\lambda_0},$$

所以

$$\frac{\partial m}{\partial\lambda_0}=-\left(n'-1-\lambda_0\frac{\partial n'}{\partial\lambda_0}\right)\frac{l}{\lambda_0^2}-\left(\Delta\mathscr{g}-\lambda_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}(\Delta\mathscr{g})\right)\frac{1}{\lambda_0^2}.$$

因此要消色差条纹位于 O 点,须

$$\left(\Delta\mathscr{g}-\lambda_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}(\Delta\mathscr{g})\right)_{\bar{\lambda}_0}=-l\left(n'-1-\lambda_0\frac{\partial n'}{\partial\lambda_0}\right)_{\bar{\lambda}_0}.$$

当补偿器在此位置时,单色图样的零序一般不在 O 点,因为这要求

$$(\Delta\mathscr{g})_{\bar{\lambda}_0}=-l(n'-1)_{\bar{\lambda}_0}.$$

这效应可大到使零序单色条纹的认证不能确定, 这时就须要在低气压下或采用短的气室进行预测.

还应注意,只有当图样中满足 $(\partial m/\partial\lambda_0)_{\bar{\lambda}_0}=0$ 的那一点处, 对可见光谱各波长的 m 的范围足够小时, 消色差条纹才可辨认. 由于这个原因, 在那些要求显示白光条纹的干涉仪中, 要尽可能把相干涉的波安排在同色散的媒质中并具有相等的光程.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

补偿器前后两次位置读数之差用其校准值折算后，就是主条纹系统因气室充气所产生的序位移 Δm、因而从(28)式即可得到气体的折射率 n'：

$$(n'-1)=\frac{\lambda_0}{l}\Delta m, \tag{29}$$

式中 l 是气室长度. 取典型值，设 $l=100$ 厘米， $\lambda_0=5500$ 埃，位置读数可确定到 1/40 序，则可检测出大约 10^{-8} 的 $(n'-1)$ 的变化[1].

原则上，加长 l 可获得更高的灵敏度，但是，实际上这受温度控制困难的限制. 由于同样原因，测量液体折射率差的这种仪器只使用短的样品室. 此外，由于能加以补偿的光程差是有限的，所以，如果两个样品室中折射率相差很大，则样品室的长度必须按比例缩短.

§7.3.6 应用于测量光源的角幅度：迈克耳孙测星干涉仪

我们已经看到(§7.3.4)，在杨氏实验中，条纹的清晰度要受到光源沿孔 S_1、S_2 连线方向扩展的影响. 这效应是小光源角幅度测量方法的基础.

假定用一个望远物镜加上一个双孔光阑来观察两个远距离的准单色点光源 S 和 S'，光阑的两个小孔 S_1, S_2 形状大小相同，间距为 d，点源 S, S' 的有效波长为 λ_0，在二孔连线方向上的角间距为 θ(图 7.14). S 和 S' 在焦平面上各产生一个干涉图样，条纹间距相同，而如果 S 和 S' 是非相干光源，则每一点两个图样的强度相加就构成组合图样. 设 N 是从 S_1 到 SS_2 的垂足，则 S_1N 位于从 S 来的一个平面波阵面内，所以，对于从 S 来的光，焦平面上 P 点处的光程差

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{S}&=[SS_2P]-[SS_1P]\\&=[NS_2]+[S_2P]-[S_1P].\end{aligned} \tag{30}$$

---

1) 对于普通气体，$(n'-1)$ 值的数量级为 10^{-4}(参看 29 页表 1).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

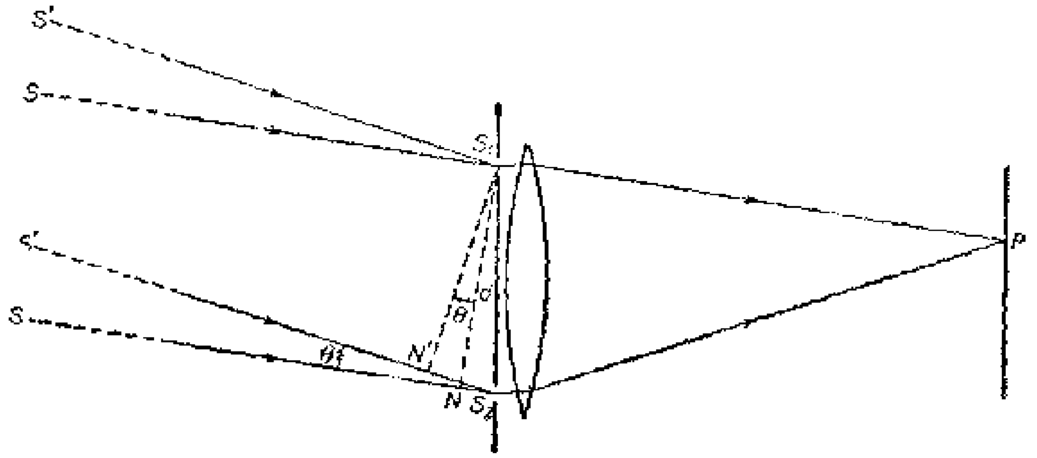


图 7.14　用加了双孔光阑的望远物镜观察两个远距离的点光源

类此，设 N' 是从 S_1 到 $S'S_2$ 的垂足，则对于从 S' 来的光、P 点处的光程差是

$$\Delta\mathscr{S}' = [N'S_2] + [S_2P] - [S_1P]. \tag{31}$$

因此，S' 和 S 所产生的图样相互位移 Δm 序，其中

$$\Delta m = \frac{|\Delta\mathscr{S}' - \Delta\mathscr{S}|}{\lambda_0} = \frac{|[N'S_2] - [NS_2]|}{\lambda_0},$$

当 $n \sim 1$ 并且 θ 很小时，

$$\Delta m \sim \frac{\theta d}{\lambda_0}. \tag{32}$$

当

$$\Delta m = 1, 2, 3, \cdots \tag{33a}$$

时，S 和 S' 所产生的强度极大相重，组合图样中的条纹最清晰. 反之，当

$$\Delta m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots \tag{33b}$$

时，S 产生的强度极大与 S' 产生的强度极小相重，组合图样的条纹这时最不清晰，这时如果 S 和 S' 产生的强度相等，则条纹消失. 这样，当两孔间距从零增加时，条纹的清晰度将呈现周期性变化，特别是当

$$d = \frac{\lambda_0}{2\theta} \tag{34}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，清晰度将出现第一个极小，因而当观察到了这一情况时，即可从 d 和 λ_0 定出 θ.

现在我们来考虑更一般的情形，设光源是一个以原点 S 为中心的准单色初级扩展光源. 同前,我们可以认为这样的光源是由互不相干的点光源组成. 我们可以设想把它分成许多垂直于 S_1 与 S_2 连线的元条带，并且可以把焦平面上 P 点的强度作为这些元条带的强度贡献之和. 假定 $\Delta\mathscr{S}$ 是过原点 S 的那个元条带来的光在 P 点的光程差，则当 d 给定时，P 点的位置可由 $\Delta\mathscr{S}$ 确定. 对于和 S 相距 α 角的另一元条带来的光，根据(32)式，P 点的光程差为 $\Delta\mathscr{S}+\alpha d$，而相应的位相差是

$$\delta(\alpha,\Delta\mathscr{S})=\frac{2\pi}{\lambda_0}(\Delta\mathscr{S}+\alpha d). \tag{35}$$

我们仍假定组成扩展光源的点光源数目如此之大，以致我们可以把这扩展光源看作是实际连续的. 因此，由 § 7.2(15) 式，这时 P 点的总强度为

$$I(d,\Delta\mathscr{S})=\int i_1 d\alpha+\int i_2 d\alpha+2\int\sqrt{i_1 i_2}\cos\delta\, d\alpha, \tag{36}$$

式中 $i_1(\alpha,\Delta\mathscr{S})d\alpha$ 和 $i_2(\alpha,\Delta\mathscr{S})d\alpha$ 是一个元条带的光只通过二孔之一到达 P 点时的强度，而积分范围包括所有元光源的 α 值.

在 § 7.3.1 中我们曾经提到，由于衍射效应，孔 S_1 和 S_2 所构成的次级光源具有方向性，但是，如果这些效应在(36)式所包括的 α 值范围内可予忽略[1)]，则可令

$$i_1(\alpha,\Delta\mathscr{S})=i_2(\alpha,\Delta\mathscr{S})=i(\alpha)f(\Delta\mathscr{S}), \tag{37}$$

式中 $i(\alpha)$ 是正比于光源相应条带的强度，而 $f(\Delta\mathscr{S})$ 表征 S_1（或 S_2）的方向性. 由(36)式，利用(37)和(35)式，则有

$$\begin{aligned}I(d,\Delta\mathscr{S})&=2f(\Delta\mathscr{S})\int i(\alpha)\{1+\cos\delta\}d\alpha\\&=f(\Delta\mathscr{S})\Big\{P+C(d)\cos\Big(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}\Big)\\&\qquad-S(d)\sin\Big(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}\Big)\Big\},\end{aligned} \tag{38}$$

1) 如果二孔足够窄，这近似可证明是正确的，这一点到§8.5就清楚了.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$\left.\begin{aligned} P &= 2\int i(\alpha)d\alpha, \\ C(d) &= 2\int i(\alpha)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha d\right)d\alpha, \\ S(d) &= 2\int i(\alpha)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha d\right)d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

如果我们进一步假定 $f(\Delta\mathscr{S})$ 的变化比 $\cos(2\pi\Delta\mathscr{S}/\lambda_0)$ 和 $\sin(2\pi\cdot\Delta\mathscr{S}/\lambda_0)$ 缓慢[1],则 I 的极大位置和极小位置由下式给出:

$$\frac{\partial I}{\partial(\Delta\mathscr{S})} = 0 = -\frac{2\pi}{\lambda_0}\left\{C\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}\right) + S\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}\right)\right\},$$

即发生于

$$\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}\right) = -\frac{S}{C}. \tag{40}$$

由(38)和(40)式可得到 I 的极值

$$I_{极值} = P \pm |\sqrt{C^2+S^2}|, \tag{41}$$

因此,按(23)式定义,条纹的可见度

$$\mathscr{V}(d) = \frac{\sqrt{C^2+P^2}}{P}. \tag{42}$$

函数 $\mathscr{V}(d)$ 的曲线形式如图 7.15 所示,其中分别选取了三种不同的 $i(\alpha)$ 函数. 图 7.15(a) 对应两个点光源的情形,这就是我们在本节开始所简单讨论的. 在图 7.15(b) 中,光源的强度是均匀的,形状是矩形,上下两边平行于 S_1 和 S_2 连线;显然,这情形的 $\mathscr{V}(d)$ 与图 7.11 的可见度函数相同. 在图 15(c) 中,光源是一个径向对称的圆盘;左边的曲线对应均匀强度,其余的对应从中心到边缘有不同程度的变暗.

反之,如果测量了条纹的位置和它们的可见度随两孔间距 d 的变化,则可由(40)和(42)式求出函数 C 和 S,但比例常数 P 和符号待定;后者通常可从物理合理性考虑来确定. 然后,由(39)式

1) 如果二孔足够窄,这近似可证明是正确的,这一点到§8.5 就清楚了.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

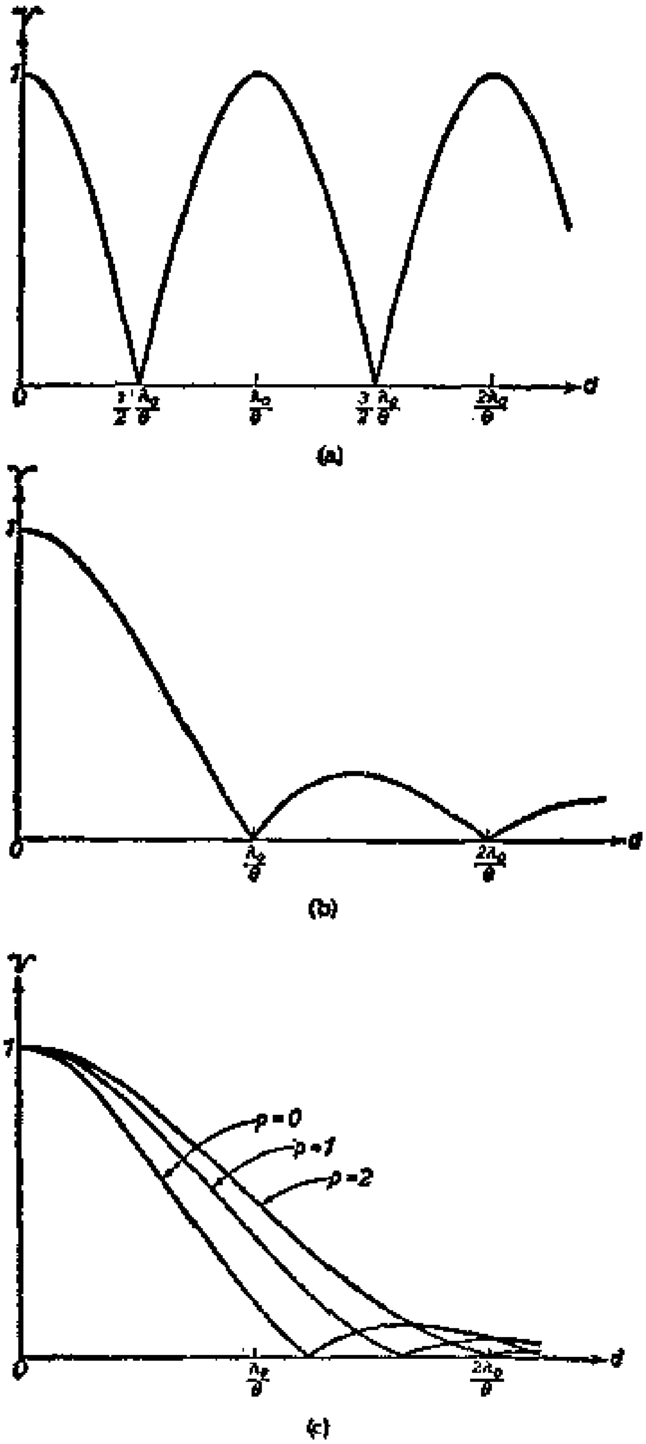


图 7.15　条纹可见度随两孔间距的变化(图 7.14 的装置)

(a) 两个相同的点光源，在两孔连线方向上的角间隔为 θ

(b) 均匀的矩形光源，上下两边平行于两孔连线，角宽度为 θ

(c) 圆盘光源，角直径 $\theta=2\beta_0$，强度分布 $I(\beta)\propto(\beta_0^2-\beta^2)^p$，式中 β 是离中心的角半径 [引自 A. A. Michelson and F. G. Pease, *Astrophys. J.*, **53** (1921), 256.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

通过傅里叶反演定理即可得到光源的强度分布 $i(\alpha)$. 这种测量虽然原则上是可能的，但是实际上很困难. 不过，如果预先知道光源的形状属于图 7.15 所指的某一种，则它的角幅度可以简单地由观测条纹可见度为极小时的最小 d 值来决定，这个 d 满足下列关系：

$$d = \frac{A\lambda_0}{\theta}, \tag{43}$$

式中 A 是一常数. 对于角间隔为 θ 的两个点光源，如我们在(34)式中看到的，$A = 0.5$；对于角直径为 θ 的均匀圆盘光源，$A = 1.22$；对于边缘比中心暗的圆盘光源，$A > 1.22$.

这种方法是斐索[1]和迈克耳孙[2]先后提出的，用来测定某些天体的角幅度，这些天体太小或太远，用不加光阑的望远镜不能测量(参看 § 8.6.2). 这些天体发白光，而且由于强度上的考虑，必须采用白光条纹来进行观测[3]. 因此，需要假定(43)式中的 λ_0 是一个有效波长，它取决于光强的波长分布和眼睛的色响应曲线. 在这限

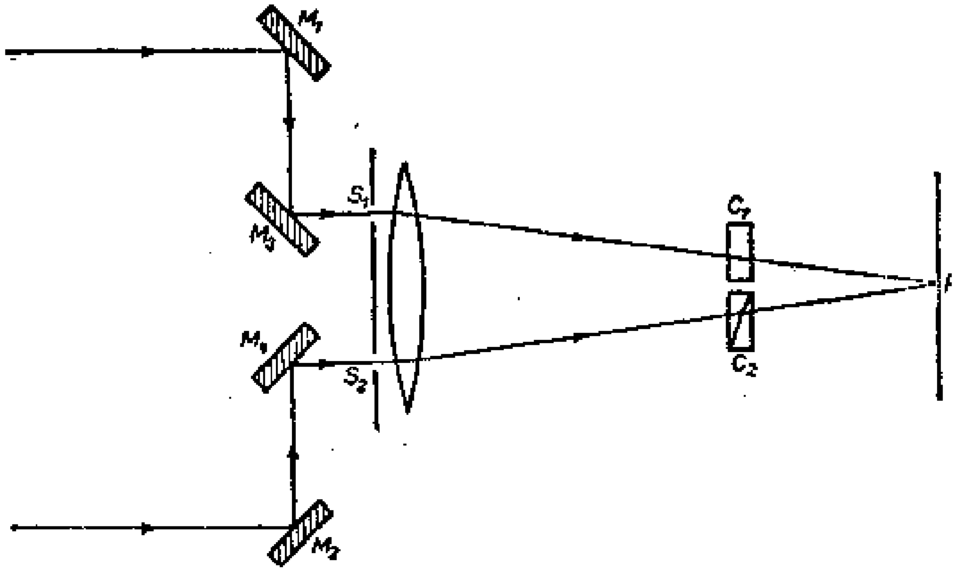


图 7.16 迈克耳孙测星干涉仪

1) H. Fizeau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **66** (1868), 934.
2) A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5),**30** (1890), 1.
3) 波长范围有限的扩展光源所产生的条纹的一般性问题，用部分相干光理论来处理最为适当(第十章). §10.4 中从这一理论的观点简短讨论了迈克耳孙测星干涉仪的作用.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

制下，用这方法成功地测量了行星卫星的角直径[1]和直径比间距小得多的双星的角距离[2]，但是用它测量单星的尝试归于失败，因为它们的角直径太小，即使把两孔间距加大到可用望远镜所允许的最大限度，条纹仍然清晰如故．为了克服两孔间距上的这个限制，迈克耳孙[3]制造了他的**测星干涉仪**（图 7.16）．望远镜的阑孔 S_1 和 S_2 是固定的，在它前面刚性梁上安装有一个由反射镜 M_1、M_2、M_3 和 M_4 组成的对称光学系统．光经此系统反射后到达二阑孔，里面两个镜子 M_3 和 M_4 是固定的，而外面两个镜子 M_1 和 M_2 可沿 S_1 和 S_2 连线方向对称地分开．如果光程 $[M_1M_3S_1]$ 和 $[M_2M_4S_2]$ 保持相等，则当光从远方点光源射来时，它在 S_1 和 S_2 上的光程差等于它在 M_1 和 M_2 上的光程差，所以，外面两个镜子起着斐索方法中两个可移阑孔的作用．这样一来，这装置能测量的最小角直径不是由望远镜物镜的直径来决定，而是由外面两个镜子的最大间隔来决定．此外还有一个优点，就是当二可移阑孔的间隔改变时，条纹间距保持不变，因为它只与 S_1 和 S_2 间隔有关．这干涉仪当时装在威尔逊山天文台的巨大反射望远镜（直径 100 吋）上，由于它机械强固，使用就很简便．孔 S_1 和 S_2 相距 114 厘米，在焦平面上产生的条纹间距约为 0.02 毫米．

外面两个镜子的最大间距是 6.1 米，所以角直径最小可测到（用 $\lambda_0 = 5500$ 埃）约 0.02 弧秒．由于不可避免的机械缺陷，必须用两个辅助元件，使外面两个镜子在各个方位上都能准确调节．在 S_1P 光路中有一块平行平面玻璃板 C_1，它可在任意方向倾斜，系用来使 S_1 和 S_2 来的几何光束在焦平面上相重．另一块平行平面板 C_2，厚度可变，用来补偿光程 $[M_1M_3S_1]$ 和 $[M_2M_4S_2]$ 的不等．这个补偿必不可少，因为白光条纹只有在零序附近才可看到，这补偿是通过用一小分光镜观察沟槽光谱来加以控制的．

---

1) A. A. Michelson, *Nature, Lond.*, **45** (1891), 160.
2) J. A. Anderson, *Astrophys. J.*, **51** (1920), 263.
3) A. A. Michelson, *Astrophys. J.*, **51** (1920), 257; A. A. Michelson and F. G. Pease, *Astrophys. J.*, **53** (1921), 249.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第一颗角直径测量成功的星是参宿四(猎户座 α). 得到的结果是 0.047 弧秒. 然后,根据这星到太阳的距离(用三角测量法测定),求得其线直径为 4.1×10^8 千米,它约为太阳直径(1.4×10^6 千米)的 300 倍,并且超过了地球轨道的直径(3×10^8 千米). 另外还测量了几颗星,这些星全都像参宿四一样,是线直径比太阳大许多倍的巨星. 测量数目之所以很少,部分原因是由于测量的固有困难,即大气扰动的干扰影响妨碍了测量,虽然迈克耳孙和皮斯(F. G. Pease)发现,这些影响比用大孔径望远镜进行普通观察时所遇到的为小. 干涉仪小孔上方折射率的变化会使整个干涉图样移动,如果这移动很缓慢,则条纹仍然能观察到,而在同样条件下,全孔径望远镜所形成的星象就要受到严重损坏.但是,除去这些观察上的困难之外,对测量绝大多数直径与太阳差不多的星来说,外镜最大间距 6 米仍然嫌短. 即使在最近的星的位置上,太阳视面的张角也只有 0.007 弧秒,因而要观察到条纹的第一次消失,镜的间距需要大约 20 米. 制造这样巨大的干涉仪是一件很困难的事情,因为聚光反射镜与目镜之间要求有牢固的机械连接.

在射电天文学中,已使用一种类似于迈克耳孙测星干涉仪的仪器,来测定宇宙射电源的角幅度[1]. 它由两个分开的天线组成,这两个天线把讯号供给同一个探测系统. 在这情况下,想要增大两个天线的间隔,而又不在天线和探测器之间的路径上引进不恒定的位相差,这在技术上也是困难的. 为了克服这一困难,布朗(R. H. Brown)和特威斯(R. Q. Twiss)[2]设计了另一种形式的射电干涉仪,他们把两个天线上的讯号分开来探测,从测量两个讯号强度涨落的相关随天线间隔的变化来求得射电源的角幅度. 他们还证明[3],同等的装置对可见光也可使用. 从一个星来的光,用两个凹

1) 例如,见 J. L. Pawsey and R. N. Bracewell, *Radio Astronomy* (Oxford, Clarendon Press, 1955), Chapter II; 或 R. N. Bracewell, "*Radio Astronomy Techniques*" in *Encyclopedia of Physics*, Ed. S. Flügge (Berlin, Springer), **54** (1959), Chapter V.

2) R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Phil. Mag.* (7), **45** (1954), 663.

3) R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature*, **178** (1956), 1046; *Proc. Roy. Soc.* A **248** (1958), 199, 222.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

面镜收集，使之聚焦在两个光电管上，并改变镜子间距，测量两管光电流涨落的相关。采用这种装置（称为强度干涉仪）时，镜子间距可以达到很大而无困难，所以测量直径比以前小得多的星已成为可能。这个方法的原理从部分相干理论的观点来看，是最好理解的，我们将在 §10.4 中加以简单讨论。

§7.4 驻　波

在以上所讨论的这些装置中，相互干涉的两个波在观察点是沿大致相同的方向传播的。现在，我们讨论沿不同方向传播的两个波的干涉效应，作为例子，我们讨论一单色平面波射到一个高反射平面上时入射波与反射波所产生的干涉。

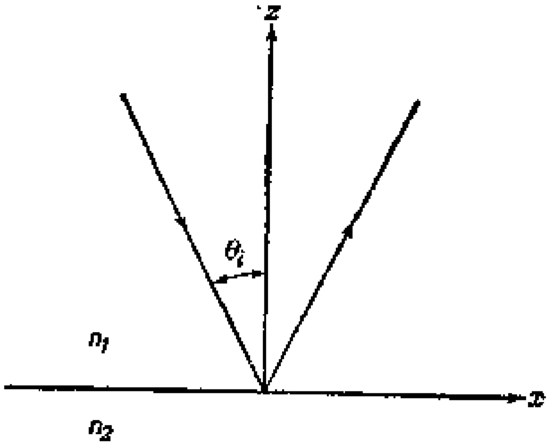


图 7.17　平面波在平面上的反射

假定反射面是 $z=0$ 平面，z 的正方向指向入射波所在的媒质，同时，设 n_1 和 n_2 为两种媒质的折射率（图 7.17）。

设 θ_i 为入射角，xz 平面为入射面。设 $\mathbf{E}^{(i)}$ 是入射波的电矢量，并且和 § 1.5.2 中一样，用 $A_\parallel$ 和 $A_\perp$ 分别代表 $\mathbf{E}^{(i)}$ 对入射面的平行分量和垂直分量的振幅，则 $\mathbf{E}^{(i)}$ 的三个笛卡尔分量由 § 1.5(11) 式给出，只要以 $-z$ 代替其中 z 即可，即

$$E_x^{(i)}=-A_\parallel\cos\theta_i e^{-i\tau_i},\quad E_y^{(i)}=A_\perp e^{-i\tau_i},\quad E_z^{(i)}=-A_\parallel\sin\theta_i e^{-i\tau_i},\tag{1}$$

（照例理解为取实部），式中

$$\tau_i=\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i-z\cos\theta_i}{v_1}\right),\tag{2}$$

其中 v_1 是第一媒质中的传播速度。反射波电矢量 $\mathbf{E}^{(r)}$ 的各笛卡

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

尔分量由同样表达式给出(§ 1.5(16)式),利用反射定律§ 1.5(7),则

$$E_x^{(r)} = R_{\parallel}\cos\theta_i e^{-i\tau_r},\quad E_y^{(r)} = R_{\perp} e^{-i\tau_r},\quad E_z^{(r)} = -R_{\parallel}\sin\theta_i e^{-i\tau_r},\tag{3}$$

式中

$$\tau_r = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_i + z\cos\theta_i}{v_1}\right).\tag{4}$$

反射波振幅 $R_{\parallel}$、$R_{\perp}$ 与入射波振幅 $A_{\parallel}$、$A_{\perp}$ 的关系由菲涅耳公式§ 1.5(21)表出,即

$$R_{\parallel} = \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}A_{\parallel},\quad R_{\perp} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}A_{\perp}.\tag{5}$$

为了简化讨论,我们假定 n_2/n_1 非常大,以致反射率可以取作 1;所以在 $n_2/n_1 \to \infty$ 极限时[1],由(5)式得到

$$R_{\parallel} = A_{\parallel},\quad R_{\perp} = -A_{\perp}.\tag{6}$$

将(6)式代入(3)式,并将入射场和反射场表达式相加,就得到总场。这样,总场电矢量的 x 分量是

$$\begin{aligned}E_x &= E_x^{(i)} + E_x^{(r)}\\ &= 2A_{\parallel}\cos\theta_i\left\{\sin\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right\}e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]}.\end{aligned}\tag{7a}$$

类此,

$$E_y = -2A_{\perp}\left\{\sin\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right\}e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v}\right)-\frac{\pi}{2}\right]},\tag{7b}$$

而

$$E_z = -2A_{\parallel}\sin\theta_i\left\{\cos\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right\}e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v}\right)\right]}.\tag{7c}$$

用完全类似的方式,由方程§ 1.5(13)和(16),可得到总场磁矢量的三个分量表达式如下:

---

1) 我们不考虑掠入射($\cos\theta_i \to 0$)情况。在掠入射时,即使 n_2/n_1 不大,反射率也接近 1;在此情况下,(5)式给出 $R_{\parallel} = -A_{\parallel}$,$R_{\perp} = -A_{\perp}$。这相当于洛埃镜的情况(§7.3.2)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$H_x = -2A_\perp n_1 \cos\theta_i \left\{\cos\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right\} e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1}\right)\right]}, \tag{8a}$$

$$H_y = -2A_\parallel n_1 \left\{\cos\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right\} e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1}\right)\right]}, \tag{8b}$$

$$H_z = 2A_\perp n_1 \left\{\sin\theta_i \sin\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right\} e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]}, \tag{8c}$$

式中用了麦克斯韦关系式 $n_1=\sqrt{\varepsilon_1}$。(7)和(8)式的每个表达式各代表一个沿 x 方向传播的波，传播速度为 $v_1/\sin\theta_i$。波的振幅不是常数，而是沿 z 方向周期地变化，周期为 $2\pi v_1/\omega\cos\theta_i = \lambda_0/n_1\cos\theta_i$，式中 λ_0 是真空波长。

正入射的情况($\theta_i=0$)具有特别意义。设 A_x、A_y 为电矢量的振幅分量，由(1)式，可令 $A_\parallel=-A_x$，$A_\perp=A_y$；则由(7)和(8)式得到

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -2A_x\left\{\sin\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right\} e^{-i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)},\\ E_y &= -2A_y\left\{\sin\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right\} e^{-i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)},\\ E_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -2A_y n_1\left\{\cos\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right\} e^{-i\omega t},\\ H_y &= 2A_x n_1\left\{\cos\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right\} e^{-i\omega t},\\ H_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

我们看到，在每一瞬间，位相在整个第一媒质中是常数。波没有有限的传播速度，因而我们称之为驻波。电矢量和磁矢量的振幅是 z 的周期函数；振幅为零的平面叫波节，振幅最大值所在的平面叫波腹。由(9)式可知，电场的波节发生在：

$$z=\frac{m\pi v_1}{\omega}=\frac{m\lambda_0}{2n_1},\quad m=0,1,2,\cdots\cdots, \tag{11a}$$

而波腹发生在：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$z=\frac{m\lambda_0}{2n_1},\quad m=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \cdots\cdots \tag{11b}$$

从(10)式可知，磁场的波节与电场的波腹重合，反之亦然。特别是，反射面是电场的一个波节，磁场的一个波腹。

维纳(O. Wiener)[1]首先在实验上证实了光驻波的存在。他的实验装置如图7.18所示。M为一平面镜，前表面镀了银，由一束准单色平行光垂直照射。F为一透明照相乳胶膜，涂在玻璃板G的平表面上，厚度不到1/20波长。乳胶膜F放在镜M之前，与M有一很小的倾角。乳胶经显影后，变黑之处是一系列等距的平行带，而带与带之间是透明的。变得最黑的地方对应于乳胶膜F与电场波腹面或磁场波腹面的交线。维纳进一步作了实验，把涂了乳胶的平板压在一个凸球面反射镜上，结果发现接触镜面地方的乳胶没有变黑。上面我们看到，这个地方是磁场的一个波腹[2]。因此，变黑的地区对应于电场的波腹，也就是说，光化学作用直接与电矢量有关，而与磁矢量无关。这个结论从电子论看来是理所当然

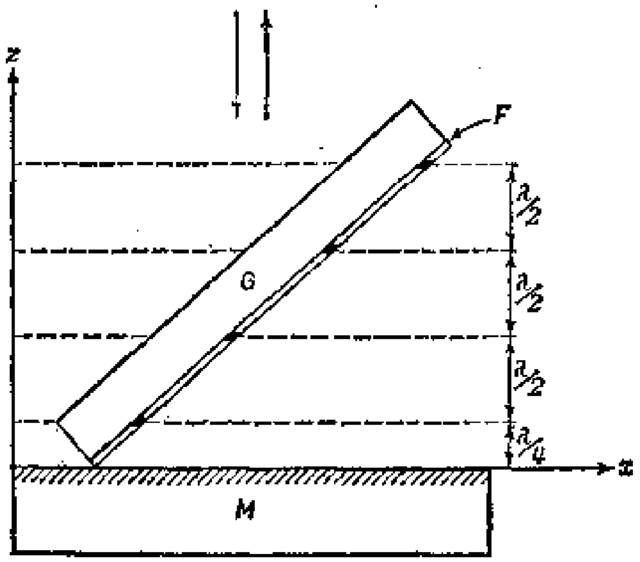


图7.18 维纳驻波实验
(图中大大夸大了照相版对镜子的倾斜)

1) O. Wiener, *Ann. d. Physik*, **40** (1890), 203.

2) 这里我们假定，从电介质推导出来的(6)式对镀银反射面也适用。十三章讨论的金属反射理论证明，在维纳实验条件下，这假定是正确的。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的.照相过程是一个电离过程,其中一个电子从卤化银的一个原子键上被移走,而作用在静止带电粒子上的电磁力是与电矢量成正比(参看§1.1(34)式).

也有人用荧光薄膜[1]和光发射薄膜[2]作过类似实验,他们用这些膜代替维纳的照相乳胶作为驻波探测器. 在这两种情况下,仍然如电子论所预料的,发现最大响应位于电矢量波腹处.

光驻波是李普曼(G. Lippmann)[3]所发明的彩色照相法的基础. 它是把涂有细粒照相乳胶的透明感光版放在照象机中曝光,但令乳胶面背向入射光,而与水银反射面相接触(图7.19). 为简单起见,假定感光版接受的是正入射的、波长为 λ_0 的准单色光. 因为光化学作用在(11b)式所给出的电矢量波腹处最强,所以,在显过影的感光版中就形成了一系列等距的银层,这些银层平行于乳胶表面,光学间隔为 $\lambda_0/2$. 现在,如果用白光垂直照射这底版,这些银层就成为部分反射面,因而反射光由一系列光束组成,它们的光程差为 λ_0 的整数倍. 我们将在后面(§7.6)讨论这样一系列光束的干涉. 分析表明,对于波长 λ_0,合成强度有一个极大,而当光束数目很大时,这极大是十分锐的. 这样,李普曼版就相当于一个选择反射器,对制备它时所用波长的光有强的反射.

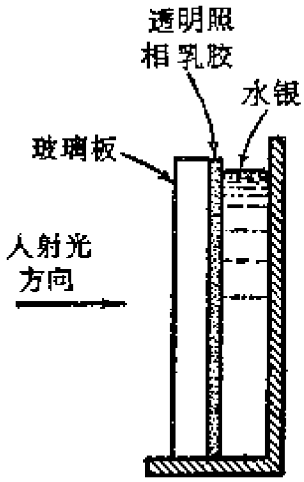


图 7.19 李普曼的彩色照象装置

维纳[4]还用他的装置考察了入射角为45°,入射光为线偏振光时的干涉效应. 他发现,当入射光电振动方向垂直于入射面时,乳胶变黑的地方是一系列等距的平行带;但是当入射光电振动方向在入射面上时,变黑是均匀的.这一结果再次证明与光化学效应直

---

1) P. Drude and W. Nernst, *Wiedem. Ann.*, **45** (1892), 460.
2) H. E. Ives and T. C. Fry, *J. Opt. Soc. Amer.*, **23** (1933), 73.
3) G. Lippmann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **112** (1891), 274.
4) O. Wiener, *loc. cit.*

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

接有关的是电场，而不是磁场. 因为，当电振动方向垂直入射面时，$A_{\parallel}=0$，在 $\theta_i=45^\circ$ 时，(7)式给出

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 0,\\ E_y &= -2A_\perp\left\{\sin\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}\,v_1}\right)\right\}e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{z}{\sqrt{2}\,v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]},\\ E_z &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

所以，电矢量的振幅以及因而电能密度的时间平均值沿 z 方向是周期变化的. 当振动方向在入射面上时，$A_\perp=0$，由(7)式，得出

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \sqrt{2}\,A_{\parallel}\sin\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}\,v_1}\right)e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{z}{\sqrt{2}\,v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]},\\ E_y &= 0,\\ E_z &= -\sqrt{2}\,A_{\parallel}\cos\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}\,v_1}\right)e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{z}{\sqrt{2}\,v_1}\right)\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由(13)和§1.4(54)式可知，在这情况下，时间平均电能密度等于

$$\langle w_e\rangle=\frac{n_1^2}{16\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*=\frac{n_1^2}{16\pi}(E_xE_x^*+E_zE_z^*)=\frac{n_1^2}{8\pi}A_{\parallel}A_{\parallel}^*, \tag{14}$$

所以，经时间平均后，电能密度与 z 无关. 另一方面，从(8)式可以看到，对于磁场，情况则相反；当入射光磁振动方向在入射面上时，时间平均的磁能密度沿 z 方向是周期变化的，但是当入射光磁振动方向垂直入射面时，磁能密度经时间平均后与 z 无关.

§7.5 双光束干涉：振幅分割

§7.5.1 平行平面板产生的条纹

设想用一个准单色的点光源 S 照射一块透明的平行平面板(图 7.20)，并设观察点 P 和 S 在板同侧. 不管点光源在什么位置，总有两条光线到达 P 点——一条是从板的上表面反射回来的，另一条是从下表面反射回来的——所以，在和 S 同侧的这一边，将产生一个非定域的干涉图样. 由对称性考虑可以知道，在平行于板面的平面内，条纹是圆形的，以板法线 SN 为轴，所以，不管 P 在什么

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

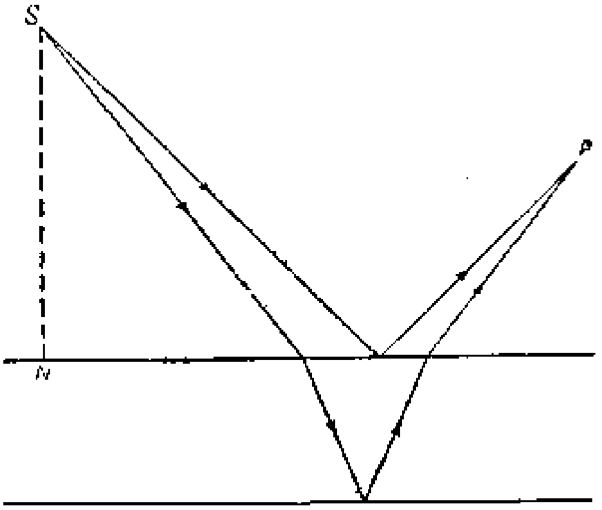


图 7.20 采用点光源时的平行平面板

位置，条纹的走向都垂直于平面 SNP. 从 § 7.3.4 的讨论可以料想得到，如果光源平行于平面 SNP 扩展，条纹的可见度将会下降. 但是这有一个重要例外，发生在 P 点在无穷远处时，即当我们用放松的眼睛，或者用聚焦于无穷远的望远镜来观察条纹时. 这时，从 S 到 P 的两条光线，即 $SADP$ 和 $SABCEP$（图 7.21），起源于同一条入射光线，因而它们在离开平行平面板后相互平行. 这两条光线的光程差是

$$\Delta\mathscr{S} = n'(AB + BC) - nAN, \tag{1}$$

式中 n' 是板的折射率，n 是周围媒质的折射率，N 是 C 到 AD 的垂

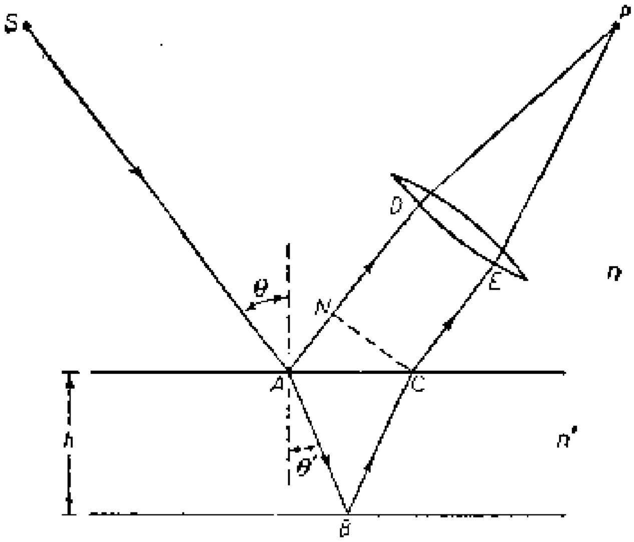


图 7.21 平行平面板：无穷远定域条纹形成图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

足．设板的厚度为 h，光线在上表面的入射角为 θ，折射角为 θ'，则

$$AB = BC = \frac{h}{\cos\theta'}, \tag{2}$$

$$AN = AC\sin\theta = 2h\tan\theta'\sin\theta \tag{3}$$

$$n'\sin\theta' = n\sin\theta. \tag{4}$$

因此，由(1)—(4)式，

$$\Delta\mathscr{S} = 2n'h\cos\theta', \tag{5}$$

相应的位相差

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta'. \tag{6}$$

我们还必须考虑到反射相变 π，按照菲涅耳公式 § 1.5(21a)，它发生在上表面或者下表面上．因此，P 点的总位相差

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta' \pm \pi \tag{7a}$$

$$= \frac{4\pi h}{\lambda_0}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta} \pm \pi. \tag{7b}$$

这里 θ 仅由 P 点在望远镜焦平面上的位置来决定，所以 δ 与 S 的位置无关．由此可见，采用扩展光源时，条纹的清晰程度同用点光源时一样．由于这只对一个特殊的观察面才正确，所以，这些条纹称为定域条纹——在本例中，条纹定域在无穷远．

图样中的强度是按 § 7.2(15)式变化的：由(7)和 § 7.2(16)式，当

$$2n'h\cos\theta' \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0,\quad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{8a}$$

时，条纹是亮的，而当

$$2n'h\cos\theta' \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0,\quad m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\cdots \tag{8b}$$

时，条纹是暗的．这样，条纹的特点是每个条纹各对应一定的 θ'（因而 θ），因而形成各个条纹的光在板上的入射角是特定的．由于这个原因，这些条纹通常称为等倾条纹．当望远镜物镜的轴垂直于板时，条纹是一系列同心圆，圆心在正反射光（$\theta = \theta' = 0$）的焦

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

点处．图样中心的干涉序最大，其值 m_0 由下式给出：

$$2n'h \pm \frac{\lambda_0}{2} = m_0\lambda_0; \tag{9}$$

m_0 不一定是整数，可以写成

$$m_0 = m_1 + e, \tag{10}$$

式中 m_1 是最里面的亮条纹的整数序，而 e 小于 1，称为中心小数序．对于从中心数起第 p 个亮条纹，设其角半径为 θ_p，干涉序为 m_p，则根据(8a)式，有

$$2n'h\cos\theta'_p \pm \frac{\lambda_0}{2} = m_p\lambda_0$$

$$= [m_1 - (p-1)]\lambda_0; \tag{11}$$

而且由(9)—(11)，

$$2n'h(1 - \cos\theta'_p) = (p - 1 + e)\lambda_0. \tag{12}$$

现在，如果 θ'_p 很小，则由折射定律可知，$n' \sim n\theta_p/\theta'_p$，因而 $1-\cos\theta'_p \sim \theta'^2_p/2 \sim n^2\theta^2_p/2n'^2$；因此，由(12)式，得出

$$\theta_p \sim \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n'\lambda_0}{h}}\sqrt{p-1+e}. \tag{13}$$

这样，图样的角尺度与 $\sqrt{1/h}$ 成正比，如果 $e=0$，则中心是一个强度极大，亮条纹的半径与正整数的平方根成正比．

用两块透明板的平面隔成一平行空气层也可产生同样的无穷远定域条纹(图 7.22)．用这装置可以观察当两板间距加大因而厚度 h 连续改变时条纹的变化情况．当 h 增加时，条纹从图样中心向外扩大，h 每增加 $\lambda_0/2$（取空气的 $n'=1$），图样中心就出现一个新的条纹．为了避免外表面上反射的干扰影响，两块板都作成有点楔形．这时，对于外表面反射光，从 S 到 P 的光程差是随 S 的位置而变的，所以，当采用扩展光源时，由于平均作用，这光在焦平面上产生均匀的强度．内平行表面反射光所形成的条纹叠加在这背景上．

除非板(或层)非常之薄，这些条纹将对应很高的干涉序，因而

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

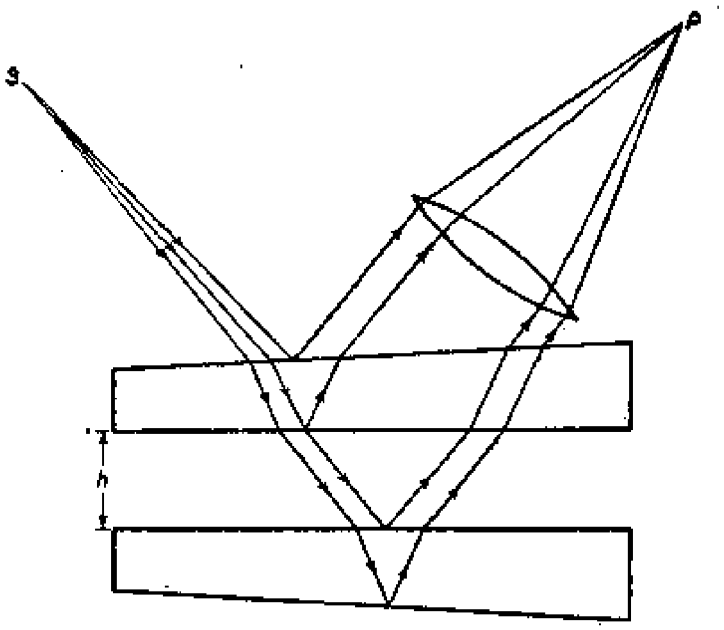


图 7.22 用平行平面空气层产生无穷远定域条纹的图示

在白光下将不能看到．例如，设 $h=1$ 厘米，$n'=1.5$，对于 $\lambda_0=4000$ 埃，中心干涉序约为 75000，而对于 $\lambda_0=7000$ 埃，则约为 43000；因此，在可见光谱区，约有 32000 个波长在中心处产生强度极大．从(5)式和§ 7.3(15)式可以显见，如果要条纹清晰，则当板的光学厚度增加时，就越要严加限制光源偏离严格单色性的程度．后面我们将看到(§ 7.5.8)，用可用光源产生条纹，板的光学厚度有一个上限．

以上我们假定板的光学厚度各处都一样．实际上，用一光阑适当限制住板的受照面积，就可以作这个假定．根据(8)式，光学厚度改变 $\Delta(n'h)$ 时，图样将位移 Δm 序，其中

$$\Delta m=\frac{2\cos\theta'}{\lambda_0}\Delta(n'h),\tag{14}$$

而在中心 $\theta'=0$ 处，有

$$\Delta m=\frac{2}{\lambda_0}\Delta(n'h).\tag{15}$$

这样，如果使板相对光阑运动，则可从中心干涉序的变化来测定 $n'h$ 的改变．这方法在光学工厂里，用来检验光学厚度要求均匀

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的平板[1].

前面，我们考虑的只是板的反射光，但是，很显然，对透射光也可采用同样的分析。在透射情况下（图 7.23），也有两条光线从 S 到达望远镜焦平面上 P 点，一条是直接透射的，另一条是经过两次内反射后透过的。用类似于（5）式的推导方法，可以得到这两条光线的光程差为

$$\Delta\mathscr{S} = 2n'h\cos\theta', \tag{16}$$

所以相应的位相差

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n'h\cos\theta'. \tag{17}$$

这里不需要加上反射相变造成的位相差，因为两次内反射发生在情况完全相同的两个面上。当采用扩展光源时，也有一个干涉图样定域在无穷远，而且，比较一下（17）和（7a）式可以看出，透射光图样与反射光图样是互补的，这就是说，一个图样的亮条纹与另一个图样的暗条纹相对于板法线的角位置相同。然而，如果板面反射率很低（例如空气与玻璃界面，正入射下的反射率约 0.04），则形成透射图样的两束光的强度相差很大；依照 § 7.2(16) 式，这时强度极大与极小相差很小，因而条纹的可见度很低。

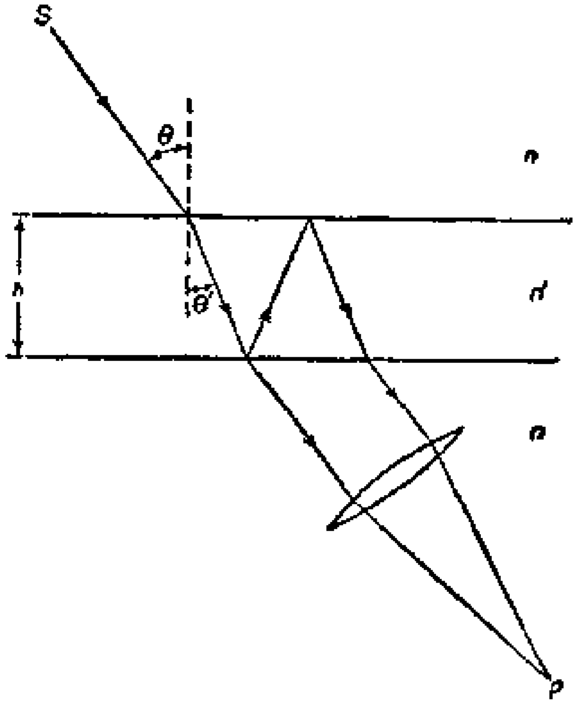


图 7.23 平面平行板：透射光无穷远定域条纹形成图示

前面的讨论只是近似的，因为我们忽略了板内多次反射的效

1) F. Twyman, *Prism and Lens Making* (London, Hilger and Watts, Ltd., 2nd edition, 1952), p. 388.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

应．实际上，有一系列光束从 S 到达 P 点，而并不是象我们假定的那样只有两束．如果板面反射率很低，这近似是够好的，因为经过前两次反射之后，光束携带的能量就可以忽略不计．从后面(§ 7.6)更严格的理论将可看到，极大和极小的位置由（8）式正确地给出；但是，如果板面反射率很高，则多次反射将大大改变条纹的强度分布．

§ 7.5.2　薄膜产生的条纹；斐索干涉仪

设有一个透明薄膜，两个反射面都是平的，但不一定相互平行，由一个准单色的点光源 S 来照射．在薄膜外，在与 S 同侧的任一点 P，都有两条从 S 来的光线[1]，即 SAP 和 $SBCDP$（图 7.24），所以在这区域内有一个非定域的干涉图样．从 S 到 P 的这两个光程之差为

$$\Delta\mathscr{S} = n(SB + DP - SA - AP) + n'(BC + CD), \quad (18)$$

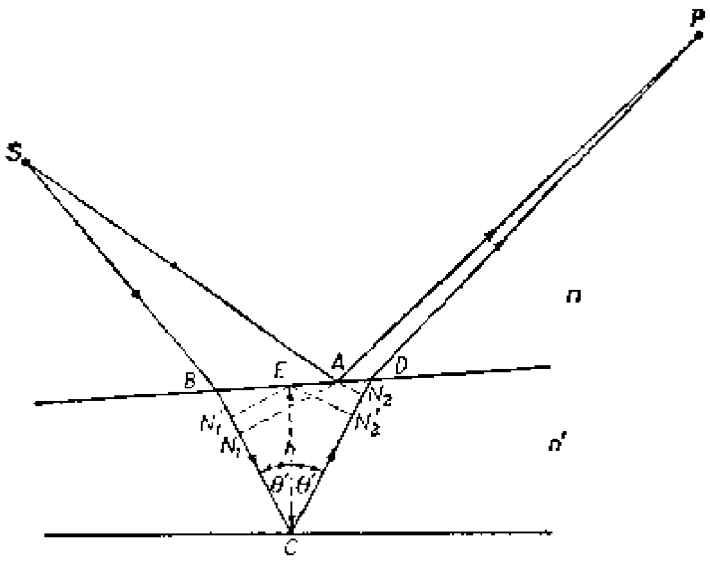


图 7.24　采用点光源时的薄膜

式中 n' 是薄膜的折射率，n 是周围媒质的折射率．$\Delta\mathscr{S}$ 的正确值一般很难计算，但是，如膜足够薄，则上表面上 B、A、D 三点紧挨

1）我们仍然忽略多次反射，它们的效应以后再考虑（§7.6）．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在一起，所以

$$nSA \sim nSB + n'BN_1, \tag{19a}$$

并且

$$nAP \sim nDP + n'N_2D, \tag{19b}$$

式中 AN_1 垂直于 BC，AN_2 垂直于 CD. 由(18)和(19)式，

$$\Delta\mathscr{S} \sim n'(N_1C + CN_2). \tag{20}$$

再有，如果薄膜两面夹角足够小，则

$$N_1C + CN_2 \sim N_1'C + CN_2', \tag{21}$$

式中 N_1' 是 E 到 BC 的垂足，N_2' 是 E 到 CD 的垂足；而 E 是下表面的 C 点法线与上表面的交点. 由于

$$N_1'C = CN_2' = h\cos\theta', \tag{22}$$

式中 $h = CE$ 是薄膜在 C 点的厚度，以垂直于下表面来量度，θ' 是薄膜中的反射角. 因此，对于小角度薄膜，由(20)—(22)式，我们可以写下

$$\Delta\mathscr{S} = 2n'h\cos\theta', \tag{23}$$

因而，P 点相应的位相差为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta'. \tag{24}$$

一般来说，当 P 点给定时，h 和 θ' 都随 S 的位置而变，因而光源稍有扩展就会使 P 点 δ 值的变化范围很大，以致条纹消失. 但是 P 点在薄膜上时情况例外. 当用望远镜聚焦在薄膜上，或用眼睛注视膜面观察时，就是这种情况. 这时，对于从扩展光源到达 P' 点(P的共轭点)的所有成对光线，h 实际上是相同的(图 7.25)，因而 P' 点 δ 的差主要是由于 $\cos\theta'$ 的不同. 如果 $\cos\theta'$ 值的变化范围足够小，则 P' 点 δ 值的变化范围可以比 2π 小得多，甚至用一个相当大的扩展光源时也可如此，因而这时可看到有清晰的条纹定域在薄膜上. 实际上，在正入射附近进行观察，并再限制入射光瞳(虽然肉眼的瞳孔本身可能已足够小)，即可满足 $\cos\theta'$ 变化范围很小的条件. 如果把薄膜某一表面上的反射相变 π 考虑进来，则根据(24)和§ 7.2(16)式，当

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

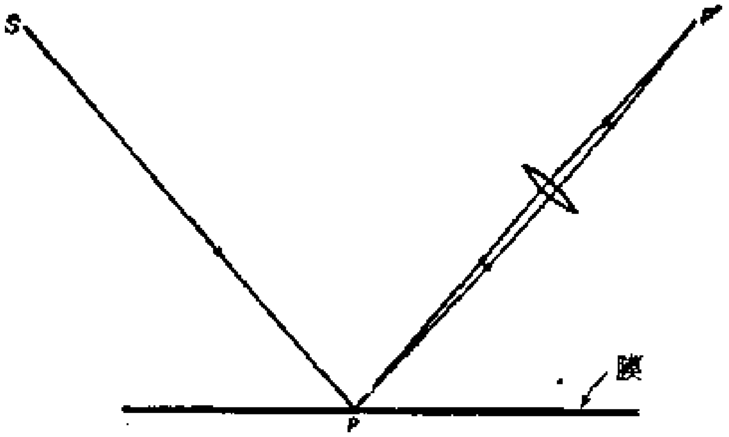


图 7.25　薄膜：定域在薄膜上的条纹形成图示

$$2n'h\overline{\cos\theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0,\quad m = 0、1、2、\cdots\cdots \tag{25a}$$

时，P' 点将是强度极大（P 点显然如此），而当

$$2n'h\overline{\cos\theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0,\quad m = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \cdots\cdots \tag{25b}$$

时，P' 点将是强度极小，式中 $\overline{\cos\theta'}$ 是 $\cos\theta'$ 的平均值，是对光源上对P'贡献光的那些点取平均。这些关系中所出现的量 $n'h$ 是 P 点膜的光学厚度；在我们的近似是正确的范围内，P 点的干涉状况不受别处膜厚的影响。由此可见，即使薄膜界面不是平面，但只要其夹角保持很小，则（25）式仍然成立。这时，如果 $\overline{\cos\theta'}$ 实际上是常数，则条纹就是薄膜中光学厚度为常数的那些点的轨迹，因此它们通常称为**等厚条纹**（图 7.26）。

等厚条纹可以在两块透明板的两个反射面间的空气薄膜中观察到。在正入射附近，令 $\overline{\cos\theta'} = 1$，并采用空气中的波长 $\lambda = \lambda_0/n$，则暗条纹条件（25b）式变成为

$$h = \frac{m\lambda}{2},\quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots \tag{26}$$

这样，这些条纹是薄膜的等厚线，厚度间隔为 $\lambda/2$。如果薄膜厚度是常数，则它上面的强度是均匀的；通常用这个效应来检验光学表面的面型，办法是用一个曲率大小相等但符号相反的参考表面（样

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

图 7.26 薄玻璃片产生的等厚条纹

板)，观察它与被检表面间的薄膜．如果空气膜是一个劈形膜，由两个平面所形成，则条纹是等距直线，并且平行于劈棱．相邻亮条纹的间距为 $\lambda/2\alpha$，其中 α 是劈角；例如，当 $\alpha=1$ 弧分，$\lambda=5500$ 埃时，条纹间距约为 1.9 毫米．这表明，如果要条纹分开得相当大，则劈角必须很小．劈条纹可用来检验机械工厂里作为长度标准的端规．端规 G_1(图 7.27)是一个钢块，上下两面经过抛光，是平行平面，规的长度即由此二面确定．检验时，将其中一个面和标准规 G_2(同一标定长度)的一个面贴紧在一钢质平台面上，并将一块透明板 T 平面向下放在二规的上端面上．一般，在板与各规之间形成有劈形空气膜，在单色光下可产生条纹．二规长度之差可以

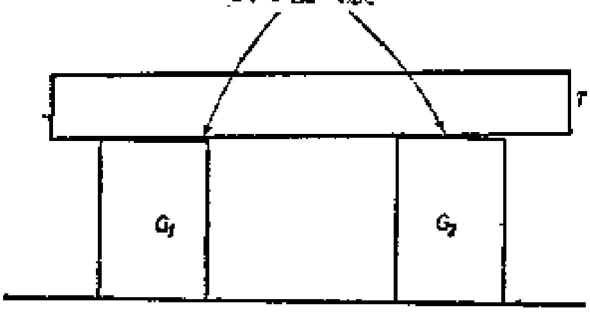


图 7.27 端规的干涉量度比较

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

从它们的距离和条纹的间距求出[1].

另一个等厚条纹的例子是所谓牛顿环的条纹(图 7.28)，它与牛顿对光之本性的见解有关，因而具有历史意义. 这种条纹形成在一个透镜的凸表面和一个与它接触的玻璃平面之间(图 7.29). 条纹是以接触点 C 为中心的同心圆. 设 R 是凸表面的曲率半径 OC，则在距 C 点 r 处，薄膜的厚度

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2} \sim \frac{r^2}{2R}, \tag{27}$$

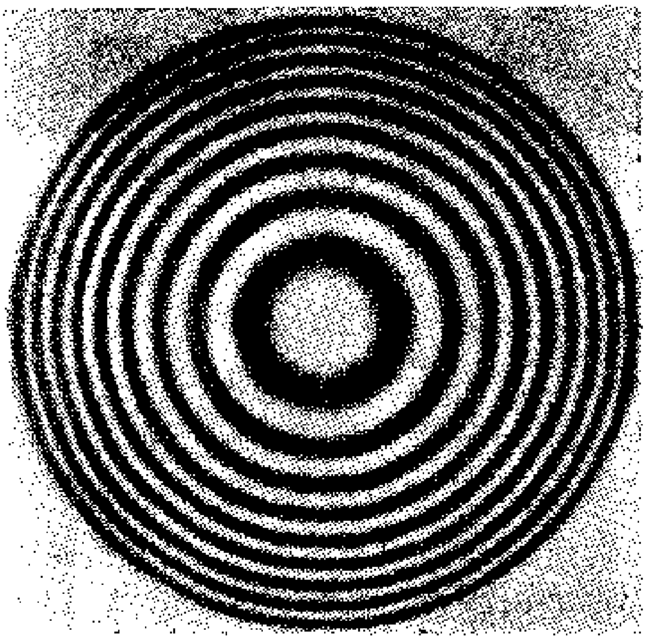


图 7.28 牛顿环

式中略去了四次项. 因此，在正入射时，根据(26)和(27)式，暗条纹条件是

$$r = \sqrt{mR\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \tag{28}$$

所以，暗条纹半径与正整数平方根成正比. 如果将透镜和板的距离拉开，则膜上一定 h 的点向内移动，因而条纹向中心收缩，间距每增加 $\lambda/2$，中心就消失一个条纹. 可注意的是，象杨氏实验一样，这种装置提供了一种测定近似光波波长的方法，而所用仪器十

1) 金属表面上的反射相变，不是象(25)式中所假定的那样严格为 π，但这不影响条纹间距.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

分简单.

如果薄膜厚度只有几个半波长，则单色图样中的干涉序是很低的，因而采用白光光源时也可以看到条纹.肥皂泡和水面油膜反射光所显示的五颜六色就是这种条纹的例子. 在观察牛顿环的装置中（图 7.29），当透镜和板接触在一起时，对所有波长来说，中心处的位相差都是 π，所以在白光下中央斑点是黑的. 从中心向外，光源不同单色成分形成的各个图样错开得越来越大；在目视观察下，紧靠中心周围有一些彩色圆环，颜色次序一定，称为**牛顿色序**，再往外，眼睛看起来是均匀的白色照明（参看§ 7.3.3）. 同样，劈形空气膜在白光下也有一个黑色条纹，这是劈稜所在之处.

以上我们讨论了膜的反射光，但是在透射光下也可以看到有一个定域在膜上的干涉图样. 同平行平面板的情况一样，反射光图样和透射光图样是互补的；一个图样的亮条纹与另一个图样的暗条纹在膜的同点上. 当表面反射率很低时，透射图样中条纹的

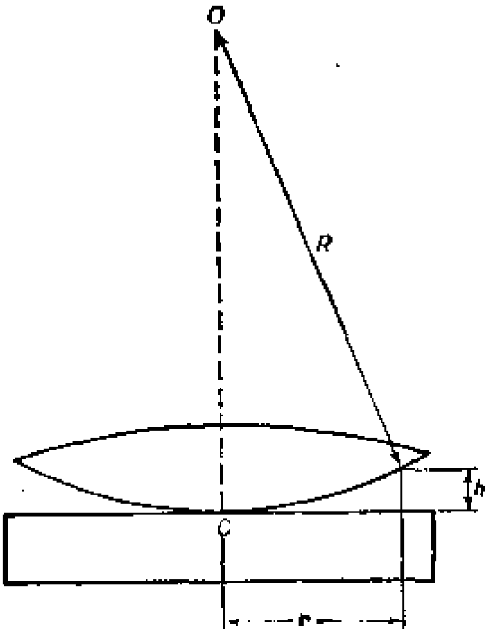


图 7.29 牛顿环形成图示

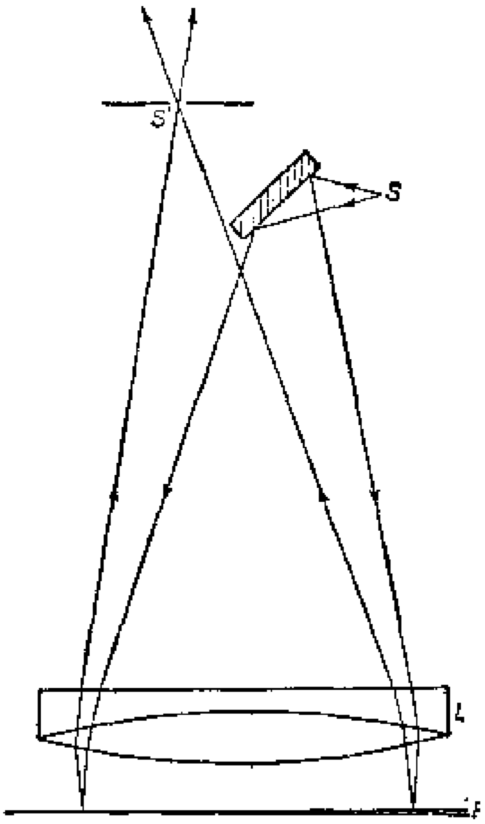


图 7.30 斐索干涉仪

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

可见度很低，因为两个干涉光束的强度相差悬殊.

我们已经看到，如果要条纹清晰，则膜上各点对应的 $\cos\theta'$ 值的变化范围必须加以限制，而且只有当 $\overline{\cos\theta'}\sim 1$ 时，条纹才顺沿着等光学厚度线. 在**斐索干涉仪**[1]（图 7.30）中，这些条件可在很大的膜面上同时得到满足. 光从准单色光源 S 发出，经一小镜反射后，被透镜 L 准直，然后近乎正入射地照射到膜 F 上. 从膜两面反射回来的光穿过 L 后，会聚到 L 焦平面上的小孔 S' 上. 把眼睛紧贴在 S' 后面，并注视着膜面，即可看到在 L 所照射的整个膜面上，布满顺沿着等光学厚度线的条纹. 这些条纹通常称为**斐索条纹**. 后面我们将看到（§ 7.5.3），只要光源足够小，用不薄的膜也可产生斐索条纹，因而光学工厂里用这种干涉仪来检验透明平行平面板光学厚度的均匀性. 在英国国立物理研究所（N. P. L.），还用它来测量端规的长度[2]，其装置如图 7.31(a) 所示. 端规 G 的一个面紧贴在钢板 B 的抛光平面上，于是 B 和 G 的上表面相互平行，然后把一块下表面是平面的透明板 T 装在它们上面. 一般，在 T 和

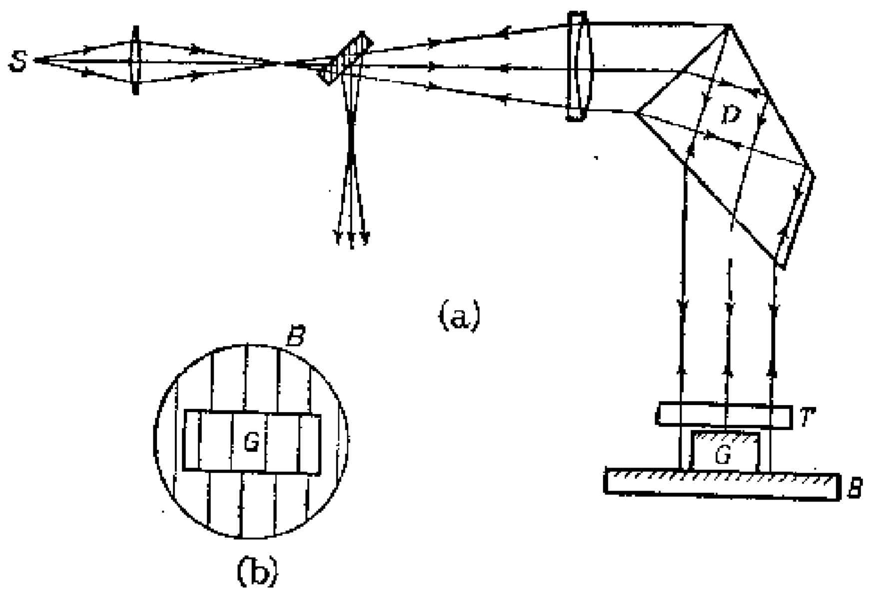


图 7.31　N. P. L. 测规干涉仪

(a) 装置　(b) 视场

1) H. Fizeau, *Ann. Chim. Phys.*, (3), **66** (1862), 429.
2) F. H. Rolt, *Engineering*, **144** (1937), 162.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

G之间，在 T 和 B 之间各形成一劈形空气膜，可各产生一个干涉图样．条纹都是平行直线，而且间距相同．然后调节 T 的倾斜使条纹排成与端规一边垂直；这时视场情景如图 7.31(b) 所示．如果，在端规这边上某一点处，G 和 B 上空气膜的厚度分别为 h_1 和 h_2，而相应的干涉序为 m_1，m_2，则按(26)式，端规的长度

$$d = h_2 - h_1 = (m_2 - m_1)\frac{\lambda}{2} = \Delta m\frac{\lambda}{2}, \tag{29}$$

式中 Δm 是两个图样的干涉序位移．这样(29)可写成

$$d = (x + e)\frac{\lambda}{2}, \tag{30}$$

式中 x 是一个未知整数，而 $e < 1$ 是序位移小数，可用内插法测量．x 值则由剩余小数法求出，贝诺瓦[1]首先在干涉量度学中使用了这个方法．它共采用四种已知波长的光来测量两个图样的序位移小数；而通过转动定偏向棱镜 D，可以很方便地把这四种波长从一个适当的光源依次单独选出．这样就得到如下形式的关系

$$\begin{aligned} d &= (x_1 + e_1)\frac{\lambda_1}{2} = (x_2 + e_2)\frac{\lambda_2}{2} \\ &= (x_3 + e_3)\frac{\lambda_3}{2} = (x_4 + e_4)\frac{\lambda_4}{2}, \end{aligned} \tag{31}$$

式中 x_1，x_2，x_3 和 x_4 是未知整数；这些关系式确定了 x_1，x_2，x_3 和 x_4 可能值的一组四元集合．用测微计近似测量 d 就足以决定这些四元集合中哪一个正确，从而得到精确的 d 值．如果测量十分细心，用本法能测量长度直到约 10 厘米的端规；如果小数序准到 0.1，则准确度对 $\lambda = 5000$ 埃来说为 $\pm 2.5 \times 10^{-6}$ 厘米．

显然，在斐索装置中，当光源 S（图 7.30）缩小成一个点，使得膜上各点的 θ' 只有一个值时，便产生其极限情况．然而，在这种情况下，至少当膜面是平面时，条纹必定是非定域的，即在各反射光束所共有的任何平面上，条纹的清晰程度和膜上一样．因此，这

---

1) I. R. Benoit, *Journ. de Phys.* (3), 7 (1898), 57.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

就要我们更严密地研究条纹定域的概念和它与光源扩展的关系.

§7.5.3 条纹的定域[1]

以上我们所讨论的产生干涉效应的各种装置,概括说来,都是使光从光源经过两条不同途径到达一空间区域内各点. 设 P 是这区域内的一点,而且先假设光来自准单色点光源 S,波长为 λ_0. 设 SA_1B_1P、SA_2B_2P 是从 S 到 P 的两条光线(图 7.32),则 P 点的位相差

$$\delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\{[SA_2B_2P]-[SA_1B_1P]\}. \tag{32}$$

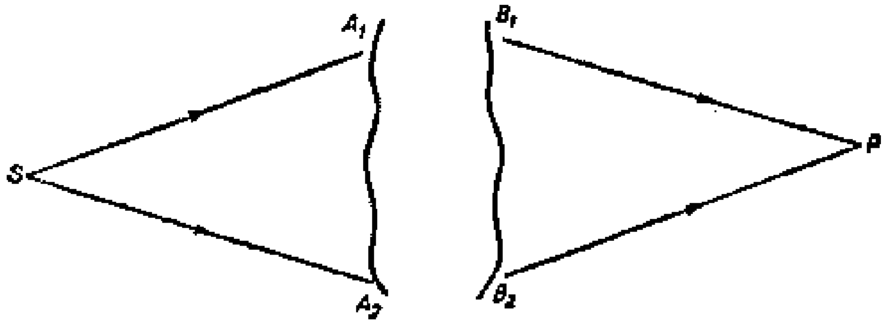


图 7.32 点光源的双光束干涉图示

δ_0 的值与 P 点的位置有关,但是所有 P 点的 δ_0 都只有一个值,所以,在来自 S 的两束光的公共区域内,任何平面上都形成有干涉条纹,它们是 δ_0 为常数的各点的轨迹. 我们说这种条纹是**非定域的**;它们的可见度仅仅取决于这两个波的相对强度. 一个点光源产生的条纹总是非定域的.

现在假定,光源是一个以 S 为中心的准单色初级扩展光源.同§7.3.4 中一样,我们假定这种光源是由大量互不相干的点光源构成,每一个点光源各产生一个非定域的干涉图样;因此,在每一点,总强度是这些元图样的强度之和. 如果扩展光源所有各点在 P 点产生的位相差不同,则 P 点附近各元图样相互位移,因而 P 点条纹的可见度比采用点光源时低. 一般,如我们后面将要看到的,当光

1) 关于条纹定域问题,更广泛的讨论可见 J. Macé de Lépinay and C. Fabry, *Journ. de Phys.* (2), **10** (1891), 5.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

源扩展时，相互位移增大，因而可见度不断下降，但位移增加的快慢依赖于 P 点的位置．这样，当光源围绕 S 扩展时，可见度在某些 P 点可以保持或接近点光源时的值，而在其它地方实际已下降到零．这时我们说这些条纹是**定域的**；这样的条纹为扩展光源所特有．

当光源的扩展给定时，可见度相应下降多少，这一般是很难计算的，因为它既依赖于各元图样的相互位移，同时也依赖于它们的相对强度．然而，我们能容易识别两种极端情况．显然，当各元图样的相互位移比一个序小得多时，它对条纹的影响就很小；在图 7.11 所涉及的特殊情况下，我们曾看到，至少对目视观察来说，只要

$$\delta_{\text{极大}} - \delta_{\text{极小}} \lesssim \frac{\pi}{2}, \tag{33}$$

条纹可见度的损失仍然不大，式中 $\delta_{\text{极大}}$、$\delta_{\text{极小}}$ 是扩展光源各点在 P 点产生的最大和最小位相差．这一判据对图 7.15(b)、(c) 的光源分布也成立，因而我们可以假定它普遍适用．反之，当

$$\delta_{\text{极大}} - \delta_{\text{极小}} \gg \pi \tag{34}$$

时，各元图样相互位移了许多序，条纹的可见度将非常小．

现在我们来考察，扩展光源 S' 点所产生的 δ 如何依赖于 S' 相对于 S 的位置．S、P 两点是"共轭的"．这个"共轭"意指，如果在 P 点放上一个波长为 λ_0 的点光源，它将在 S 点产生位相差为 δ_0 的两个波．设 W_1、W_2 是这两个波通过 S 点的波阵面（图 7.33），则 W_1、W_2 分别垂直于 SA_1、SA_2；它们的曲率依赖于 S 和 P 的位置，而且依赖于具体装置的光学性质．设 N_1、N_2 分别为 S' 到 W_1、W_2 的垂足．N_1 到 P 的光程等于 $[SA_1B_1P]$，同样，N_2 到 P 的光程等于 $[SA_2B_2P]$．因此，在 P 点，与 S' 对应的位相差是

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\{[S'N_2] + [SA_2B_2P] - [S'N_1] - [SA_1B_1P]\}, \tag{35}$$

或者由 (32) 式，

$$\delta - \delta_0 = \frac{2\pi n}{\lambda_0}(s_2 - s_1), \tag{36}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

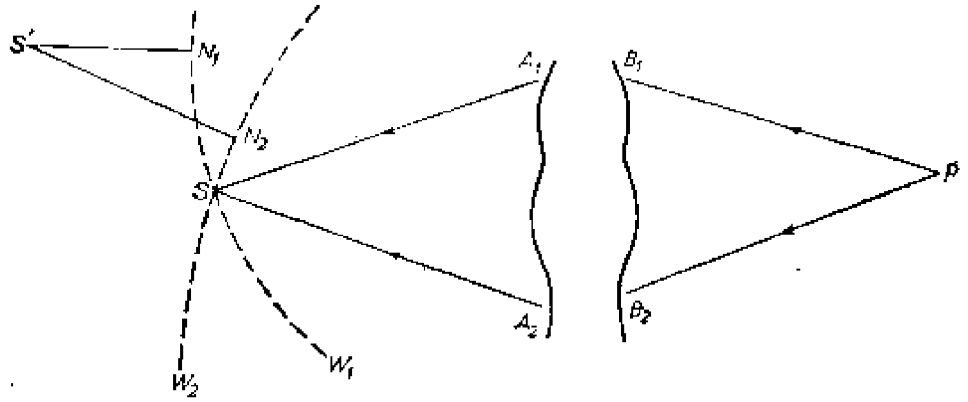


图 7.33 扩展光源的双光束干涉图示

式中 $s_1 = S'N_1$，$s_2 = S'N_2$，n 是光源周围媒质的折射率.

设 S 为直角坐标轴 SX、SY、SZ 的原点，并令 SZ 和 SX 为角 A_1SA_2 的内等分线和外等分线(图7.34). 设 W_1、W_2 在平面 $S'SA_1$、$S'SA_2$ 内的曲率半径为 R_1、R_2，则相应的曲率中心 C_1、C_2 分别位于点 $\{R_1\sin(\beta/2), O, R_1\cos(\beta/2)\}$、$\{-R_2\sin(\beta/2), O, R_2\cos(\beta/2)\}$，其中 β 代表角 A_1SA_2. 设 (x, y, z) 为 S' 点的坐标，则

$$C_1S' = s_1 + R_1 = \sqrt{\left(x - R_1\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - R_1\cos\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

$$= R_1\sqrt{1 - \frac{2}{R_1}\left(x\sin\frac{\beta}{2} + z\cos\frac{\beta}{2}\right) + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{R_1^2}}. \tag{37}$$

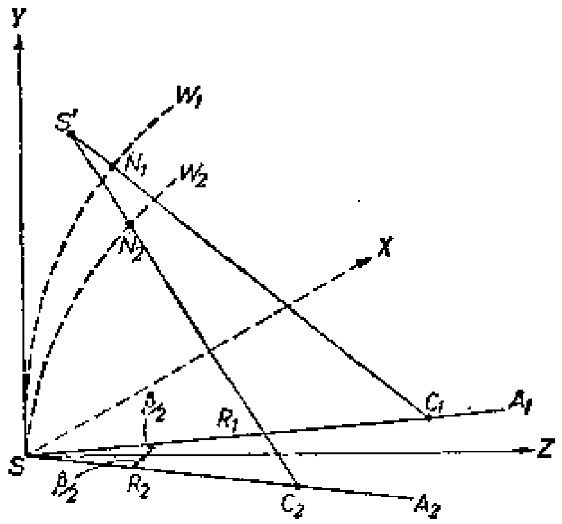


图 7.34 双光束干涉装置条纹定域讨论图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当光源的线度比 R_1 小得多时，我们可以略去 x/R_1、y/R_1、z/R_1 高于二次的项，所以

$$s_1 \sim -x\sin\frac{\beta}{2} - z\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2R_1}\left\{x^2 + y^2 + z^2 - \left(x\sin\frac{\beta}{2} + z\cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}. \tag{38}$$

同样，

$$s_2 \sim x\sin\frac{\beta}{2} - z\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2R_2}\left\{x^2 + y^2 + z^2 - \left(x\sin\frac{\beta}{2} - z\cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}. \tag{39}$$

在大多数有实际意义的情形中，β 是很小的，因而(38)和(39)展开式中包含 β^2 和 $\beta z/R$ 的项可以忽略。于是从(36)、(38)和(39)式得到

$$\delta - \delta_0 \sim \frac{2\pi n}{\lambda_0}\left\{\beta x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)(x^2 + y^2)\right\}. \tag{40}$$

当(40)式中与 β 无关的项可以忽略时，

$$\delta - \delta_0 \sim \frac{2\pi n}{\lambda_0}\beta x. \tag{41}$$

在这种近似下，当 $x = 0$ 时，$\delta = \delta_0$，所以当光源在 YSZ 平面内扩展时，位相差的变化(因而可见度的减小)可以忽略。按照(33)和(41)式，如果光源垂直于 YSZ 平面的扩展不超过 $\lambda_0/4n\beta$，则视见度减小不明显。SA_1 和 SA_2 的取向，因而我们所选择的坐标轴的取向，一般依赖于 P 点的位置。如果对应所有 P 点的各个 YSZ 平面有一公共交线，则沿这交线放上一个线光源(或实际上，一个宽度小于 $\lambda_0/4n\beta$ 的狭缝光源)时，它所产生的条纹的可见度各处都同点光源时一样；这些条纹仍然是非定域的。§7.3.2 的那些装置(除梅斯林实验外)都是如此。例如，当采用菲涅耳双面镜时，不管 P 点在什么位置，平面 YSZ 总包含那条通过 S 并且平行于镜面交线的直线，因而，正如我们在 §7.3.4 中所看到的，沿这条直线放上

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一个狭缝光源时，将产生非定域条纹. 很容易证明，缝宽表达式§7.3(26)式就等同于 $c \leqslant \lambda_0/4n\beta$. 然而，一般说来，对应所有 P 点的各个 YSZ 平面没有共同交线. 只是对某一个限定区域内的 P 点来说，一个线光源才可能是在对应于这些点的 YSZ 平面内；但是，对其它的点来说，这线光源扩展到 YSZ 平面之外，距离大大超过 $\lambda_0/2n\beta$，因而按照(34)和(41)式，这意味着可见度很小. 在这种情况下，狭缝光源产生的条纹是定域的，而且定域区域依赖于狭缝的取向.

β 的值依赖于 P 点的位置，而且按照(40)式，如果我们忽略 R_1 和 R_2 对 β 的依赖关系，则当 x 给定时，$\delta-\delta_0$ 随 β 的减小而减小. 由此可见，当光源垂直于平面 YSZ 的扩展增加时，条纹变成为定域条纹，定域在对应于足够小 β 值的那些区域中. 特别是，当 SA_1 和 SA_2 相重时，$\beta=0$；定域区域包括这样一些 P 点——如果它们存在的话——它们各位于 S 的单条入射光线所派生的两条光线的交点上. 在这些点附近，β 可以忽略，因而从(40)式得到

$$\delta-\delta_0 \sim \frac{\pi n}{\lambda_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)(x^2+y^2). \tag{42}$$

如果 W_1、W_2 是球面，则 R_1、R_2 与 x 和 y 无关，因而可见度的减小与光源在平面 YSX 内的扩展方向无关. 对于这平面上的一个圆光源，按照(33)和(42)式，如果其半径不超过大约

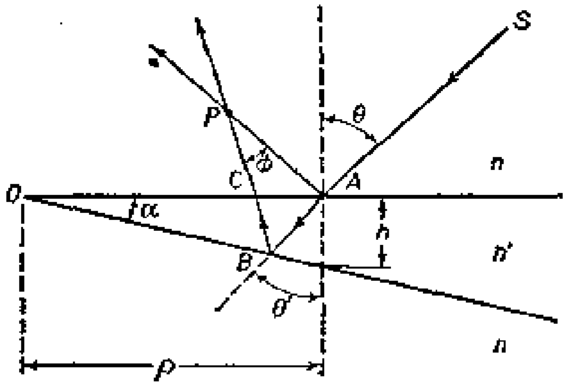
$$\sqrt{\lambda_0 R_1 R_2/2n|R_1-R_2|},$$

则可见度的减小并不明显.

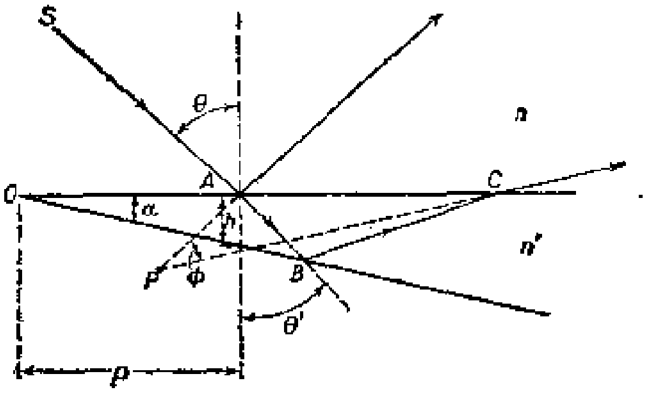
在用望远镜观察平行平面板的情况下(§7.5.1)，当 P 点位于望远镜物镜焦平面上时，$\beta=0$. 这时，对于所有 S 位置，R_1 和 R_2 都是无穷大，所以按照(42)式，对于所有的 x 和 y，$\delta=\delta_0$. 因此，不管光源的位置和扩展如何，物镜焦平面上条纹的可见度都不会减小. 实际上，望远镜的孔径总是限制了光源的有效扩展. 因此，当望远镜没有完全调好，以致所观察的条纹在物镜焦平面之外时，只要光源的这种有效扩展不超过(33)和(34)式所容许的值，可见度的减小也仍不明显.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

再举一个例子[1)]，看看透明劈反射条纹的情况．设劈的折射率为 n'，劈的两个平面形成一小角度 α，并设它周围媒质的折射率为 n．假定 S 为一准单色点光源，并考虑劈主截面（与劈棱垂直的截面）内的一条光线，它与劈的前表面交于 A 点（图 7.35）．这入射光线产生一条反射光线 AP 和一条折射光线 AB，折射光线 AB 在后表面 B 点受到反射，又在前表面 C 点受到折射，然后沿 CP 射出，与反射光线 AP 相交于 P 点．当光源以 S 为中心而扩展时，平面 SAP 附近的条纹变成定域于 P 点附近．



(a)



(b)

图 7.35　光线在平面劈表面上的反射和折射

设 ρ 为从 A 点到劈棱的距离；θ、θ' 分别为 A 点处的入射角和折射角；ϕ 为角 APC．从 A 点作一直线垂直于劈的后表面，当 B

1) 关于平面劈产生的条纹，更充分的讨论可见 J. Macé de Lépinay, *Journ. de Phys.* (2), **9** (1890), 121; W. Feussner and L. Janicki, *Handbuch der Physikalischen Optik*, I (ed. E. Gehrcke, Leipzig, Barth, 1926), 396; G. F. C. Searle, *Phil. Mag.* (7), **37** (1946), 361.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

和 O 位于此垂线的同侧时，P 点是实的（图 7.35(a)）；B 点处的反射角为 $(\theta'-\alpha)$、C 点处的出射角为 $(\theta-\phi)$，并且根据初等几何学可写出下列关系：

$$AB=\frac{\rho\sin\alpha}{\cos(\theta'-\alpha)},\tag{43}$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{\cos\theta'}{\cos(\theta'-2\alpha)},\tag{44}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sin 2(\theta'-\alpha)}{\cos(\theta'-2\alpha)},\tag{45}$$

$$\frac{AP}{AC}=\frac{\cos(\theta-\phi)}{\sin\phi},\tag{46}$$

$$\frac{CP}{AC}=\frac{\cos\theta}{\sin\phi}.\tag{47}$$

此外，按斯涅耳定律，A、C 两点处的折射分别满足

$$n'\sin\theta'=n\sin\theta,\tag{48}$$

$$n'\sin(\theta'-2\alpha)=n\sin(\theta-\phi).\tag{49}$$

把 (48) 和 (49) 两式相减并利用恒等式

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

即可得到

$$\sin\frac{\phi}{2}=\frac{n'\sin\alpha\cos(\theta'-\alpha)}{n\cos\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right)};\tag{50}$$

因而如果 θ 不太接近 $\pi/2$，则当 α 很小时，上式可以写成

$$\phi\sim\frac{2n'\alpha\cos\theta'}{n\cos\theta}.\tag{51}$$

从 (43)、(44) 和 (46) 式，

$$AP=\frac{2\rho\sin\alpha\sin(\theta'-\alpha)\cos(\theta-\phi)}{\cos(\theta'-2\alpha)\sin\phi}.\tag{52}$$

当 α 很小时，我们可以利用 (51) 式把 (52) 式按 α 的幂次展开。如果只保留其中的首项，并再利用 (48) 式，则可得到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$AP \sim \frac{\rho n^2 \sin\theta \cos^2\theta}{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}. \tag{53}$$

(53) 式中所忽略的量是 $\rho\alpha$ 量级，即 A 点劈厚的量级. 当 S 和 O 位于过 A 点的劈后表面法线的同侧时，P 点是虚的（图 7.35(b)），可是近似公式 (53) 仍然成立.

如果劈是二玻璃板间的空气膜，而且如果忽略前一板中折射的影响，则可令 (53) 式中 $n = n' = 1$，$AP \sim \rho\sin\theta$，所以角 $OPA \sim \pi/2$. P 点的轨迹是一个圆，以 OS_1 为直径，这里 S_1 是 S 在劈前表面中的反射象(图 7.36).

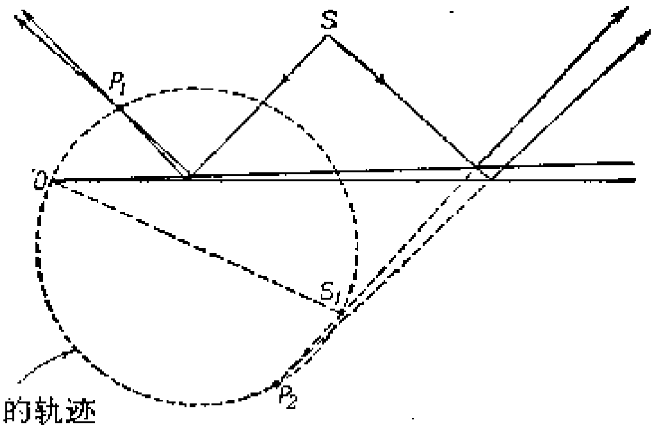


图 7.36 空气劈上截面内条纹的定域(忽略界面上的折射影响)

如果 S 离劈很远，以致所有入射光线可以认为与 SA 平行[1]，则 θ 因而 θ' 及 ϕ 均与 ρ 无关，并且从 (52) 式可以看到，AP 与 ρ 成正比. 这时，P 点的轨迹是一个通过劈棱的平面(图 7.37)；利用 (53) 式和关系式 $AN = \rho\sin\theta$，可以求得这定域平面与垂直于反射光束的平面的夹角 γ 为

$$\tan\gamma = \frac{AN - AP}{ON} \sim \left(\frac{n'^2 - n^4}{n'^2 - n^2\sin^2\theta}\right)\tan\theta. \tag{54}$$

显然，当 $\theta = 0$ 时，$\gamma \sim 0$，所以在正入射光下，定域平面与劈的前表面实际重合.

现在我们考虑 P 点的光程差 $\Delta\mathscr{S}$. 从图 7.35(a)可知，当 P 点

---

1) 在斐索装置中(§7.5.2)这条件是严格满足的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

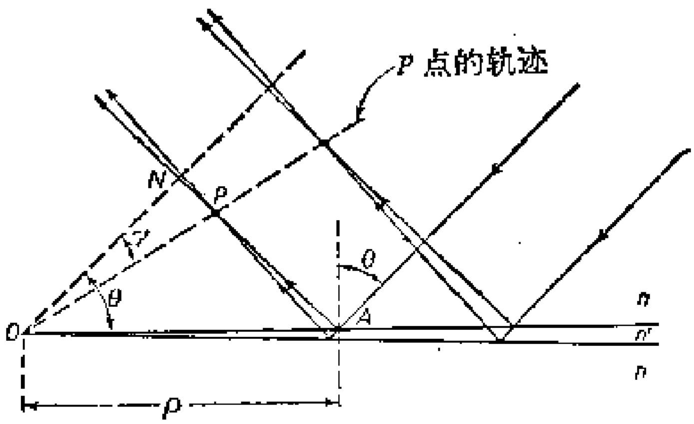


图 7.37 当光源在无穷远时劈条纹的定域

是实点时,

$$\Delta\mathscr{S} = n'(AB + BC) + n(CP - AP). \tag{55}$$

利用(43)和(44)式,当 α 很小而 θ' 不太接近 $\pi/2$ 时,

$$AB + BC = \frac{2\rho\sin\alpha\cos\alpha}{\cos(\theta' - 2\alpha)} \sim \frac{2h}{\cos\theta'}, \tag{56}$$

式中

$$h = \rho\tan\alpha \tag{57}$$

是劈在 A 点的厚度,并且在这近似式中我们略去了所有 α 的幂次项。类此,由(43)—(47)各式

$$CP - AP = \frac{-2\rho\sin\alpha\sin\left(\theta - \frac{\phi}{2}\right)\sin(\theta' - \alpha)}{\cos\frac{\phi}{2}\cos(\theta' - 2\alpha)}$$

$$\sim -\frac{2h\sin\theta\sin\theta'}{\cos\theta'}. \tag{58}$$

因此,由(55)、(56)、(58)和(48)式,得出

$$\Delta\mathscr{S} \sim 2n'h\cos\theta', \tag{59}$$

而 P 点相应的位相差为

$$\delta \sim \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta' = \frac{4\pi h}{\lambda_0}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta}. \tag{60}$$

用同样方法可以证明,在图 7.35(b) 的情况,即当 P 点是虚点时,上列近似式也仍然成立。当把劈的一个表面上发生的反射相变 π

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

考虑进来时，根据(60)和§7.2(16)式，当

$$2n'h\cos\theta' \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{61a}$$

时，P点强度是极大，而当

$$2n'h\cos\theta' \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\cdots \tag{61b}$$

时，P点强度是极小。显然，在定域平面内，θ'为定值的各条纹是等距的，而且平行于劈棱。

最后，我们来看看，光源可从S向外扩展到多大而仍不显著减小P点条纹的可见度。为此，设想把一个点光源放在P点，来决定光经劈前、后表面反射后到达S点时的波阵面W_1、W_2的曲率半径R_1、R_2（图7.38）。W_1是球面，它的曲率中心在AS上P_1点，这里P_1点是P在劈前表面中的反射象。因此，

$$R_1 = SP_1 = SA + AP. \tag{62}$$

W_2一般不是球面。先考虑它在劈主截面内的曲率半径。在C点折射后，曲率中心P'位于BC上，位置由§4.6的公式(21)给出。采用§4.6的符号时，有$n_0 = n$，$n_1 = n'$，$r_y = \infty$，$\theta_0 = \theta - \phi$，$\theta_1 = \theta' - 2\alpha$，$d_0^{(t)} = CP$，$d_1^{(t)} = CP'$，因而按§4.6(21)式，

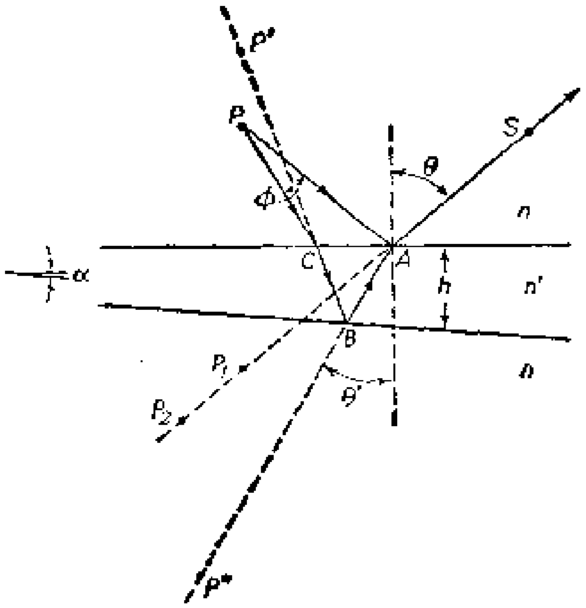


图7.38 一个点光源的波阵面经平面劈表面反射和折射后的曲率中心

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{n'\cos^2(\theta' - 2\alpha)}{n\cos^2(\theta - \phi)}. \tag{63}$$

在B点反射后，曲率中心位于AB上的P''点，这里P''是P'在劈后表面中的反射象；最后在A点折射后，曲率中心位于AS上的P_2点，这里，按§4.6(21)式（用$n_0 = n'$，$n_1 = n$，$r_y = \infty$，$\theta_0 = \theta'$，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\theta_1 = \theta$, $d_0^{(1)} = AP'$, $d_1^{(1)} = AP_2$),

$$\frac{AP_2}{AP''} = \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}. \tag{64}$$

因此，W_2 在劈主截面内的曲率半径 R_2 为

$$R_2 = SP_2 = SA + AP_2, \tag{65}$$

按(64)式和关系式 $AP'' = AB + BC + CP'$，上式中

$$AP_2 = \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}(AB + BC + CP'); \tag{66}$$

或者，利用(63)式，

$$AP_2 = \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}(AB + BC) + \frac{\cos^4\theta\cos^2(\theta' - 2\alpha)}{\cos\theta'\cos^2(\theta - \phi)}CP. \tag{67}$$

当 α 很小时，此式化为

$$AP_2 \sim \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}(AB + BC) + CP$$

$$\sim \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}\cdot\frac{2h}{\cos\theta'} + AP - \frac{2h\sin\theta\sin\theta'}{\cos\theta'}, \tag{68}$$

式中应用了关系式(56)和(58)。从(62)、(65)和(68)式我们最后得到

$$R_2 - R_1 \sim \frac{2h}{\cos\theta'}\left(\frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'} - \sin\theta\sin\theta'\right). \tag{69}$$

用类似方法可以推导 W_2 在垂直于劈主截面的截面内的相应表示式。这时必须利用§4.6(22)式来代替§4.6(21)式；因而(63)和(64)式相应换成

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{n}{n}, \quad \frac{AP_2}{AP''} = \frac{n}{n'}, \tag{70}$$

由此得到，在垂直于劈主截面的截面内，W_2 与 W_1 的曲率半径之差

$$R_2 - R_1 \sim \frac{2h}{\cos\theta'}\left(\frac{n}{n'} - \sin\theta\sin\theta'\right). \tag{71}$$

正象我们前面所指出的，(33)和(42)式表示，如果光源围绕 SA 的径向扩展不超过 $\sqrt{\lambda_0 R_1 R_2/2n|R_1 - R_2|}$，则 P 点的可见度减小

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

得不明显。现在,当 θ 不太接近 $\pi/2$ 时,从(69)和(71)式可以看出,R_2-R_1 是 h 的量级;因此,如果像斐索装置情况那样,R_1 比起 h 来足够大,则可取 $R_2/R_1\sim1$. 在这近似下,从 P_1 点来看,光源可容许的角半径为

$$\varepsilon\sim\frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{\lambda_0R_1R_2}{2n|R_1-R_2|}}\sim\sqrt{\frac{\lambda_0}{2n|R_1-R_2|}}. \tag{72}$$

特别是,在正入射附近,(69)和(71)式给出 $R_2-R_1\sim2hn/n'$,因而(72)式变成

$$\varepsilon\sim\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\lambda_0n'}{h}}. \tag{73}$$

对于一个薄空气膜,典型值是: $h=0.01$ 厘米,$n'=n\sim1$, $\lambda_0=5500$ 埃,这时(73)式给出 $\varepsilon\sim2°$. 显然,可容许的光源扩展正比于 $\sqrt{1/h}$; 例如,同样在上述情况,但令 $h=1$ 厘米,则按(73)式,ε 约为 12 弧分. 这样,正如我们在讨论斐索干涉仪时曾经说过的,当劈不薄时,只要光源足够小,仍可获得高可见度的条纹.

§7.5.4 迈克耳孙干涉仪

在 §7.5.1 和 §7.5.2 的装置中,除去在板或膜界面之间的区域,都有两束光叠加. 这对某些应用是很不便的;如果用一辅助半反射面来产生这些光束,就可避免这一点,这时两束光在重新会合以前可以完全分开. 这种装置是迈克耳孙干涉仪[1]的基础.

这仪器的最简单形式如图 7.39 所示. 从扩展光源 S 来的光,在平行平面玻璃板 D 的半反射面 $\mathscr{A}$ 上分成相互垂直的两束光. 这两束光分别从平面镜 M_1、M_2 上反射回到 D, 在这里重新会合,进入观察望远镜 T. M_2 是固定的,而 M_1 安装在一个坐架上,靠调节测微螺旋能使它向 D 或离 D 移动. 经 M_1 反射的那束光在到达 T 以前从 D 的色散材料中通过三次,相比之下,经 M_2 反射的那束光只通过一次. 这种不对称性妨碍利用白光条纹,为了消

1) A. A. Michelson, *Amer. J. Sci.* (3), **22** (1881), 120; *Phil. Mag.* (5), **13** (1882), 236.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

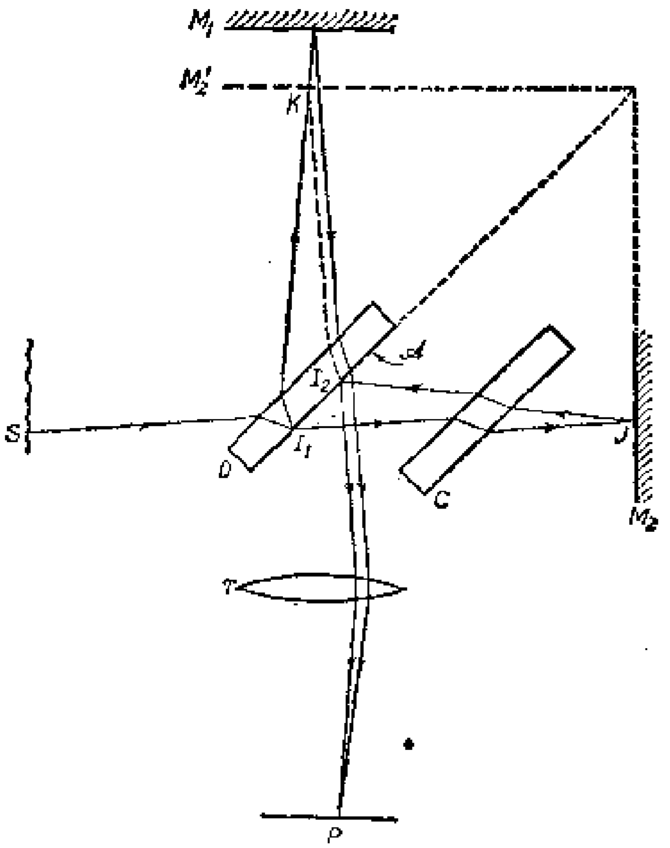


图 7.39 迈克耳孙干涉仪

除这种不对称性，在 D 和 M_2 之间放进一块补偿板 C，它的材料和厚度与 D 完全相同，而且板面与 D 平行。

设 M_2' 是 M_2 在分束器中的象。从 S 到 P，光线 SI_1JI_2P 经过 $\mathscr{A}$ 上的透射，M_2 上的反射，而光线 SI_1KI_2P 经过 $\mathscr{A}$ 上的反射，虚面 M_2' 上的反射，但二者光程相等。因此，可以认为，望远镜观察的干涉图样是由实反射面 M_1 和虚反射面 M_2' 之间的空气膜所产生，但是这里要给 M_2' 一个位相变化 ϕ，它等于 $\mathscr{A}$ 上外反射与内反射相变之差。ϕ 值取决于半反射镜 $\mathscr{A}$ 的性质。

当 M_1 和 M_2' 平行时，准单色光源所产生的条纹是圆形的，并且定域在无穷远。它们与 § 7.5.1 中所讨论的等倾条纹的差别，仅在于这里没有多次反射，所以强度分布严格合乎 § 7.2(15) 式。如果移动 M_1 使它趋近 M_2'，则条纹向中心收缩，而图样的角尺度增加，直到 M_1 与 M_2' 重合，视场照度均匀时为止，其亮暗程度取决于 ϕ。这时镜子 M_1 和 M_2 称为是**光学接触**的。当 M_1 和 M_2' 靠得很

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

近，但相互倾斜形成一个小角度的劈时，则有条纹定域在劈表面上或劈表面附近．如果 M_1 和 M_2' 间距足够小，则这些条纹是等厚条纹，因而是平行于劈棱的等距直线．然而，随着 M_1 和 M_2' 间距的增加，视场各点所对应的入射角的范围，以及视场上平均入射角的变化，都不再可以忽略；这时条纹的可见度下降，而且条纹变弯曲，凸向劈棱一边．

不管 M_1 和 M_2' 是平行还是倾斜，当仪器二臂之一光程改变 $\Delta m \cdot \lambda_0$ 时，图样都将发生 Δm 序的位移．用目视观测时，位移可估计到约 1/20 序，然而，在某些情况下，用肯尼迪(R. J. Kennedy)[1)]方法可探测小到千分之一序的位移[2)]．

当 M_1 和 M_2' 的间隔只有几个波长时，用白光能看到条纹．白光条纹可用来认出单色图样中的一个参考条纹．如果 $|\phi| = \pi$，则白光图样的中央条纹是暗的，它定出了 M_1 与 M_2' 的交线，所以，它与 $|m| = \frac{1}{2}$ 的单色条纹位于同一位置；在其它情况下，这一消色差条纹一般不与单色图样的一个亮条纹或暗条纹相重合，但是，如果白光图样与单色图样之间的转换是始终条件一致的话，这也没有困难．

除了使用准直照明的那种变式(§ 7.5.5)以外，迈克耳孙干涉仪现在已经淘汰，但是它仍闻名于世，这是因为迈克耳孙曾用它作了下列三个重要实验：(迈克耳孙)-莫雷(Morley)以太漂移实验[3)]；首次系统研究光谱线的精细结构；以及首次直接将光谱线的波长与标准米进行比较[4)]．在本书中，我们不讨论上述第一个实验，因为我们只注意静止媒质光学；而且我们也不打算介绍第三个实验，因为在那之后，有其它方法(§ 7.7)作了更精确的测量．迈克耳孙分析光谱线的方法也已被更直接的方法所取代，但是由于它

1) R. J. Kennedy, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **12** (1926), 621.
2) K. K. Illingworth, *Phys. Rev.* (2), **30** (1927), 692.
3) A. A. Michelson and E. W. Morley, *Phil. Mag.* (5), **24** (1887), 449.
4) A. A. Michelson and J. R. Benoit, *Trav. et Mem. Int. Bur. Poids et Mes.*, **11** (1895), 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在理论上有重要意义，并且由于它与部分相干理论有关，所以我们将在后面（§ 7.5.8）对它进行详细讨论.

§ 7.5.5 特怀曼（Twyman）-格林（Green）干涉仪和有关干涉仪

如果迈克耳孙干涉仪用准单色点光源 S 照明，点光源置于精心校正的透镜 L_1 的焦点上，并且从干涉仪出来的光用另一块精心校正的透镜 L_2 加以会聚，则这装置就等效于斐索干涉仪，但是，这时两束光的光路被完全分开（图 7.40）．设 W_1 是 M_1 反射光束中的一个平面波阵面，W_2 是 M_2 反射光束中与 W_1 对应的平面波阵面；并且设 W_1' 是 W_1 在分束器中的虚象．因此，在 W_2 上 P 点虚相交的二条出射光线之间的光程差为

$$\Delta\mathscr{S} = nh, \tag{74}$$

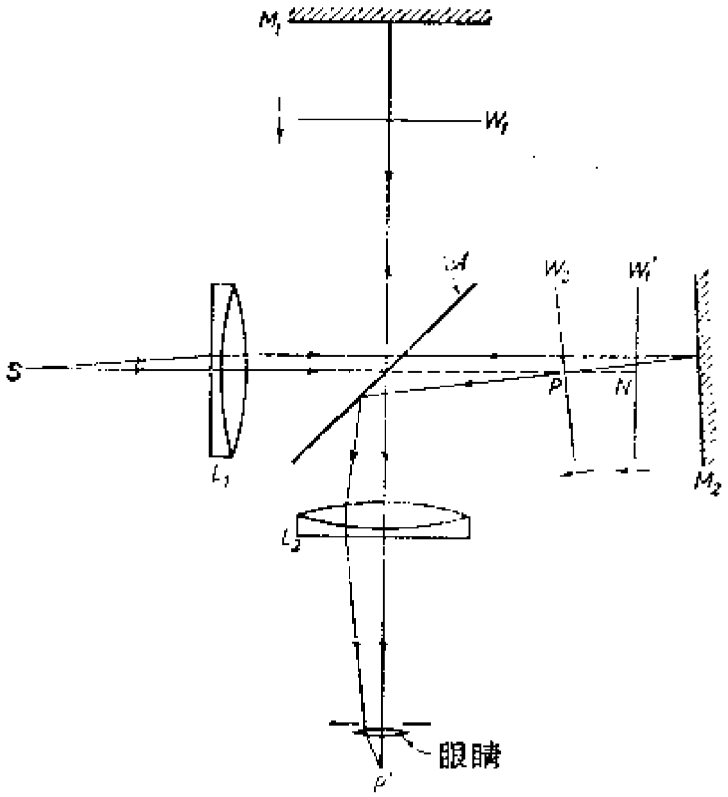


图 7.40 用准直光照明的迈克耳孙干涉仪

式中 $h = PN$ 是从 W_1' 到 P 点的法线距离，n 是 W' 和 W_2 之间媒质的折射率．相应的位相差为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} nh;\tag{75}$$

按照 (75) 和 § 7.2(16) 式，当眼睛放在 L_2 的焦平面上并聚焦于 W_2 上时(必要时借助一辅助透镜)，如果

$$nh = m\lambda_0,\quad |m| = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\tag{76a}$$

则将看到 P 点有一亮条纹，而如果

$$nh = m\lambda_0,\quad |m| = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \cdots\cdots,\tag{76b}$$

则 P 点有一暗条纹． 这样，一般形成的是直线条纹，这些条纹与 W_1' 和 W_2 夹劈的劈棱平行；如果适当调节 M_1 的取向，使 W_1' 和 W_2 平行，则视场照明均匀．如果光源是一个点，则条纹是非定域的，但实际上，出于强度上的考虑，光源的扩展不能忽略．因为出射光线的光路相当于 M_2 和 M_1' 夹劈的反射，这里 M_1' 是 M_1 在分束器中的虚象，所以同斐索条纹情况 (第 387 页) 一样，用扩展光源时，条纹就定域于该劈附近；当 M_1' 和 M_2 相重时，可容许的光源扩展为最大．另一方面，由于光源偏离单色性，因而只有当两臂光程足够接近相等时，才看得到条纹．应该注意，如果装置对 $\mathscr{A}$ 不对称，则等光程条件与 M_1' 和 M_2 相重条件一般不能同时满足．

特怀曼和格林[1]首先对迈克耳孙干涉仪作了这一修改，用它来检验光学元件．元件插在臂 M_2 中，光路安排成这样：如果元件完美无缺，则返回的波阵面 W_2 应当是平面． 因为按照 (76) 式，各亮条纹可以看作是以 W_1' 为基准时 W_2 的等高线，高度间隔为 λ_0 (取空气的 $n = 1$)，所以可以测量光通过元件两次所造成的 W_2 的畸变． 畸变的正、负可从 M_1 远离分束器时条纹的运动方向来定出．最小偏向位置上棱镜的检验装置[2] 如图 7.41(a) 所示． 所观察的条纹与棱镜的一个表面相重合，可由观察者描绘于该处，作为下一步局部抛光的指导．用这种方法可补偿掉棱镜材料内部折

1) F. Twyman and A. Green, *British Patent* No. 103832 (1916).
2) F. Twyman, *Phil. Mag.* (6), **35** (1819), 49.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

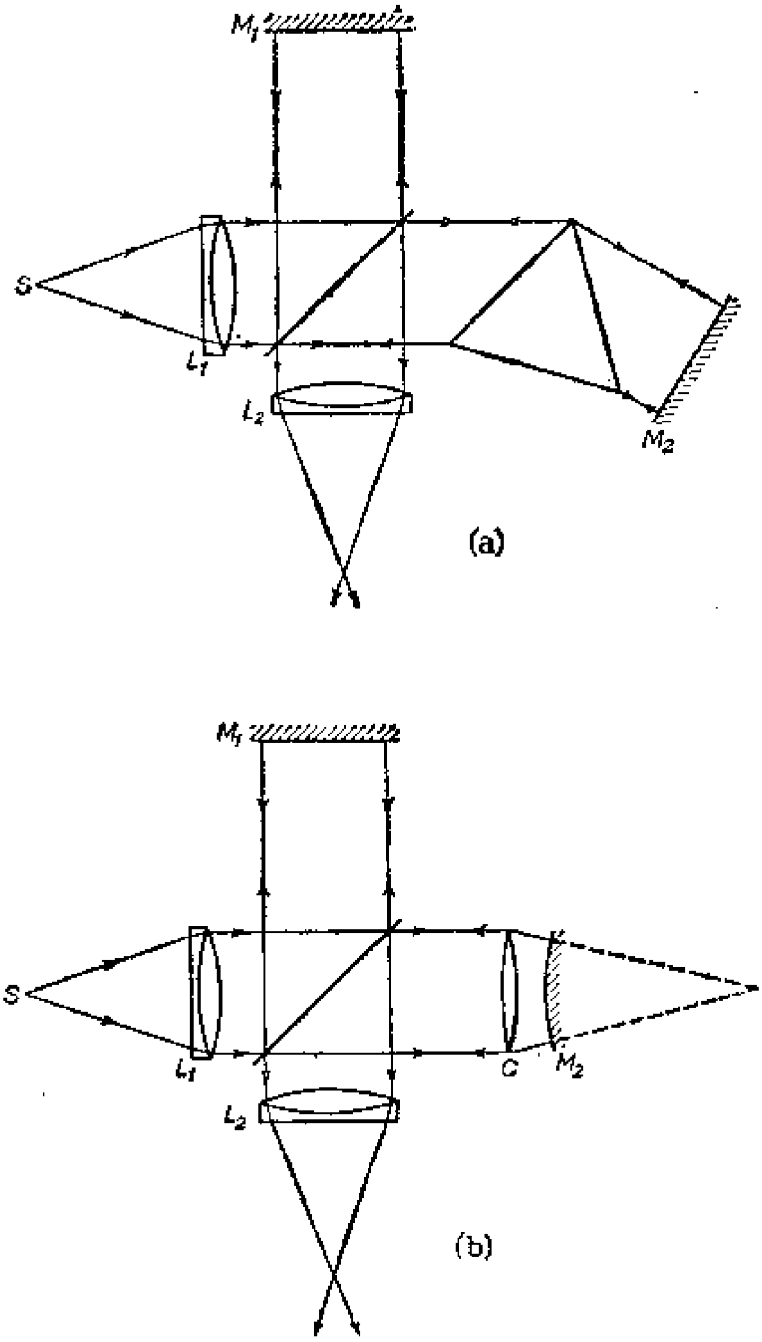


图 7.41 特怀曼-格林干涉仪

(a) 检验棱镜的装置

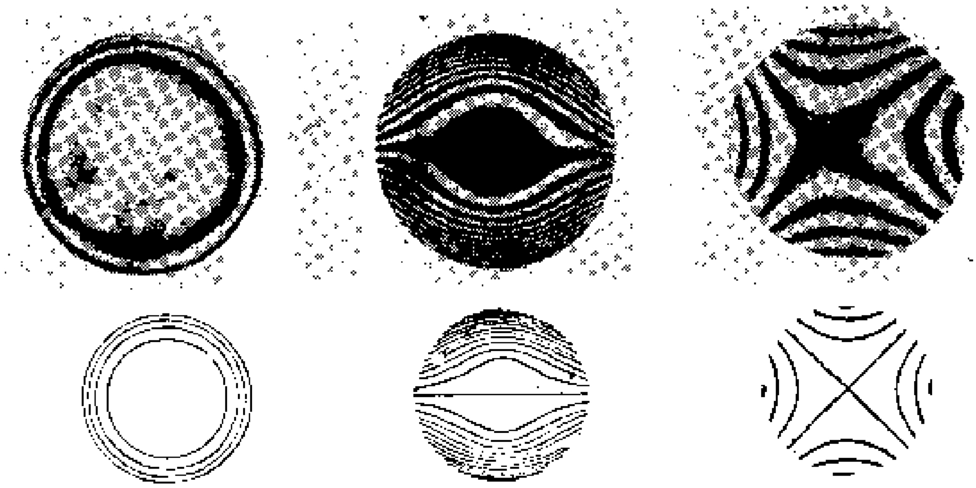
(b) 检验照象机透镜的装置

射率的变更. 图 7.41(b)是一个检验照象机透镜用的装置[1]. M_2 是一个凸球面反射镜，其曲率中心在被检验透镜 C 的焦点上. 透

1) F. Twyman, *Phil. Mag.* (6), **42** (1921), 777.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

镜 C 可绕垂直于其光轴的一条线转动，以便能在不同倾斜下进行检验，同时用一个机械联动装置使 M_2 的曲率中心在透镜转动时保持在其焦平面内．条纹所表明的缺陷对应透镜孔径上哪些点，这有一些不确定，因为，当透镜有缺陷时，光线从中来回并不同路．如果使 M_2 的曲率半径尽可能大，而且采用适当的光学系统来观察 M_2 表面上的虚条纹图样，则可减小这不确定．这种条纹图样的照片与相应的计算图样一并列在图 7.42 中．



(a) 球面象差 $\Phi_{极大}=0.4\lambda_0$ 高斯焦平面

(b) 彗差 $\Phi_{极大}=2\lambda_0$ 高斯焦平面

(c) 象散 $\Phi_{极大}=2.1\lambda_0$ 中央平面

图7.42 显示透镜初级象差的特怀曼-格林干涉图样．$\Phi_{极大}$是出射光瞳中的最大波象差．上面的图样是观察到的，下面的图样是计算得到的．[引自 R. Kingslake, *Trans. Opt. Soc., London*, **27** (1927), 94.]

科斯特 (Kösters) 干涉仪[1] 应用特怀曼-格林装置来测量端规的长度(图 7.43(a))．先把端规 G 与镜 M_2 贴紧；而后把镜 M_1 的位置调节到使等效虚反射面 M_1' 大致在 M_2 和 G 上表面的中间，并与它们倾斜成一适当的小角度．这样，当采用准单色光源时，即可看到 M_2 和 G 上有平行等距条纹，其走向与 G 的一个边垂直 (图 7.43 (b))．G 的长度用剩余小数法求得，这在前面§7.5.2 讨论 N. P. L. (英国国家实验室)测规干涉仪时已经介绍过了．显然，这两种仪

1) W. Kösters, *Handbuch der Physikalischen Optik*, Vol. I (Ed. by E. Gehrcke, Leipzig, Barth, 1927), p. 484.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

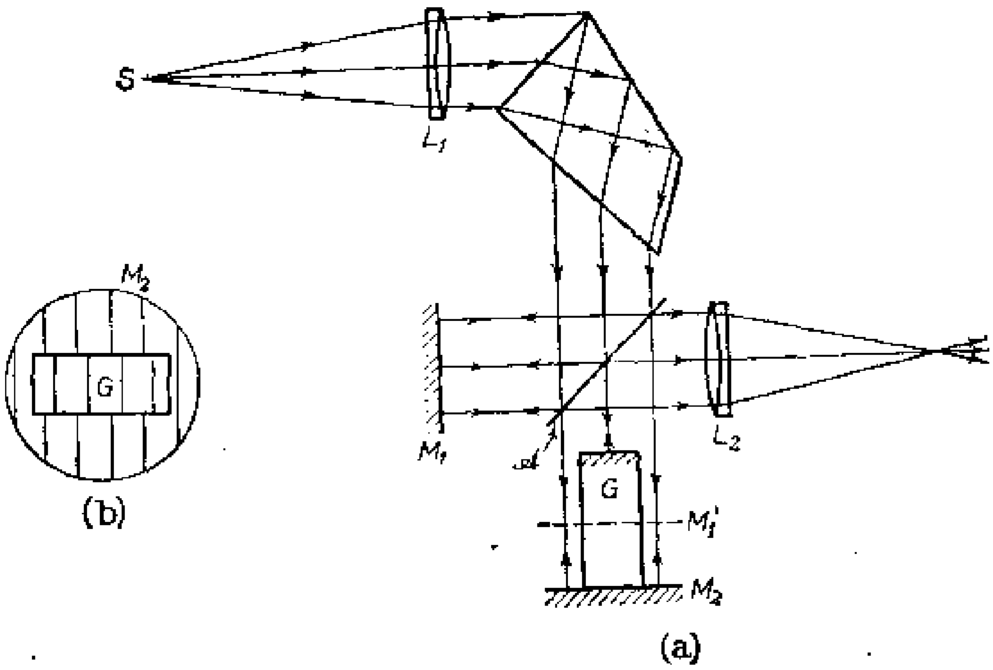


图 7.43 多耳干涉仪

(a) 装置 (b) 视场

器十分相似[1].

我们还可以提一提一种类似的干涉仪——多耳(Dowell)端规干涉仪[2](图 7.44(a))——它能比较两个端规的长度，而无需与一基准面贴紧.设 A_1'、A_2' 是规 G_1、G_2 的端面 A_1、A_2 在 M_1 中的虚象；B_1'、B_2' 是端面 B_1、B_2 在 M_2 和分束器中的虚象. 四个虚反射平面 A_1'、A_2'、B_1'、B_2' 安排得看上去是相互交叠的(图 7.44(b))，而干涉效应可以认为是产生于它们之间的各个劈形空气膜. 调节 G_1，使得在单色光下在 A_1' 和 B_1' 的公共区域上产生水平条纹图样(i)，而后用白光辨认出其零序条纹，并将它调节到视场中央. 接着调节 G_2，使 A_2' 与 A_1' 共面. 这时，因为 B_2' 平行于 B_1'，所以在 B_2' 和 A_1'、A_2' 的公共区域上有同样的水平条纹图样(ii)、(iii)，二者零序条纹相重合. 在这情况下，B_2' 和 B_1' 之间的距离 d 就是两块端规的长

1) 在两种装置中，要能观察到足够可见度的条纹，反射面的间距都有一个上限；它取决于光源的角幅度(§7.5.3)和它对单色性的偏离程度(§7.5.8). 由于科斯特装置允许辅助反射面 M_1' 位于规两端的中间，所以在同样的光源下，它能测量的最大端规长度比 N. P. L. 仪器约大一倍.

2) J. H. Dowell, *British Patent* No. 555672, (1942).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

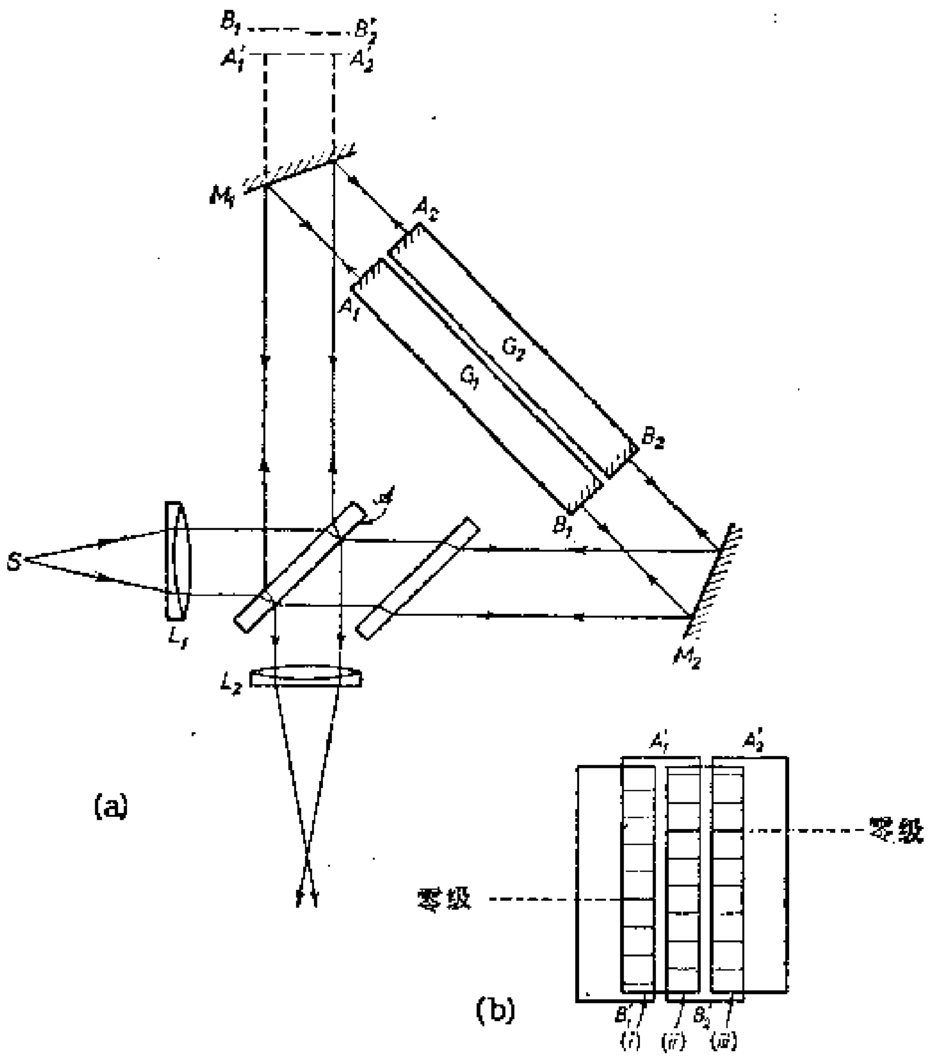


图 7.44 多尔端规干涉仪

(a) 装置 (b) 视场

度差，由 $d=\lambda_0\Delta m/2n$ 给出，式中 Δm 是图样 (i) 与图样 (ii) 之间的序位移. 采用剩余小数法时，这仪器还可以用来测量单个端规的长度.

§7.5.6 两块全同板产生的条纹：雅满 (Jamin) 干涉仪和干涉显微镜

设用一个准单色点光源 S 照射两块透明的平行平面板，板的厚度都是 h，折射率都是 n'，二者一前一后，相互倾斜成一个很小的角度 α (图 7.45). 如果我们忽略经受两次以上板面反射的那些

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

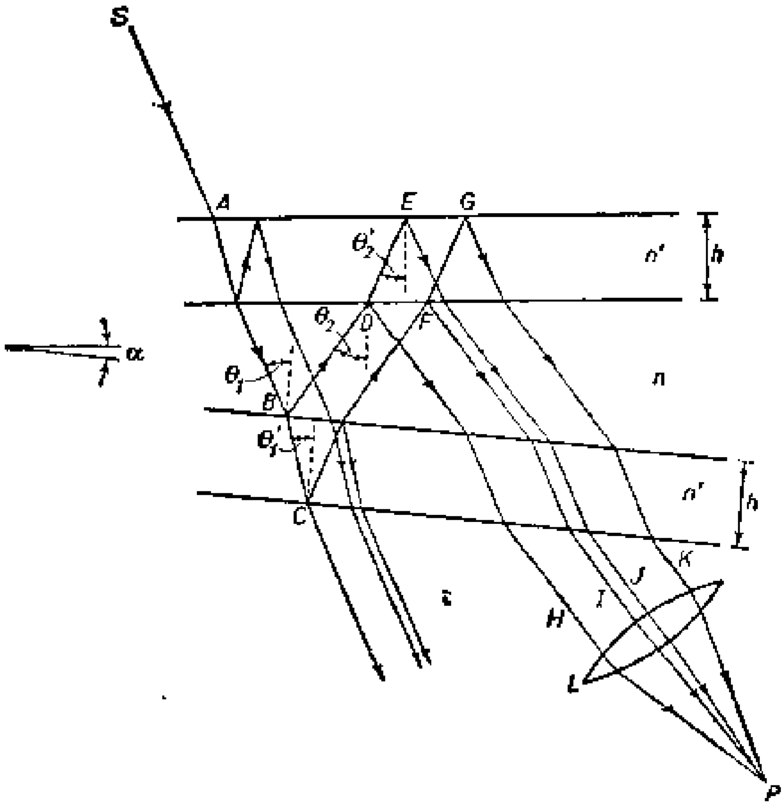


图 7.45 两块全同平行平面板：无穷远定域条纹形成图示

光线，则一条入射光线 SA 将产生两组平行透射光线．第一组包括直接透射的一条光线和分别在其中一板的两个面上反射的两条光线．第二组——$SABDH$、$SABCFI$、$SABDEJ$ 和 $SABCFGK$——包括在每块板的一个面上各反射一次的 4 条光线；这些光线各从两板之间通过三次，而且与第一组光线的夹角为 2α．

第二组光线可以在透镜 L 焦平面上 P 点重新会合．如果用 $\mathscr{S}_1$、$\mathscr{S}_2$、$\mathscr{S}_3$ 和 $\mathscr{S}_4$ 分别表示这些光线从 S 到 P 的光程，则由 §7.5(5)式，有

$$\mathscr{S}_2 - \mathscr{S}_1 = \Delta\mathscr{S}_{21} = 2n'h\cos\theta_1', \tag{77a}$$

$$\mathscr{S}_3 - \mathscr{S}_2 = \Delta\mathscr{S}_{32} = 2n'h(\cos\theta_2' - \cos\theta_1'), \tag{77b}$$

$$\mathscr{S}_4 - \mathscr{S}_3 = \Delta\mathscr{S}_{43} = 2n'h\cos\theta_1', \tag{77c}$$

式中 θ_1' 和 θ_2' 分别为第二块板中 B 点处的折射角和第一块板中 D 点处的折射角．因为当 P 点给定时，角 θ_1' 和 θ_2' 只依赖于二板的取向，所以各光程差 $\Delta\mathscr{S}$ 与 S 的位置无关，因而用扩展光源时，可有干涉图样形成在 L 的焦平面上．只要入射角的范围不太大，这图

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

样就不会与第一组光线的光交叠. 此外，因为 $\cos\theta_1' \sim \cos\theta_2'$，当 h 足够大时，$\Delta\mathscr{S}_{21}$ 和 $\Delta\mathscr{S}_{43}$ 比 $\Delta\mathscr{S}_{32}$ 大得多，所以我们可以使用而样一个光源，使得条纹清晰条件§7.3(15)式对 $\Delta\mathscr{S}_{32}$ 成立，这对 $\Delta\mathscr{S}_{21}$ 和 $\Delta\mathscr{S}_{43}$ 不成立. 在这情况下，可以认为条纹图样只与 $SABCFI$ 和 $SABDEJ$ 这样的光线有关；其它光线只产生实际均匀的背景，使条纹可见度有所下降而已.

由(77b)，P 点对应于 $\Delta\mathscr{S}_{32}$ 的位相差为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n'h(\cos\theta_2' - \cos\theta_1'); \tag{78}$$

利用折射定律，此即

$$\delta = \frac{4\pi h}{\lambda_0}\left(\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta_2} - \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta_1}\right), \tag{79}$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别为 B 点和 D 点处的入射角，n 是板周围媒质的折射率. 为了弄清楚条纹的形式，我们选取直角坐标轴 OX、OY、OZ，令其原点 O 位于透镜 L 的第二节点上，OZ 平行于二板夹劈的劈棱(图 7.46). 设 XOY 平面上的 N_1 点是 B 点处正反射光 $(\theta_1 = 0)$ 的焦点；设 N_2 点(也在 XOY 平面上)是 D 点处正反射光

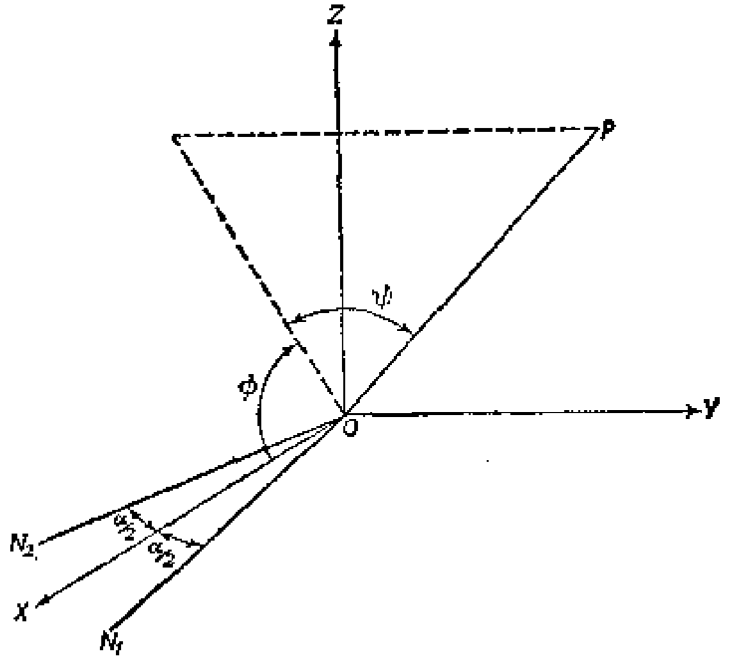


图 7.46 两块相互倾斜的平行平面板在无穷远处产生的条纹讨论图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$(\theta_2=0)$的焦点;并设 OX 为 ON_1 和 ON_2 夹角的内等分线. 因此, 如果劈朝 OY 方向张开, 则 ON_1 和 ON_2 的方向余弦分别为 $\{\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0\}$, $\{\cos(\alpha/2), -\sin(\alpha/2), 0\}$. 设 OP与平面 XOZ 成 ψ 角,并设 OP 在这平面上的投影与 OX 成 ϕ 角. OP 的方向余弦为 $(\cos\psi\cos\phi, \sin\psi, \cos\psi\sin\phi)$, 并因角 $PON_1=\theta_1$, $PON_2=\theta_2$, 所以

$$\cos\theta_1=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\psi\cos\phi+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi, \tag{80a}$$

$$\cos\theta_2=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\psi\cos\phi-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi. \tag{80b}$$

当 α 角很小时, 我们可以忽略 $\cos(\alpha/2)$ 和 $\sin(\alpha/2)$ 展开式中包含 α 二次幂和高次幂的项,所以从(80)式,得到

$$\cos^2\theta_1=\cos^2\psi\cos^2\phi+\alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi, \tag{81a}$$

$$\cos^2\theta_2=\cos^2\psi\cos^2\phi-\alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi. \tag{81b}$$

因此,从(79)和(81)式,得到

$$\delta=\frac{4\pi h}{\lambda_0}\left\{\sqrt{n'^2-n^2(1-\cos^2\psi\cos^2\phi+\alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi)}\right.$$
$$\left.-\sqrt{n'^2-n^2(1-\cos^2\psi\cos^2\phi-\alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi)}\right\}, \tag{82}$$

按 α 幂次展开并仍略去 α 一次幂以上各项,得到

$$\delta=-\frac{4\pi h}{\lambda_0}\frac{n^2\alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi}{\sqrt{n'^2-n^2(1-\cos^2\psi\cos^2\phi)}}. \tag{83}$$

这样,按照(83)和§7.2(16)式,当

$$\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\phi}{\sqrt{n'^2-n^2(1-\cos^2\psi\cos^2\phi)}}=\frac{m\lambda_0}{2n^2h\alpha},\quad |m|=0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{84a}$$

时, P 点将产生一个亮条纹,而当

$$\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\phi}{\sqrt{n'^2-n^2(1-\cos^2\psi\cos^2\phi)}}=\frac{m\lambda_0}{2n^2h\alpha},$$
$$|m|=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\cdots \tag{84b}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，P 点将产生一个暗条纹.

当 P 十分靠近平面 XOZ 以致 ϕ 很小时，干涉序 m 很低，因而在这区域内，用白光能观察到条纹. 中央白色条纹 ($m=0$) 在平面 XOZ 内，是由 $\theta_1=\theta_2$ 的光所形成.

在正入射附近观察的特殊情况下，ψ 和 ϕ 都很小，因而可忽略 ψ 和 ϕ 的二次项和高次项，这时 (84a) 式化为

$$\phi=\frac{mn'\lambda_0}{2n^2h\alpha},\quad |m|=0,1,2,\cdots\cdots, \tag{85}$$

因此，准单色光的条纹是等距的直线，平行于两板夹劈的劈棱. 相邻亮条纹的角距离与板的折射率成正比，与板的厚度和夹角成反比. 这种条纹是布儒斯特首先观察到的，因而称为**布儒斯特条纹**.

雅满干涉仪采用的就是这类条纹[1] 这个干涉仪曾一度广泛用于测量气体的折射率，虽然它现在已被瑞利干涉仪 (§ 7.3.5) 所取代. 这仪器主要由两块同样厚度、同样折射率的平行平面玻璃板组成，板面 M_1、M_2 镀了不透明的银膜，其装置如图 7.47 所示. 从

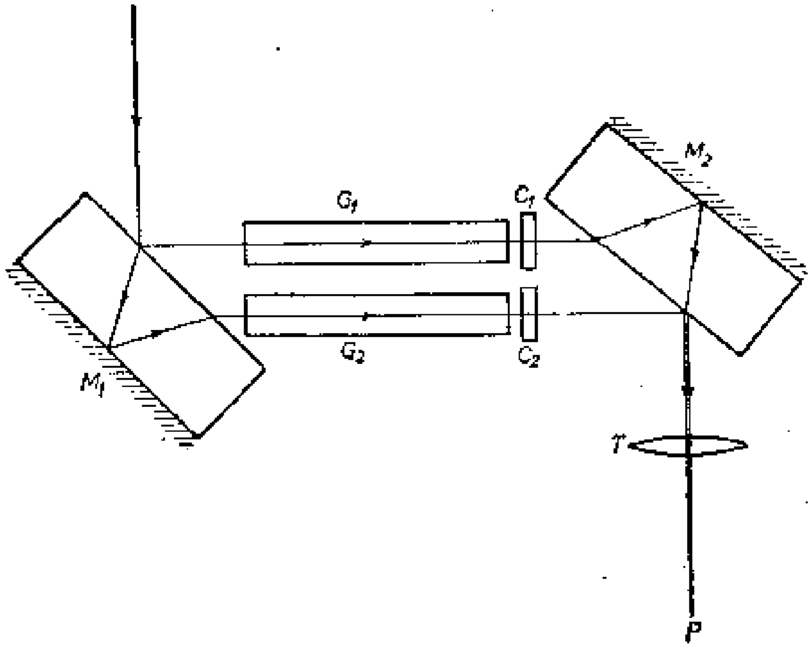


图 7.47 雅满干涉仪

1) J. Jamin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **42** (1858), 482.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

扩展光源来的一束光，在大约 45° 角下入射到第一块板上，最后产生两束光，一束光从第一块板的前表面上和第二块板的后表面上反射，另一束从第一块的后表面上和第二块的前表面上反射；这两束光在望远镜 T 的焦平面上重新会合，产生干涉图样. 两板的厚度是这样大小，当加上适当的光阑时，二光束在两板之间可完全分开，可于其中放入类似于 § 7.3.5 中所描述的气室 G_1、G_2 和补偿板 C_1、C_2. 使用时，使两板倾斜，形成一个小角度的劈，并令劈棱平行于图 7.47 的平面，我们取这平面为水平面. 板面是接近垂直的，所以，当采用图 7.46 的符号时，平面 XOZ 是接近水平的；这时观察区对应很小的 ϕ，因而由 (84a)，亮条纹由下式给出：

$$\frac{\cos\phi}{\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\phi}}\phi = \frac{m\lambda_0}{2n^2h\alpha}, \quad |m| = 0, 1, 2, \cdots\cdots. \tag{86}$$

现在 $\phi \sim 45°$，而且在小角度视场范围内，$\sin\phi$ 和 $\cos\phi$ 的变化可以忽略，因此条纹顺沿着 $\phi =$ 常数的轨迹，即它们是水平的，而且是等距的. 它们是低序的，因而通过适当调节可将零序条纹 ($\phi = 0$，可用白光条纹辨认) 调到视场中央[1].

雅满干涉仪的使用方法和以前所描述的瑞利干涉仪相似，所不同的是这里没有第二套条纹系统作为基准标记，而是靠望远镜中的十字叉丝来定位. 因此这仪器比瑞利干涉仪容易受到光学系统的干扰，因而测量精度较低.

瑟克斯 (J. A. Sirks)[2] 和普林谢姆(E. Pringsheim)[3] 先后研制了雅满干涉仪的一种变式，用它来测量小物体的折射率，其中用两块稍带劈形的板取代了平行平面板. 两块板安装成二劈棱反平行，朝里的两个未镀银面接近平行 (图 7.48). 照明用准直光. 设 SA 是

---

1) 如果两板倾斜成这样，形成一个劈棱垂直的劈时，则 XOY 平面是水平的. 这时，观察区对应很小的 ϕ，强度极大由 (84a) 给出：

$$\frac{\cos\phi\sin\phi}{\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\phi}} = \frac{m\lambda_0}{2n^2h\alpha}, \quad |m| = 0, 1, 2, \cdots\cdots.$$

条纹仍顺沿着 $\phi =$ 常数的轨迹，但是这时它意指条纹是垂直的，而且在 $\phi \sim 45°$ 时，干涉序不接近零，因此两板这样取向时不能产生白光条纹.

2) J. A. Sirks, *Hd. Ned. Nat. en Geneesk. Congr., Groningen* (1893), p. 92.

3) E. Pringsheim, *Verh. Phys. Ges. Berlin*, **17** (1898), 152.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

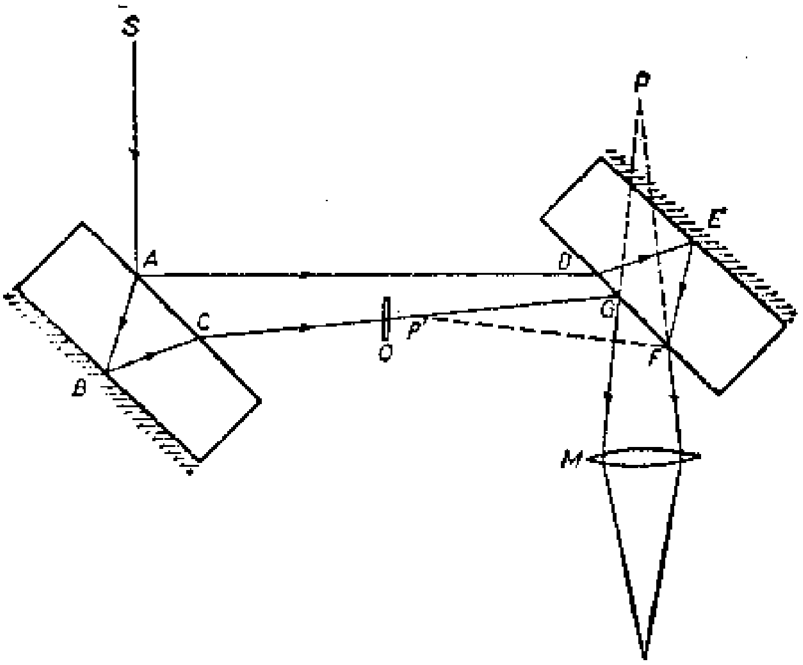


图 7.48 瑟克斯-普林谢姆干涉仪

劈上截面内的一条入射光线，它产生 $SABCG$，$SADEF$ 两条光线，这两条光线离开第二块板后虚交于它后面某点 P；当光源是准单色的并且扩展不太大时，可看到有条纹定域在 P 点附近，可用显微镜 M 观察之。P 点条纹的走向垂直于两条出射光线所确定的平面，即平行于劈棱。待检物体放在两板之间光线 CG 的光路上。P 点在第二块板前表面中的象 P' 也在 CG 线上，具体位置取决于二板的倾度。按照普林谢姆(见前引文献)，当两板朝里的面相互平行时，P' 点大约在它们的中间，但是，任一板绕平行于劈棱的轴作很小的转动，将引起 P' 点可观的位移。通过这样的调节，可以使 P' 位于 O 上，这时，物和条纹系统就重叠出现在显微镜视场内。P' 点的干涉序因放进物体而引起的改变，可借助补偿板来测定。因此，如果知道了 P' 点物体的厚度，即可求出其折射率。

新近，戴森(J. Dyson)[1] 研制了一种类似的显微镜和干涉仪联合装置(图 7.49)。待测物体装在一玻璃载片上，放在两块全同玻璃板 G_1、G_2 之间 O 点处，G_1，G_2 都是小角度的平面劈，劈棱相互反

1) J. Dyson, *Proc. Roy. Soc.*, A, **204** (1950), 170.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

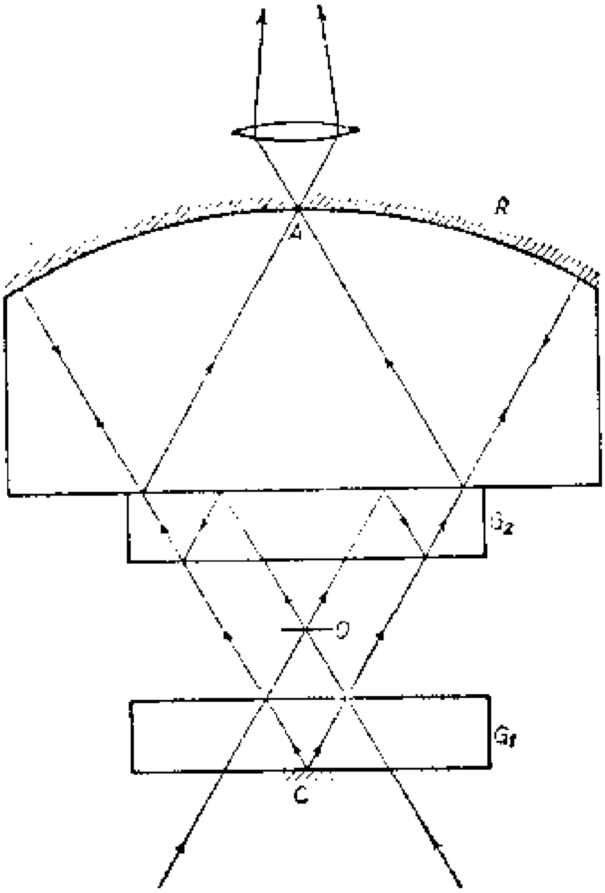


图 7.49　戴森干涉显微镜

平行．下板 G_1 的上表面镀有部分透射的银膜，下表面中央有一个很小的、镀银的、不透明斑点 C，它稍大于显微镜的视场．上板 G_2 两边都镀有部分透射的银膜．载物片与玻璃板间的空间填充以与玻璃同样折射率的媒质．这装置由显微镜聚光器的光照明，聚光器使光在 O 点的平面上会聚成光源的象．一部分光——物光束——通过 O，经 G_2 上下表面反射后射出．另一部分光——参考光束——经 G_1 上表面反射后会聚到 C；它从 C 反射后，经过 O 的外围，直接透过 G_2，O 是位于 C 的阴影中． G_2 与一玻璃块胶合在一起，玻璃块的上表面 R 是球面，镀有不透明的银膜，唯轴点处空有一小孔 A，玻璃块则设计成这样，使物光束和参考光束经 R 和 G_2 上表面反射后均会聚到 A．于是，在 A 附近，参考光束形成光源的一个实象 σ_1，物光束则形成光源的一个实象 σ_2，同时叠加有物平

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

面的实象 Π. Π 用普通显微镜来观察[1].

σ_1 和 σ_2 的对应点是光源同一点的象，所以这些对应点就成为互相相干的次级光源. 先调节这装置使这种点相重合. 在未放物时，物光束和参考光束到 Π 上任一点 P 的光程是相等的，因而，如果我们忽略各镀银面上不同反射情况所引起的很小位相差，则 Π 上各点的干涉序均为零——这个情况用白光可以辨认. 当将一物体放在 O 处时，物光束到 P 点的光程约增加 $(n'-n)l$，这里 n' 和 l 分别是物体在 P' 点的折射率和厚度，P' 是 P 的共轭点，n 是周围媒质的折射率. 这样，物上 n' 和 l 的变化在准单色光下将引起 Π 上强度的变化，而在白光下将引起 Π 上颜色的变化. 如果使板 G_1 垂直于劈稜和光轴而移动，则参考光束的光程发生变化，用这种方法可以补偿物光束光程的变化. G_2 的这个移动事先用单色光校准好，从而可测定出 $(n'-n)l$，由此，如 n 和 l 已知，即可得到 n'[2].

§7.5.7 马赫-泽德(Mach-Zehnder)干涉仪；贝茨(Bates)波阵面切变干涉仪

在雅满干涉仪中(§7.5.6)，两块板的前表面起分束器作用，后表面起平面镜作用，但是，这些元件不能独立调节，而且两束光的间距受到板厚的限制. 如果分束器和反射镜是独立的元件，可使各束光分得很开，那么仪器的用途将会广泛得多. 这就是**马赫-泽德干涉仪**[3]的基础，这种干涉仪是用来测量可压缩气流中折射率的变更，从而测量其中密度的变更.

马赫-泽德装置如图 7.50 所示. 光源 S 位于很好校正的透镜

1) 对于上述以外的光束，A 完全为 C 的阴影所遮盖，所以这些光束的光不能进入显微镜.

2) 事实上，调节 σ_1 和 σ_2 相重合，不可能丝毫不差. 而且，折射物的放入以及利用 G_1 作为补偿板，都将使 σ_1 和 σ_2 产生平行于光轴的相对位移. 圆满说明当 σ_1 和 σ_2 的对应点不相重合时二个区域中的干涉效应，已超出本章初等讨论的范围；这可以用部分相干理论很好地加以处理(第十章).

3) L. Zehnder, *Zeitshr. f. Instrkde*, **11** (1891), 275. L. Mach, *Zeitshr. f. Instrkde*, **12** (1892), 89.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

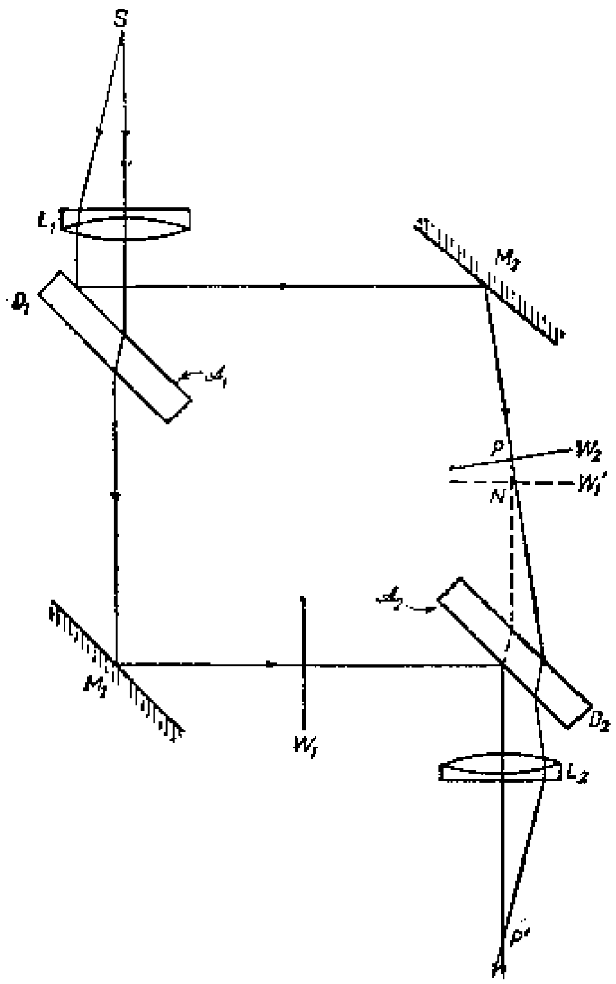


图 7.50 马赫-泽德干涉仪

L_1 的焦平面上，从 S 来的光在平行平面玻璃板 D_1 的半反射面 $\mathscr{A}_1$ 上分成两束，它们经平面镜 M_1、M_2 反射后在另一块全同平行平面板 D_2 的半反射面 $\mathscr{A}_2$ 上重新会合，并且射到很好校正的聚光透镜 L_2 上．四个反射面通常安排成近乎平行，它们的中心分别位于一平行四边形的四个角上． 假设光源是一个准单色的点光源．设 W_1 是 M_1 和 D_2 间光束的一个平面波阵面，W_2 是 M_2 和 D_2 间光束的对应的平面波阵面，并设 W_1' 是 M_2 和 D_2 间的虚平面波阵面，它应和 W_1 同时而且同相地从 D_2 射出． 因此，在 W_2 上某一 P 点处，二出射光束间的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} nh, \tag{87}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $h=PN$ 是从 P 点到 W_1' 的法线距离，n 是 W_2 和 W_1' 间媒质的折射率．在出射光束中与 P 点共轭的 P' 点处，按照§7.2(16)式，如果

$$nh=m\lambda_0,\quad |m|=0,1,2,\cdots\cdots, \tag{88a}$$

则有一亮条纹，而如果

$$nh=m\lambda_0,\quad |m|=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots\cdots, \tag{88b}$$

则有一暗条纹．

当 W_1' 和 W_2 平行时，对于所有的 P 点，强度是相同的．在这种情况下，一个扩展光源应当在无穷远处(即在 L_3 的焦平面上)产生条纹，这与雅满干涉仪的条纹类似．然而，W_1' 和 W_2 一般是相互倾斜的，因而条纹是平行于它们交线的直线．检验气流时通常所用的就是这种劈条纹，而且由于强度上的考虑，希望在不损失可见度的情况下尽可能加大光源来形成劈条纹．正如我们在§7.5.3中所看到的，这时条纹变成定域在这样的区域，其中的相交光线在离开 S 时夹角最小．调配与 W_1' 和 W_2 相互倾斜状态有关元件的各个转角，可改变这一定域区域的位置．例如，设四个反射面起初是相互平行的，并且为简单起见，我们考虑转轴与各镜中心所在平面垂直的情况，这时当 M_2 转动时，虚的定域区域在 M_2 附近(图7.51(a))，但当 M_2 和 D_2 都转动时，虚的定域区域则位于 M_2 和 D_2 之间(图 7.51(b))．这一性质是马赫-泽德干涉仪的劈条纹与迈克耳孙干涉仪在准直光下(§7.5.5)产生的劈条纹所不同之处，后者虚定域于镜子附近．

技术上使用这仪器时，将气流待查区域 C_1(通常是风洞或冲击波管的工作区)和一个补偿室 C_2 置于干涉仪两个相对的光臂中，并调节干涉仪使条纹干涉序接近于零，取向和间距合乎需要，并且虚定域在 C_1 内一个垂直于入射光的选定平面附近．用透镜 L_2 和一个高质量的照象机透镜把这平面成象在照象底版上．拍摄下有气流时和无气流时的条纹图样，并测量出两个图样在象平面上各选定点 P' 处的序位移 Δm，必要时可采用白光条纹来鉴定相应

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

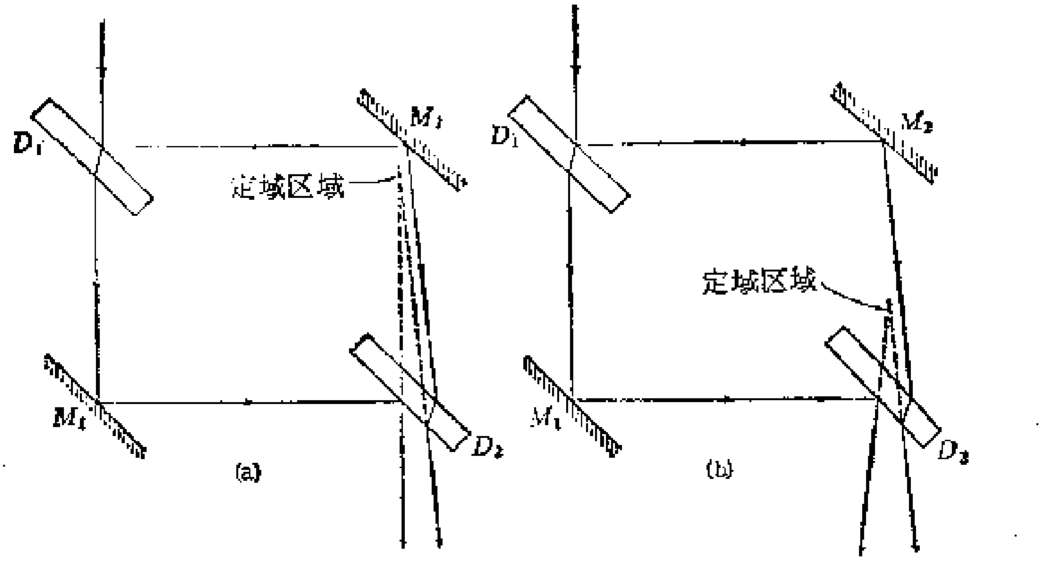


图 7.51　马赫-泽德干涉仪中的条纹定域图示

的干涉序. 设 n 为 C_1 中未受扰动的气体的折射率, n' 为流动情况下的折射率,则

$$\Delta m = \frac{1}{\lambda_0}\int (n' - n)ds, \tag{89}$$

式中积分沿着通过 C_1 到达 P' 点的那条光线的路径. 设 Ox、Oy、Oz 是 C_1 中的直角坐标轴, 原点 O 位于 C_1 中那个选定平面上, 并且 Oz 沿入射光方向; 并设当 C_1 中无气流时 P' 的共轭点为 P, 其坐标为 (x, y, o). 因此, 如果气流所引起的光线偏折可以忽略,则 (89) 式可以写成

$$\Delta m(x, y) = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^s \{n'(x, y, z) - n\}dz, \tag{90}$$

式中 s 是 C_1 的长度;当气流满足某些对称条件时[1],将 Δm 测量值代入 (90) 式即可解出 $(n' - n)$. 由此可定出气流所引起的密度改变 $\Delta\rho$, 因为 $\Delta\rho$ 与 $(n' - n)$ 成正比.

贝茨[2] 修改了马赫-泽德装置, 使它还可用来测量会聚波阵面

1) 例如, 见 R. Ladenburg and D. Bershader, *Interferometry in High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, Vol. IX, *Physical Measurements in Gas dynamics and Combustion* (London, Oxford University Press, 1955), Article A. 3.

2) W. J. Bates, *Proc, Phys. Soc.*, **59** (1947), 940.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的非球面性，而不需要一个基本没有误差的参考波阵面，这样的参考波阵面在特怀曼-格林方法中是必要的(第 395 页)。这种装置如图 7.52(a) 所示，它特别便于检验大孔径系统的性能. 设 OA 是被检验的会聚光束的主轴，现取为水平方向，这会聚光束在 D_1 上分成两束，分别会聚成光源的象 S_1、S_2，光源是一个足够小的准单色光源. 起先，四个反射面是垂直的并且相互平行，而且放置得使 S_1 和 S_2 重合在 D_2 的半反射面上. 设 W 是入射波的一个波阵面，W_1 和 W_2 是二个出射波的相应虚波阵面，其主轴分别为 O_1S_1，O_2S_2，在上述条件下，W_1 和 W_2 是严格重合的，这时眼睛在 D_2 后面将看到视场呈均匀照明. 现在让 D_1 和 M_1 作为一个整体绕平行于 OA 的一个轴转动，使得 O_1S_1 与 O_2S_2 有一个很小的垂直分离. 实质上这等效于使 W_2 绕一水平轴转成对 W_1 倾斜，因而视场内出现水平的等距条纹，在白光下也可看到.

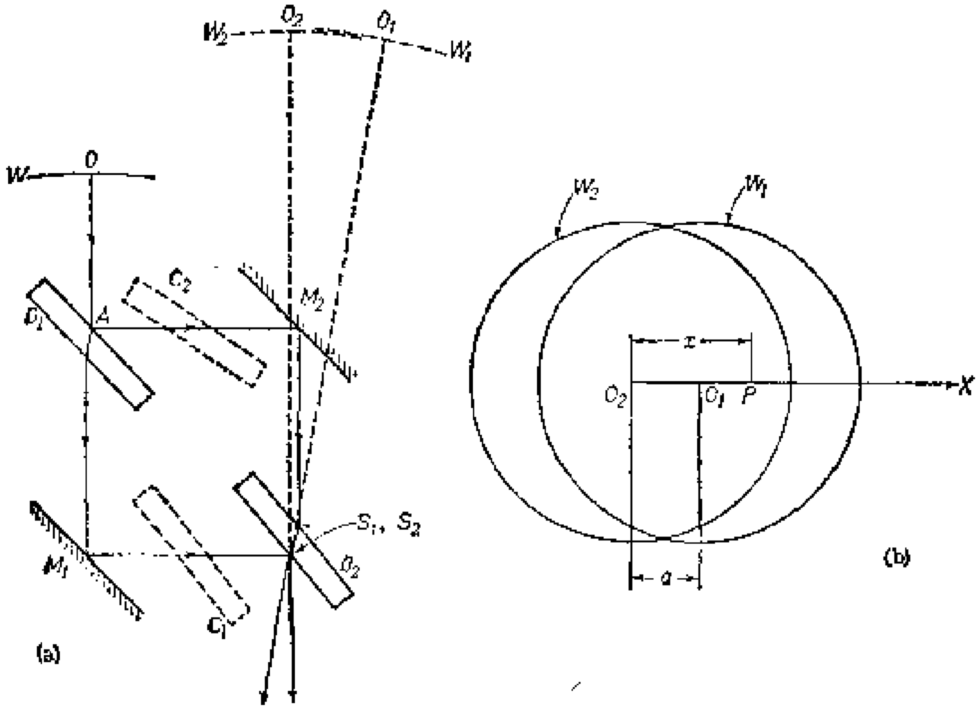


图 7.52 贝茨波阵面切变干涉仪

(a) 装置 (b) 波阵面受切变时的视场

现在假定让 D_2 绕通过 S_1 和 S_2 的一垂直轴转动，则 O_1S_1 在水平面内绕 S_1 转动，即 W_1 相对于 W_2 作切变运动. 当 W_1 和 W_2 是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

完善的球面时，在它们交叠的区域中条纹图样将不受切变的影响，否则，这些条纹将发生位移，位移大小则视W的非球面程度而定．这样，如果O_2X为切变方向上的坐标轴，而原点位于O_2，则P点（坐标为x）的序位移为

$$\Delta m(x;a)=\frac{1}{\lambda_0}\{\mathscr{S}(x)-\mathscr{S}(x-a)\},\tag{91}$$

式中φ是中心在S_2半径为O_2S_2的球面到W_2的光程，a为切变距离（图 7.52(b)）．因为在O_2点（$x=0$）$\mathscr{S}$等于零，所以从（91）式得到

$$\Delta m(a;a)=\frac{1}{\lambda_0}\mathscr{S}(a);\tag{92a}$$

同样，

$$\Delta m(2a;a)=\frac{1}{\lambda_0}\{\mathscr{S}(2a)-\mathscr{S}(a)\},$$

所以

$$\Delta m(a;a)+\Delta m(2a;a)=\frac{1}{\lambda_0}\mathscr{S}(2a).\tag{92b}$$

同样我们可以求得$\mathscr{S}(3a)$、$\mathscr{S}(4a)\cdots$等表达式，由此我们看到，从Δm的测量能够每隔一个a定出一个$\mathscr{S}(x)$值．当a不太大时，（91）式可改写成

$$\Delta m(x;a)\sim\frac{a}{\lambda_0}\frac{d\mathscr{S}(x)}{dx},\tag{93}$$

此式表明，Δm正比于离开P点的光线的角象差$d\mathscr{S}/dx$．显然，当整个波阵面不存在旋转对称性时，原则上可以通过改变切变方向来加以检验．

当两个波阵面发生切变时，虚交在P点的两条出射光线在穿过两个分束器时角度不同，如果要切变所引起的条纹位移只依赖于非球面性，则这种不同必须加以补偿．为此采用了两块补偿板，它们与用作分束器的板完全相同，分别置于干涉仪的二个光臂中．其中C_1固定与D_2平行，在调节切变时随D_2一起转动；另一块C_2通过一个机械联动装置与D_2相联，这装置使C_2以两倍于D_2

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的速率向反方向转动. 新近,德劳[1] (R. L. Drew) 研制了一种形式较简单的切变干涉仪,它不需要补偿板.

§7.5.8 相干长度:双光束干涉在研究光谱线精细结构中的应用

当一种气体,例如镉蒸气,在适当条件下用放电激发时,它就发射光,它的光谱由很锐的亮线组成,亮线之间是暗区. 这种光谱就是所谓发射线状光谱. 如果把其中一条谱线的光单独分出来,用它来照射例如迈克耳孙干涉仪,并调节干涉仪产生圆条纹,则发现,如果两个干涉光束的光程近乎相等,那末条纹是清晰的;但是当光程差增加时,条纹的可见度下降(一般不是单调地),最后条纹消失.

我们可以用如下假定来解释条纹的消失: 这条谱线的光不是严格单色的,而是由有限长度的一个个波列组成,在作一次观测所需的时间内,有大量数目的波列以无规的时间间隔通过. 我们暂且假定所有这些波列是完全相同的. 每一波列进入干涉仪后,分成长度相等的两个波列;而当干涉仪两臂的光程差大于波列长度时,这两个波列中一个尚未到达观察点 P 时另一个已经过去了.因此,产生于同一个入射波列的一对对波列这时在 P 点不发生干涉;在任何时刻,在 P 点叠加的波列都是由不同的入射波列产生的,而且因为这些波列无规地迅速接连地到达,所以,在进行一次观测所需要的较长时间内,它们对干涉项的贡献平均为零.

我们可利用傅里叶积分分析方法把上面的解释换一个形式,它在数学上更便于描述条纹可见度随程差的变化. 设 $F(t)$ 为单个波列在时间 t 在某点产生的光扰动. 我们假定当 $|t| \geqslant t_0$ 时 F 为零,并把它表成为傅里叶积分

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu, \tag{94}$$

---

1) R. L. Drew, *Proc. Phys. Soc.* B, **64** (1951), 1005.
O. Bryngdahl 的一篇文章讨论了切变干涉仪的应用,见 *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 37.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

按傅里叶反演定理，式中

$$f(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{2\pi i\nu t}dt. \tag{95}$$

如果在进行一次观测所需要的时间内，有N个这样的波列通过该点，则观察中包含的全部光扰动可以写成为

$$V(t)=\sum_{n=1}^{N}F(t-t_n), \tag{96}$$

式中t_n表示第n个波列到达的时间. 设一次观测所需的时间为$2T$，并设T比每个波列的半持续时间t_0大得多，则$2T$时间内的平均光强为

$$I=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|V(t)|^2dt\sim\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}|V(t)|^2dt. \tag{97}$$

现在从(94)和(96)式得到

$$V(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu, \tag{98}$$

式中

$$v(\nu)=f(\nu)\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i\nu t_n}; \tag{99}$$

所以按帕西瓦（Parseval）定理，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|V(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|v(\nu)|^2d\nu$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\nu)|^2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}e^{2\pi i\nu(t_n-t_m)}d\nu. \tag{100}$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}e^{2\pi i\nu(t_n-t_m)}=N+\sum_{n\neq m}e^{2\pi i\nu(t_n-t_m)}$$

$$=N+2\sum_{n<m}\cos 2\pi\nu(t_n-t_m). \tag{101}$$

因为t_n的分布是无规的，所以各余弦项正、负机率相等. 因此，在大量同样的实验中，(100)式中二重和的平均值为N，因而由(97)和(100)式得到平均强度为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$I=\frac{N}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\nu)|^2d\nu, \tag{102}$$

这就是说，它与组成单个波列的各单色成分的强度 $i(\nu)=|f(\nu)|^2$ 的积分(非相干叠加)成正比[1]. 在迈克耳孙干涉仪中，每个单色成分各产生一个如 § 7.5.4 中所描述的干涉图样，而当程差从零增大时，由于波长不同，这些单色图样的相互位移也不断增大. 因此条纹可见度下降，而当光程差足够大时，条纹即全部消失.

这两种解释都说明了为什么在程差足够大时不出现条纹，一种解释着眼于波列长度的有限和到来次序的无规，另一种解释着眼于频谱分布和各单色成分的非相干叠加. 对大多数实际目的而言，这两种解释是等效的；从以上讨论当可期望，波列越长，具有足够强度的那些傅里叶成分所跨的频率范围就越窄. 我们可以用一个简单的例子来说明这个关系. 假定这些波列的持续时间都是 Δt，在这个时间内 $F(t)$ 是简单的周期函数，频率为 ν_0，即

$$\left.\begin{aligned}F(t)&=f_0e^{-2\pi i\nu_0t}, &&当\ |t|\leqslant\frac{\Delta t}{2},\\ &=0, &&当\ |t|>\frac{\Delta t}{2},\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

式中 f_0 是常数. 这时从 (95) 和 (103) 式，

$$\begin{aligned}f(\nu)&=f_0\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}}e^{2\pi i(\nu-\nu_0)t}dt\\ &=f_0\Delta t\left[\frac{\sin\{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t\}}{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t}\right].\end{aligned} \tag{104}$$

函数 $[\sin\{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t\}/\pi(\nu-\nu_0)\Delta t]^2$ 决定 (103) 式的傅里叶成分的强度分布，其曲线如图 7.53 所示. 可以称之为具有足够强度的频率间隔 $\nu_0-\Delta\nu/2\leqslant\nu\leqslant\nu_0+\Delta\nu/2$ 是有些任意的，但因

---

1) 这一结果的严格表述由 N. Campbell 定理给出，这一定理在无规噪声分析中，特别是在与散粒效应（真空管中电子流强度的涨落）有关的问题中为大家所熟知. 参看 S. O. Rice, *Bell Tech.* J., **23** (1944), 282. [转载于 *Selected Papers On Noise and Stochastic Processes* (ed. N. Wax, New York, Dover Publications, 1954), 133.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

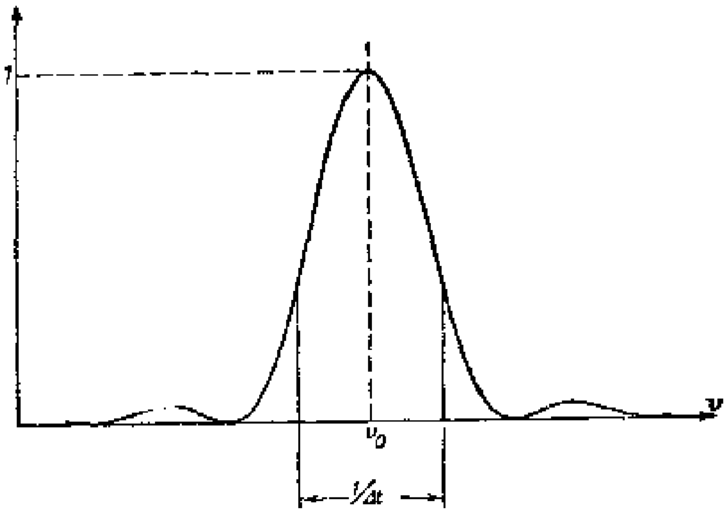


图 7.53　函数 $\left[\frac{\sin\{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t\}}{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t}\right]^2$

强度的第一个零值（发生在正弦项的变量等于 π 时）对应于 $\nu-\nu_0=\pm 1/\Delta t$，所以显然

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}. \tag{105}$$

这样，傅里叶谱的有效频率范围约等于单个波列持续时间的倒数.

这个例子，仅仅是实际光源光的理想化，它设所有波列全都相同，而且都具有简单形式. 按照原子理论，原子在辐射时的能量损失将引起波列的减幅. 此外，相对于观察者，各原子是处于无规热运动之中，所以所观测到的光谱要受多普勒效应调变. 再者，原子在发光时要受到相邻原子的干扰，结果各波列受到无规则的调变. 由于这些原因，对于实际的光，我们不能期望给“波列持续时间”和“傅里叶谱的频率范围”这些用词以简单的意义. 然而，对于任何光扰动 $V(t)$，以及对于它的傅里叶反演 $v(\nu)$，可以定义 Δt 和 $\Delta\nu$ 两个量，其中 Δt 可以看作是组成 V 的各个波列的平均持续时间，而 $\Delta\nu$ 可以看作是傅里叶谱的有效频率范围；而且可以证明，这两个平均量总满足下列倒易关系：

$$\Delta t\Delta\nu \geqslant \frac{1}{4\pi}. \tag{106}$$

这个不等式在某种意义上类似于量子力学中的海森伯测不准关

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

系，我们将在 § 10.7.3 中对它进行推导和讨论．这里我们只说，在大多数有实际意义的情况下，(106)式中的不等关系可以用数量级符号来代替．

(106)式中的时间 Δt 称为光的**相干时间**；如果设 $\bar{\lambda}_0$ 为平均波长，则下式定义的长度 Δl 称为**相干长度**：

$$\Delta l = c\Delta t \sim \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{(\bar{\lambda}_0)^2}{\Delta\lambda_0}, \tag{107}$$

比较一下 (107) 式和 § 7.3(15) 两式，即可看出，我们早先对两束准单色光的程差的限制就是指程差必须比光的相干长度小得多．当光程差接近或大大超过相干长度时，干涉效应即不再可以察觉．

从以上所述显然可见，用适当的干涉实验观测条纹可见度随光程差的变化，必能获得关于所用光光谱强度分布的资料．斐索[1]最早作了这类观察．他用钠火焰的黄光照射他的干涉仪(§ 7.5.2)，得到牛顿环，并观察当透镜和板的间距加大时环的情景．他发现，当透镜和板接触时，这些环是清晰的，而在第 490 环位置附近，它们几乎看不出来了，但到了第 980 环附近这些环几乎又恢复到它们原来的清晰度；他一共能看到 52 次这种可见度的周期变化，每一周期大约包括 980 环．从这些观察，斐索正确地推断黄钠光有两个强度接近相等的成分．当程差为各个成分波长的整数倍时，条纹可见度达到极大，所以两个成分的波长之比大约是 981/980．他用棱镜分光镜进行直接观察，从而证实了这个结论．

以后，迈克耳孙作了更精细的观察[2]，他测量了他的干涉仪中圆条纹的可见度，方法是把它们同一组可见度已知而且可变的圆条纹进行比较．用这种方法，迈克耳孙对大量光谱线的光作成了**可见度曲线**，即条纹可见度随程差的变化曲线．

我们来看看可见度曲线与光谱强度分布的关系如何．为简单起见，我们假定两束干涉光的强度相等．当光程差为 $\Delta\mathscr{S}$ 时，位相

---

1) H. Fizeau, *Ann. Chim. Phys.* (3), **66** (1862), 429.

2) A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **31** (1891), 338; *ibid.*, **34** (1892), 280.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

差为

$$\delta(k_0, \Delta\mathscr{S}) = k_0\Delta\mathscr{S}, \tag{108}$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 是波数；所以，按照 § 7.2(17) 式，在波数区域元 dk_0 内，各成分产生的强度为

$$i(k_0, \Delta\mathscr{S})dk_0 = 2i_1(k_0)\{1 + \cos(k_0\Delta\mathscr{S})\}dk_0, \tag{109}$$

式中 $i_1(k_0)$ 代表各束光强度的光谱分布. 因为已经证明过，不同光谱成分相加是不相干的，所以干涉图样中的总强度

$$I(\Delta\mathscr{S}) = 2\int i_1(k_0)\{1 + \cos(k_0\Delta\mathscr{S})\}dk_0. \tag{110}$$

对一条光谱线的光来说，除去在某一平均波数 $\bar{k}_0$ 附近很小的 k_0 范围以外，$i_1(k_0)$ 是可以忽略的. 如果这时令

$$\left.\begin{aligned} x &= k_0 - \bar{k}_0, \\ j(x) &= i_1(\bar{k}_0 + x), \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

我们就可以把 (110) 式改写成

$$I = 2\int j(x)\{1 + \cos[(\bar{k}_0 + x)\Delta\mathscr{S}]\}dx. \tag{112}$$

从这点来看，这里的分析与 355 页上的分析相类似. 因此 (112) 式可以写成(参看 § 7.3(38) 式)

$$I(\Delta\mathscr{S}) = P + C(\Delta\mathscr{S})\cos(\bar{k}_0\Delta\mathscr{S}) - S(\Delta\mathscr{S})\sin(\bar{k}_0\Delta\mathscr{S}), \tag{113}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} P &= 2\int j(x)dx, \\ C(\Delta\mathscr{S}) &= 2\int j(x)\cos(x\Delta\mathscr{S})dx, \\ S(\Delta\mathscr{S}) &= 2\int j(x)\sin(x\Delta\mathscr{S})dx. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

因为，对一条光谱线来说，$j(x)$ 仅仅在 $|x| \ll \bar{k}_0$ 时才不为零，所以与 $\cos(\bar{k}_0\Delta\mathscr{S})$ 和 $\sin(\bar{k}_0\Delta\mathscr{S})$ 的变化相比，C 和 S 的变化可以忽略，因此，在良好近似程度上，I 的极值位置可由下式给出：

$$\frac{dI}{d(\Delta\mathscr{S})} = -\bar{k}_0[C\sin(\bar{k}_0\Delta\mathscr{S}) + S\cos(\bar{k}_0\Delta\mathscr{S})] = 0,$$

即发生在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\tan(\bar{k}_0\Delta\mathscr{S}) = -\frac{S}{C}. \tag{115}$$

由(113)和(115)式，I 的极值是

$$I_{极值} = P \pm \sqrt{C^2 + S^2}. \tag{116}$$

因此可见度曲线由下式给出：

$$\mathscr{V}(\Delta\mathscr{S}) = \frac{I_{极大} - I_{极小}}{I_{极大} + I_{极小}} = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P}. \tag{117}$$

可以注意(113)式也可写成为

$$I = P\left[1 + \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P}\cos(\phi + \bar{k}_0\Delta\mathscr{S})\right], \tag{118}$$

式中 $\tan\phi = S/C$，所以可见度曲线是归一化强度曲线 I/P 的包络。

图 7.54 给出了一些计算的可见度曲线，光谱强度分布 $j(x)$ 如图中所设。但是，实际问题正好相反，而是要从观测的可见度曲线来决定光谱分布。如果 $j(x)$ 是对称的，则 $S=0$，(117)式化为

$$\mathscr{V} = \frac{|C|}{P}. \tag{119}$$

这时，由可见度曲线可决定 C（比例常数 P 和 C 的符号除外，C 的符号常可由物理合理性考虑来确定）；因而 $j(x)$ 可以从(114)式通过傅里叶反演得到。然而，在一般情况下，由可见度曲线只能决定 $|\sqrt{C^2+S^2}|$，因而单靠它一般不足以决定 $j(x)$，因为决定 $j(x)$ 需要分别知道 C 和 S 两个量。瑞利指出[1]，如果不仅测量条纹的可见度，而且还测量它们的位置，则 C 和 S 都可以决定，因为按照(115)式，从条纹的位置应当能给出比率 C/S；但是这种测量作起来很困难[2]。

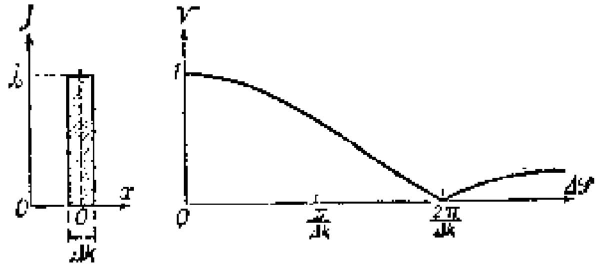
尽管有这个限制，迈克耳孙还是成功地推断出一些简单光谱

---

1) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5), **34** (1892), 407. 又见 E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **80** (1962), 1269.

2) A. Perard 报导过一些这类测量，*Rev.*, *d'Optique*, 7 (1928), 1; *Réunions. l'Institut d'Optique* (Paris: Revue d'Optique), 6ème année, (1935), 10.

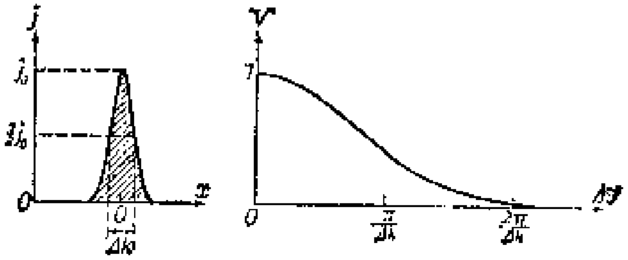
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a)

当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}\Delta k$ 时，$j = j_0$， 当 $|x| > \frac{1}{2}\Delta k$ 时，$j = 0$，

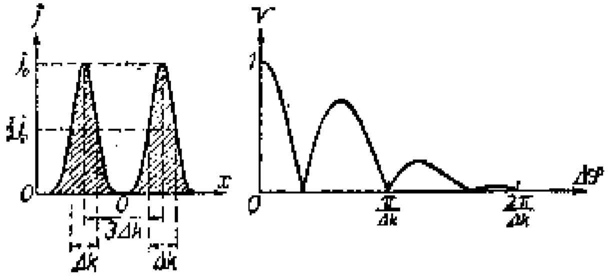
$$\mathscr{V} = \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\Delta k \Delta \mathscr{D}\right)\right|}{\left|\frac{1}{2}\Delta k \Delta \mathscr{D}\right|}.$$



(b)

$$j = j_0 e^{-a^2 x^2}$$

$$\mathscr{V} \sim e^{-\left(\frac{\Delta \mathscr{D}}{2a}\right)^2}$$

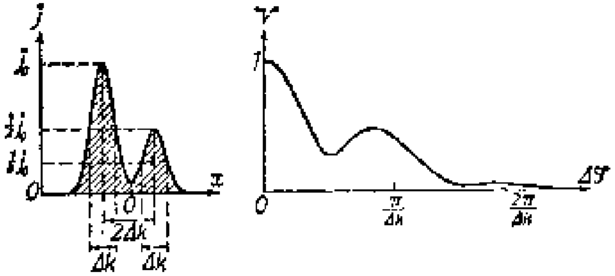


(c)

$$j = j_0 e^{-(\alpha x+\beta)^2} + j_0 e^{-(\alpha x-\beta)^2},$$

$$\mathscr{V} \sim e^{-\left(\frac{\Delta \mathscr{D}}{2\alpha}\right)^2} \left|\cos\left(\frac{\beta}{\alpha}\Delta \mathscr{D}\right)\right|,$$

用 $\frac{\beta}{\alpha \Delta k} = \frac{3}{2}$.



(d)

$$j = j_0 e^{-(\alpha x+\beta)^2} + \frac{1}{2} j_0 e^{-(\alpha x-\beta)^2},$$

$$\mathscr{V} \sim \frac{1}{3} e^{-\left(\frac{\Delta \mathscr{D}}{2\alpha}\right)^2} \sqrt{5 + 4\cos\left(\frac{2\beta}{\alpha}\Delta \mathscr{D}\right)},$$

用 $\frac{\beta}{\alpha \Delta k} = 1$.

图 7.54 对应各种光谱分布的可见度曲线（$\mathscr{V}$ 的分析表达式是根据准单色光的假设推导出来的）在图（b）、（c）、（d）中 $\Delta k = 2\sqrt{\log_e 2}/\alpha \sim 1.66/\alpha$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

线的结构,这些结构已为后来的工作所广泛证实. 特别是,他发现,在他考查过的所有谱线当中, 以镉红线 ($\lambda = 6438$ 埃) 最接近单色: 其可见度曲线 (图 7.55) 相当于高斯型的对称光谱分布, 半峰强度处的宽度仅 0.013 埃,因而他能观察到程差超过 500000 个波长 (~30 厘米) 的条纹.

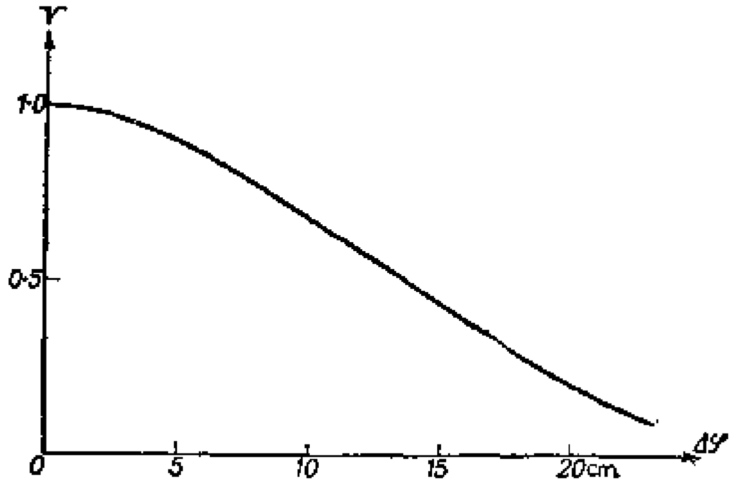


图 7.55 镉红线的可见度曲线

[引自 A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **4** (1892), 291.]

这种借助双光束干涉分析光谱线结构的方法, 是光的干涉效应在分光学中的最早应用,因而具有重要历史意义,但是它已被多光束干涉的方法 (§ 7.6) 所取代. 然而,近些年来,由于技术原因,双光束方法在红外光谱区显示了它的优点, 因而(部分原因)它的使用重又受到人们的注意[1].

§ 7.6 多光束干涉

当一束光入射到一块透明板上时, 它在板的两面上将发生多

---

1) 例如, 见 P. Fellgett, *Journ. de Phys.*, **19** (1958), 187, 237. 又见 G. A. Yanasse 和 H. Sakai 关于傅里叶光谱学的评述性论文,载于 *Progress in Optics*, Vol. 6, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1967), p. 259.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

次反射，结果有一系列光束由板的每边射出，振幅一个比一个减小．前面讨论这种板所产生的干涉效应时(§7.5.1,§7.5.2,§7.5.3)，我们略去了经受两次以上反射的那些光束对总强度的贡献．当两个面的反射率很低时，这种近似处理经证明是可行的．现在我们要考虑所有的反射光束：我们将看到，如果板面反射率很高，条纹图样强度分布将发生很大变化，并具有重要实际应用．

§7.6.1 平行平面板的多光束干涉条纹

考虑一块平行平面透明板，其折射率为 n'，周围媒质的折射率为 n，并假设有一单色平面光波以 θ 角入射到板上．设光线 SB_1（图 7.56）代表入射波的传播方向．在第一个面上，这个波分成两个平面波，一个被反射，方向为 B_1C_1，另一个透射进入板内，方向为 B_1D_1．这个透射波以 θ' 角入射到第二个面上，并且在这里再分成两个平面波，一个透射出板外，方向为 D_1E_1，另一个反射回板内，方向为 D_1B_2；留在板内的这个波继续不断分解，过程如图中所示．

设 $A^{(i)}$ 是入射波的电矢量振幅，并假定入射波是线偏振波，电

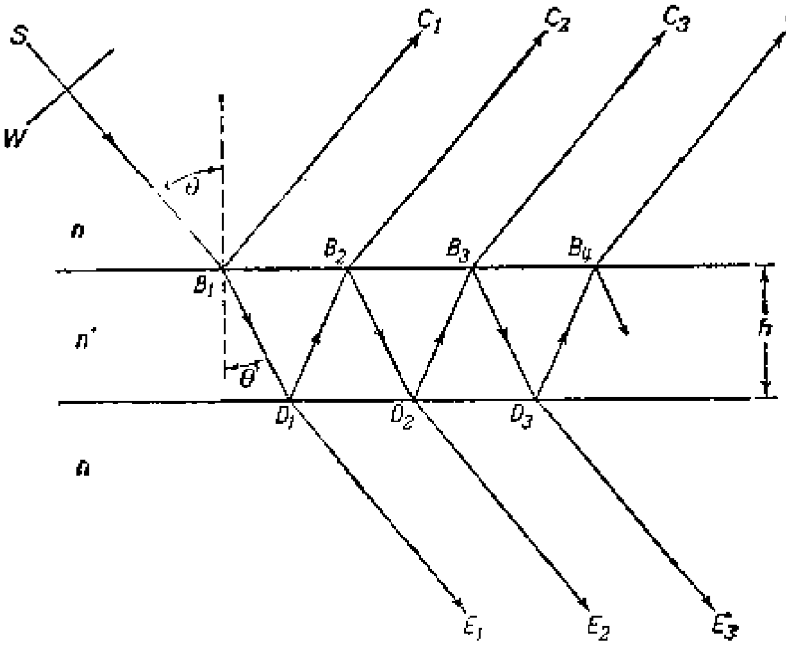


图 7.56 平面波在平行平面板中的反射

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

矢量平行于入射面或垂直于入射面．如同§1.5.2中一样，我们取 $A^{(i)}$ 为复数，令其位相等于波函数位相的常数部分．无论在反射还是透射这组波中，每个波和它前一个波的位相之差对应于板内两段“之”字形路程．按照§7.5(6)式，这一相差为

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta', \tag{1}$$

式中 h 是板的厚度，λ_0 是真空波长．设波从周围媒质进入板内时，反射系数(反射波振幅与入射波振幅之比)为 r，透射系数(透射波振幅与入射波振幅之比)为 t；而当波从板传播到周围媒质时，相应的系数为 r'，t'．于是，从板反射回来的各个波的复振幅依次为

$$rA^{(i)},tt'r'A^{(i)}e^{i\delta},tt'r'^3A^{(i)}e^{2i\delta},\cdots\cdots tt'r'^{(2p-3)}A^{(i)}e^{i(p-1)\delta},\cdots\cdots$$

同样，除去一个不重要的常数相因子以外，从板透射出来的各个波的复振幅依次为

$$tt'A^{(i)},tt'r'^2A^{(i)}e^{i\delta},tt'r'^4A^{(i)}e^{2i\delta},\cdots\cdots tt'r'^{2(p-1)}A^{(i)}e^{i(p-1)\delta},\cdots\cdots$$

r，r'，t，t' 各量可通过§1.5.2菲涅耳公式由 n，n'，θ，θ' 表出．但是目前，我们不需要这些显式，而只需要它们之间的关系式．例如，对于任一偏振分量，由§1.5的关系式(20a)和(35)可知，

$$tt'=\mathscr{T}; \tag{2}$$

同样，利用方程§1.5(21a)，有

$$r=-r', \tag{3}$$

因而，由§1.5(33)式，

$$r^2=r'^2=\mathscr{R}, \tag{4}$$

式中 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 分别代表平板表面的反射率和透射率，二者之间存在下列关系：

$$\mathscr{R}+\mathscr{T}=1. \tag{5}$$

如果前 p 个反射波相叠加，则反射光电矢量振幅 $A^{(r)}(p)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}A^{(r)}(p)&=\{r+tt'r'e^{i\delta}(1+r'^2e^{i\delta}+\cdots\cdots\\&\qquad+r'^{2(p-2)}e^{i(p-2)\delta})\}A^{(i)}\\&=\left\{r+\left(\frac{1-r'^{2(p-1)}e^{i(p-1)\delta}}{1-r'^2e^{i\delta}}\right)tt'r'e^{i\delta}\right\}A^{(i)}.\end{aligned} \tag{6}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果板足够长，反射波的数目就很大；在 $p\to\infty$ 的极限时，利用 (3) 式，由 (6) 式可得

$$A^{(r)}\equiv A^{(r)}(\infty)=-\frac{r'\{1-(r'^2+tt')e^{i\delta}\}}{1-r'^2e^{i\delta}}A^{(i)}. \qquad (7)$$

再利用 (2), (4) 和 (5) 式，从而得到

$$A^{(r)}=\frac{(1-e^{i\delta})\sqrt{\mathscr{R}}}{1-\mathscr{R}e^{i\delta}}A^{(i)}, \qquad (8)$$

因而反射光的强度 $I^{(r)}=A^{(r)}A^{(r)*}$ 为

$$I^{(r)}=\frac{(2-2\cos\delta)\mathscr{R}}{1+\mathscr{R}^2-2\mathscr{R}\cos\delta}I^{(i)}=\frac{4\mathscr{R}\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-\mathscr{R})^2+4\mathscr{R}\sin^2\frac{\delta}{2}}I^{(i)}, \qquad (9)$$

式中 $I^{(i)}=A^{(i)}A^{(i)*}$ 是入射光的强度。

用同样方法可得到透射光振幅表达式如下：

$$A^{(t)}(p)=tt'(1+r'^2e^{i\delta}+\cdots\cdots+r'^{2(p-1)}e^{i(p-1)\delta})A^{(i)}$$
$$=\left(\frac{1-r'^{2p}e^{ip\delta}}{1-r'^2e^{i\delta}}\right)tt'A^{(i)}. \qquad (10)$$

在 $p\to\infty$ 的极限时，(10) 式化为

$$A^{(t)}\equiv A^{(t)}(\infty)=\frac{tt'}{1-r'^2e^{i\delta}}A^{(i)}. \qquad (11)$$

利用 (2) 和 (4) 式，得到

$$A^{(t)}=\frac{\mathscr{T}}{1-\mathscr{R}e^{i\delta}}A^{(i)}, \qquad (12)$$

因而相应的透射光强度 $I^{(t)}=A^{(t)}A^{(t)*}$ 为

$$I^{(t)}=\frac{\mathscr{T}^2}{1+\mathscr{R}^2-2\mathscr{R}\cos\delta}I^{(i)}=\frac{\mathscr{T}^2}{(1-\mathscr{R})^2+4\mathscr{R}\sin^2\frac{\delta}{2}}I^{(i)}. \qquad (13)$$

公式 (9) 和 (13) 式称为爱里 (Airy) 公式，它们和 § 1.6 分层媒质中光传播的一般理论所推得的结果是一致的；因为如果在方程 § 1.6(60)中令 $r_{12}=r$, $r_{23}=r'$, $t_{12}=t$, $t_{23}=t'$, $2\beta=\delta$, 并利用

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上列关系式(2)和(3),就得到(9)和(13)式[1].

现在假设入射光是一组平面波,强度相等,而入射角分布在某一范围,并用一透镜 L 将透射光收集起来(图 7.57). 透镜 L 焦平面上 P 点处的强度与平板移去后该点的强度之比为 $I^{(t)}/I^{(i)}$. 因此,按照(13)式,当板存在时,并且当干涉序

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2n'h\cos\theta'}{\lambda_0} \tag{14}$$

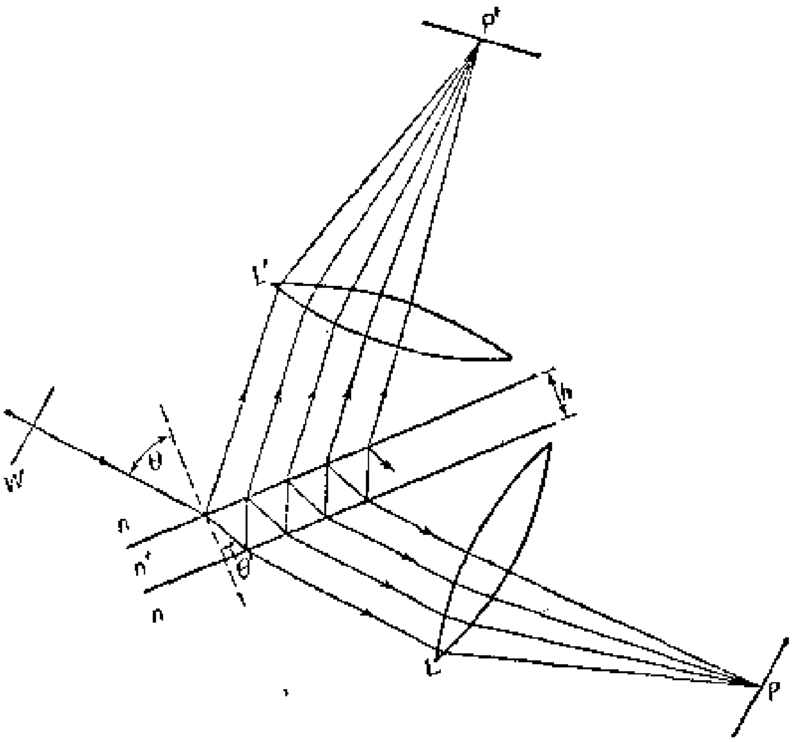


图 7.57 平行平面板多光束等倾条纹形成图示

是整数 1, 2……时, P 点的强度将是极大, 而当 m 是半整数 1/2, 3/2, 5/2, ……时, P 点的强度将是极小. 显然, 在透镜 L 的焦平面上, 产生的是等倾条纹, 各顺沿着 θ' = 常数(因而 θ = 常数)的一条轨迹. 同样, 如果用一个透镜 L' 将板的反射光收集起来, 在 L' 的焦平面上也将产生等倾条纹; 而且从(9)式可以看出, 这反射图样的强度极大对应于半整数干涉序(m=1/2, 3/2, 5/2, ……),

1) 在进行这一比较时必须记住, 符号 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 在 §1.6 中是代表整个板的反射率和透射率, 与这里代表的不同.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

而强度极小对应于整数干涉序（$m = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）．这样，透射、反射两个图样的条纹都是在 § 7.5.1 近似处理所给的位置上，在 § 7.5.1 中，我们只考虑了从板每边射出的头两个光束．

反射图样和透射图样的强度分布由(9)和(13)式给出．利用(5)式，可以把它们写成为

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}} = \frac{F\sin^2\frac{\delta}{2}}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}}, \tag{15a}$$

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}} = \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}}, \tag{15b}$$

式中参量 F 的定义是

$$F = \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}. \tag{16}$$

显然，两个图样是互补的，即

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}} + \frac{I^{(t)}}{I^{(i)}} = 1. \tag{17}$$

图 7.58 画出了在不同的 F 值下，$I^{(t)}/I^{(i)}$ 随位相差 δ 变化的特性曲线．当 $\mathscr{R}$ 比 1 小得多时，F 也比 1 小得多，因而我们可以将

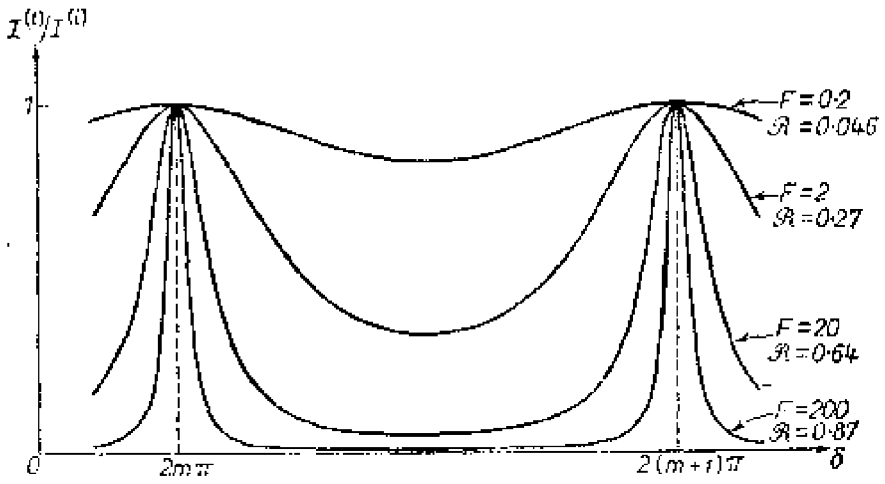


图 7.58　透射光情况多光束等倾条纹：透射光和入射光强度之比 $I^{(t)}/I^{(i)}$ 随位相差 δ 的变化曲线（m 为一整数）

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(15)式中的 $1\Big/\left(1+F\sin^2\dfrac{\delta}{2}\right)$ 展开，并只保留到 F 的一次项，结果得到

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}}\sim F\sin^2\frac{\delta}{2}=\frac{F}{2}(1-\cos\delta), \tag{18a}$$

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\sim 1-F\sin^2\frac{\delta}{2}=1-\frac{F}{2}(1-\cos\delta), \tag{18b}$$

即强度变化是公式 §7.2(15) 这种双光束干涉所特有的形式。当 $\mathscr{R}$ 增高时，透射图样极小的强度下降，而极大变锐，最后当 $\mathscr{R}\to 1$ 使得 F 很大时，则除去紧靠这些极大的地区以外，其它各处透射光的强度都非常小。这时，透射光的干涉图样由一系列很窄的亮条纹组成，背景几乎完全黑暗。同样，反射光的干涉图样这时变成一系列很窄的暗条纹，背景则几乎一片均匀明亮。条纹的锐度用它们的**半强度宽度**，即**半宽度**来量度是很方便的。在透射光干涉图样情况下，半宽度是指极大两边强度下降到峰值一半时两点间的距离。相邻条纹的间隔与半宽度之比，我们将称为条纹**细度** $\mathscr{F}$。对于整数序 m 的条纹，强度等于其峰值之半的那两点位于

$$\delta=2m\pi\pm\frac{\varepsilon}{2}, \tag{19}$$

其中 ε 由 (15b) 应满足

$$\frac{1}{1+F\sin^2\dfrac{\varepsilon}{4}}=\frac{1}{2}; \tag{20}$$

而当 F 足够大时，ε 很小，以致可令(20)式中的 $\sin(\varepsilon/4)=\varepsilon/4$，从而得到半宽度为

$$\varepsilon=\frac{4}{\sqrt{F}}. \tag{21}$$

因为相邻条纹的间隔相当于 δ 改变 2π，于是细度

$$\mathscr{F}=\frac{2\pi}{\varepsilon}=\frac{\pi\sqrt{F}}{2}. \tag{22}$$

以上我们假定光是严格的单色光。采用准单色光时，强度分

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

布等于各个单色成分产生的(15)式形式的强度分布之和;而如果这些成分的平均波长为 $\bar{\lambda}_0$，波长分布间区为 $\Delta\lambda_0$，则 m 序各个极大铺开的范围相当于波长 λ_0 的图样中位相改变一个 $|\Delta\delta|$，可由(14)式求出．如果我们略去其中 $n'h$ 对波长的依赖关系，则 $|\Delta\delta| = 2\pi m\Delta\lambda_0/\lambda_0^2$．只要 $|\Delta\delta|$ 与单色条纹的半宽度 ε 相比可以忽略，我们就可认为这些成分的图样是重合在一起，而总的强度分布与波长为 $\bar{\lambda}_0$ 的严格单色光源所产生的强度分布相同．由(22)式可知，这个条件是 $m\mathscr{F} \ll \lambda_0/\Delta\lambda_0$，即

$$\mathscr{F}\Delta\mathscr{S} \ll \frac{\bar{\lambda}_0^2}{\Delta\lambda_0}, \tag{23}$$

式中

$$\Delta\mathscr{S} = \frac{\lambda_0}{2\pi}\delta = m\lambda_0 \tag{24}$$

是相邻二干涉光束的光程差;我们可以把(23)式同双光束干涉方面的类似不等式§7.3(15)式进行比较．可以认出，(23)式右边的量就是光的相干长度(参见§7.5(107)式)．

从上述讨论可以明显看出，当板面反射率——因而 $\mathscr{F}$——增高时，强度分布变得更有利于测量条纹的位置，并且在透射图样中，不同单色成分的条纹可以完全分开．正是由于这些原因，多光束干涉量度学具有实际的重要性．在正入射下，在光学波长范围，就现在使用的介质而言，介质界面的反射率是很低的：例如，按照§1.5(37)式，空气($n \sim 1$)和玻璃($n' \sim 1.5$)界面的 $\mathscr{R} \sim 0.04$．采用斜入射，可使反射率增高，而且如我们在§1.5中所看到的，当光密媒质中的传播方向趋近临界角时，$\mathscr{R} \to 1$．将介质表面镀上多层适合的介质膜(如§1.6所说)，或镀上一层部分透明的金属膜，也可使正入射附近的反射率趋近1．介质垫片金属膜理论在第十三章中讨论．这里可以预先指出，这种膜对光有吸收，并且反射相变不一定是0或 π，因而当膜两边交界介质的折射率不同时，膜两边的反射率和反射相变也将不同．因此，上面的分析对于镀金属膜的板是无效的．但是，当板两面上的膜相同时，方程(12)和(13)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式仍将成立，只要把其中 $\mathscr{R}$ 解释作内反射的反射率，并把 δ 的定义从(1)式改作

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n'h\cos\theta' + 2\phi, \tag{25}$$

式中 ϕ 为内反射的相变．这时，如令

$$\mathscr{R} + \mathscr{T} + \mathscr{A} = 1, \tag{26}$$

式中 $\mathscr{A}$ 是光被金属膜吸收掉的部分，则利用(16)式，即可由(13)式得到

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}} = \left(1 - \frac{\mathscr{A}}{1-\mathscr{R}}\right)^2 \frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\delta}{2}}. \tag{27}$$

比较一下(27)和(15b)式，即可看到，当 F 给定时，吸收的影响是使透射图样的强度减小，因为因子 $[1 - \mathscr{A}/(1-\mathscr{R})]^2$ 小于 1[1]． 在正入射附近，反射相变 ϕ 的效应等效于使板的光学厚度增加 $\phi\lambda_0/2\pi$． 在斜入射时，反射相变还与偏振态有关，情况就更为复杂．

§7.6.2 法布里-珀罗干涉仪

法布里-珀罗干涉仪[2] 采用平行平面板产生的多光束干涉条纹，光的照射在正入射附近． 这一仪器主要由两块平面玻璃板或石英板 P_1、P_2 构成(图 7.59)．两块板朝里的表面各镀有高反射率

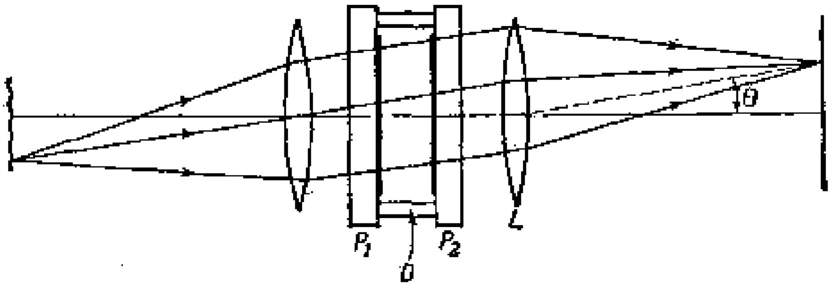


图 7.59 法布里-珀罗干涉仪

1) 采用多层介质反射膜时，透射图样的强度分布仍然呈(27)式的形式．这时强度的减小主要由于散射：见 P. Giacomo, *Rev. d'Opt.*, **35** (1956), 442.

2) C. Fabry and A. Perot, *Ann. Chim. Phys.* (7), **16** (1899), 115.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的部分透射膜，并且相互平行，因而当中形成一平行平面空气层．两块板本身各做成有点楔形，以避开未镀膜外表面上反射产生的干扰．在这仪器原来的形式中，一块板是固定的，另一块板安装在由螺旋控制的台架上，使板的间隔可连续改变．但是由于机械结构上的困难，这种装置已废弃不用，而改成用一个长短固定的间隔物 D 将两块板隔开．间隔物通常是殷钢或硅土制的空心圆柱——俗称间隔圈，每端有三个小凸包，板则靠几个弹簧的压力顶在凸包上．间隔圈 D 用光学方法加工，使小凸包端点所确定的两个平面尽可能接近平行，而精细调节可通过改变弹簧的压力来达到．这种板间隔固定式的法布里-珀罗干涉仪通常称为**法布里-珀罗标准具**．

我们在上一节已经看到，一个准单色的扩展光源 S，如果满足条件(23)，则在透镜 L 的焦平面上将形成一系列很窄的等倾亮条纹．由(25)式可知干涉序

$$m=\frac{\delta}{2\pi}=\frac{2n'h\cos\theta'}{\lambda_0}+\frac{\phi}{\pi}, \qquad (28)$$

式中 n' 是板间空气的折射率，h 是二反射面的间隔，θ' 是反射角，而 ϕ 是反射相变．透镜的光轴通常与板垂直，因而这时对应于各个整数 m 的亮条纹是一组同心圆，圆心在正入射透射光的焦点上(图 7.60)．在这一点，m 的值最大，设为 m_0，并且

$$m_0=\frac{2n'h}{\lambda_0}+\frac{\phi}{\pi}. \qquad (29)$$

一般，m_0 不是整数，因而可写成为

$$m_0=m_1+e, \qquad (30)$$

式中 m_1 是最里边那个亮条纹的整数序，而 e 小于 1，是中心的小数序．从(28)、(29)和(30)式，用和推导方程§7.5(13)式完全类似的方法，可得到从中心数起第 p 个亮条纹的角半径 θ_p．当 θ_p 不太大时，其结果为

$$\theta_p=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n'\lambda_0}{h}}\sqrt{p-1+e}, \qquad (31)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

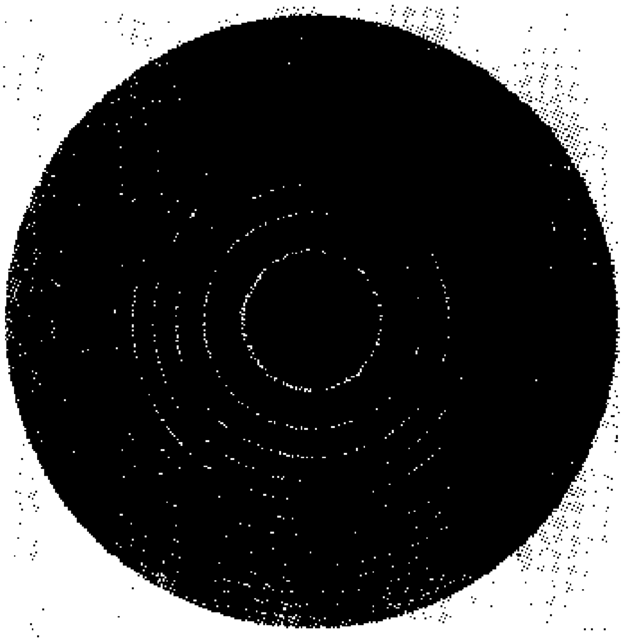


图 7.60　法布里-珀罗条纹

式中 n 是两板外边空气的折射率．因此，这条纹的直径 D_p 由下式给出：

$$D_p^2 = (2f\theta_p)^2 = \frac{4n'\lambda_0 f^2}{n^2 h}(p-1+\varepsilon), \tag{32}$$

式中 f 是透镜 L 的焦距．

在实际工作中，法布里-珀罗干涉仪有三个重要特性参量：第一，细度 $\mathscr{F}$，前已定义为条纹间距和半宽度之比；第二，**峰值透射率**

$$\tau = \left(\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\right)_{极大}. \tag{33}$$

第三，**衬比因子**

$$\mathscr{C} = \left(\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\right)_{极大} \Big/ \left(\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\right)_{极小}, \tag{34}$$

式中 $I^{(t)}$ 是条纹图样的强度，而 $I^{(i)}$ 是干涉仪移去后的相应强度．如果我们暂先假定两板里表面是平行平面，并且略去外表面上的反射，则 $I^{(t)}/I^{(i)}$ 可由 (27) 式给出．将 (27) 同 (15b) 进行比较，可见细度 $\mathscr{F}$ 仍由 (22) 式给出，如再利用 (15b) 式，即有

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mathscr{F}=\frac{\pi\sqrt{\mathscr{R}}}{1-\mathscr{R}}.\tag{35}$$

由(27)式，峰值透射率

$$\tau=\left(1-\frac{\mathscr{A}}{1-\mathscr{R}}\right)^2;\tag{36}$$

又从(22)和(16)式，衬比因子

$$\mathscr{C}=1+F=\left(\frac{1+\mathscr{R}}{1-\mathscr{R}}\right)^2=1+\frac{4\mathscr{F}^2}{\pi^2}.\tag{37}$$

正如前一节中所指出的，板的敷层可以镀金属膜，通常是银膜或铝膜，也可以镀多层介质膜，即由多层高、低折射率物质-例如硫化锌和冰晶石交替相间组成的膜系[1]，每层光学厚度均为$\lambda_0/4$. 这两类膜都是用真空热蒸发法制备. 当波长给定时，一般来说，在金属膜，反射率$\mathscr{R}$随膜厚而增加，而在介质膜，反射率$\mathscr{R}$则随膜层层数的加多而增大(参见§1.6表3). 但是，人们发现，在反射率$\mathscr{R}$很高时(实用情况)，这两种敷层的$\mathscr{A}/(1-\mathscr{R})$都随$\mathscr{R}$的增大而增大，由(35)和(36)式可知，此即表明，$\mathscr{F}$增加时，τ减小. 这样，同时要求峰值透射率和细度(或衬比因子)都很高是矛盾的，因而在实际工作中，须在二者之间有所取舍. 图7.61给出了τ和$\mathscr{F}$的一些数值，是从所列典型膜层的测量结果推算出来的. 我们看到，除开红端波段以外，在同样的峰值透射率下，以采用介质膜时细度最高. 然而，必须注意，多层介质膜的反射系数只有在波长λ_0(各膜层的光学厚度是这个波长的1/4)附近有限波长范围内才很高，所以，如果工作中光所包括的波长范围很广而又必须采用单个干涉仪，介质敷层就不适用了. 在可见光谱波长范围，在同样的峰值透射率下，银膜比铝膜产生的条纹锐，但是在大约4000埃以下，情况则相反，因而铝敷层用于紫外工作，可一直到2000埃.

上面讨论的是一个理想干涉仪的情形，其中两个反射面是完

---

1) 也有人采用金属膜和介质膜的组合：见 C. Dufour, *Ann. de Physique* (12), 6 (1951), 5.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

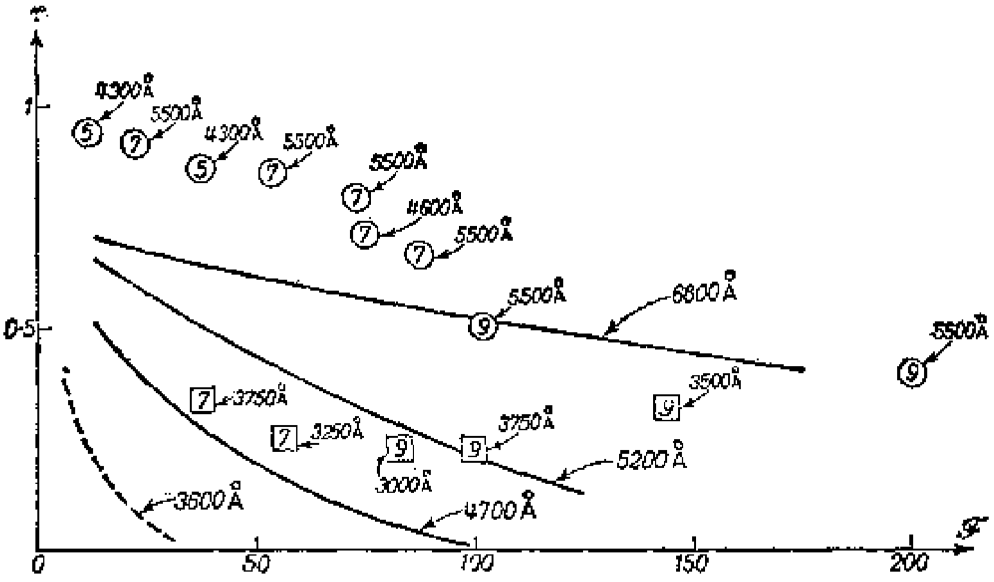


图 7.61 采用不同反射敷层时的峰值透射率 τ 和细度 𝓕，
假定二个反射面是完全平的和相互平行的

—— 新制银膜
[引自 H. Kuhn and B. A. Wilson, *Proc. Phys. Soc. B*, **63** (1950), 745.]

······ 铝膜
[引自 J. C. Burridge, H. Kuhn and A. Pery, *Proc. Phys. Soc. B*, **66** (1953), 963.]

○ 硫化锌-冰晶石多层膜
[引自 P. Giacomo, *Rev. d'Opt.*, **35** (1956), 317.
J. Ring and W. L. Wilcock, Nature, **171** (1953), 648;
ibid, 173 (1954), 994.]

□ 氯化铅-氟化镁多层膜
[引自 S. Penselin and A. Steudel, *Z. Phys.*, **142** (1955), 21.]
多层介质膜的层数和最适波长标于图中.

全平的和相互平行的[1]. 实际上，干涉仪两板表面不可能加工得完全平，因而板的间隔 h 在孔径范围内总是改变的. 杜福(C. Dufour)和皮卡(R. Picca)[2]，还有查布耳 (R. Chabbal)[3] 都曾讨论过这

1) P. Connes 描述了另一种式样的法布里-珀罗干涉仪，他修改了原设计，用曲率半径相等的两个球面镜代替了平面镜，并且令二者焦点相重合，见 *Rev. d'Opt.* **35** (1956), 37; *Journ. de Phys.*, **19** (1958), 262. 这种类型的干涉仪可用作激光器谐振腔.(参见 A. G. Fox and T. Li, *Bell Tech. J.*, **40** (1961), 453, 和 G. D. Boyd and J. P. Gordon, *ibid*, **40** (1961), 489.)

2) C. Dufour and R. Picca, *Rev. d'Opt.*, **24** (1945), 19.

3) R. Chabbal, *J. Rech. Cent. Nat. Rech. Sci.*, Labs. Bellevue (Paris), No. 24 (1953), 138.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

种间隔变化的影响．他们指出，细度和峰值透射率总小于(35)和(36)式所给的数值，并且当 $\mathscr{R}\to 1$ 时，细度趋近一极限 $\mathscr{F}_d$，它仅仅与两板的缺陷有关，这就是说，当两板给定时，条纹的锐度有一个上限，不管敷层的反射率多高，条纹锐度都不能超过此限．$\mathscr{F}_d$ 的值取决于板面偏离平行平面的形状和程度．例如，当板面有点球形弯曲，以致干涉仪孔径中心和边部之间光学厚度 $n'h$ 相差 λ_0/q 时，$\mathscr{F}_d=q/2$．作为示例，设一干涉仪 $q=100$(即 $\mathscr{F}_d=50$)，敷层为新鲜银膜，用在 $\lambda\sim 5200$ 埃．表15列出了这干涉仪的细度和峰值透射率，并同时给出图7.61的相应数值以资比较．可以看到，当 $\mathscr{F}\gtrsim\mathscr{F}_d$ 时，反射率的增加导致峰值透射率下降，而同时细度却增加得很少，得不偿失．这个例子也说明，要充分利用所能达到的反射率，板面平度应高到什么程度．

表 15　法布里-珀罗干涉仪(敷层为新鲜银膜，用于5200埃)的细度 $\mathscr{F}$ 和峰值透射率 τ：(a)平面板，(b)板面有球形弯曲，中心和边之间 $n'h$ 相差 52 埃

(a) 中各值引自图7.61　(b) 中各值引自 R. Chabbal 的理论曲线，见 *J. Rech. Cent. Nat. Rech. Sci.*, Labs. Bellevue (Paris), No. 24 (1953), 138.

(a) 平面板		(b) 球形弯曲板($\mathscr{F}_d=50$)	
$\mathscr{F}$	τ	$\mathscr{F}$	τ
25	0.59	22	0.55
50	0.44	36	0.34
75	0.30	42	0.20
100	0.20	45	0.11
125	0.13	46	0.06

§7.6.3　应用法布里-珀罗干涉仪研究光谱线的精细结构

当法布里-珀罗干涉仪的准单色入射光不满足条件(23)时，透射光的强度分布将不再是(27)式所给的形式，因而从这一分布可了解到入射光的光谱结构．特别来说，假设入射光有两个单色成分．如果我们想象它们的波长差在逐渐增加，而且假定它们的强度差得不太大，那么，最后当干涉图样中出现两套相互错开的极大

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，就证明了它们的存在。这时，我们说这两个成分被干涉仪**分辨开**。1899 年，法布里和珀罗[1]用这种方法直接观察到了以前迈克耳孙只能间接推断的(§ 7.5.8)那些光谱线的精细结构，从此以后，法布里-珀罗干涉仪在光谱学的这一分支中占据了统治地位。

为了比较不同仪器对光谱结构的分辨能力，方便的办法是考虑两个成分强度相等时的情况，并且规定(带有几分任意)当两个成分可以说"刚刚被分辨开"时二者极大应该错开的距离。设 $\lambda_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\lambda_0$ 是这两个成分的波长，$\lambda_0/\Delta\lambda_0$ 这个量就叫做仪器的**分辨本领**。这一分辨判据是瑞利[2]首先在棱镜和光栅光谱学中引进的，那里单色光产生的强度分布形式为

$$I(\delta) = \{\sin(\delta/2)/(\delta/2)\}^2 I_{极大}.$$

瑞利建议，在这种情况下，当两个等强度成分中一个的主强度极大同另一个的第一强度极小相重合时，这两个成分应当算是刚刚被分辨开(图 7.62)；这时，在合分布中，中点强度与极大点强度之比为 $8/\pi^2 = 0.811$。

让我们也采用这个鞍-峰强度比作为法布里-珀罗干涉仪情况的分辨判据[3]。如果板面反射率不太高，因而板面缺陷没有很大影

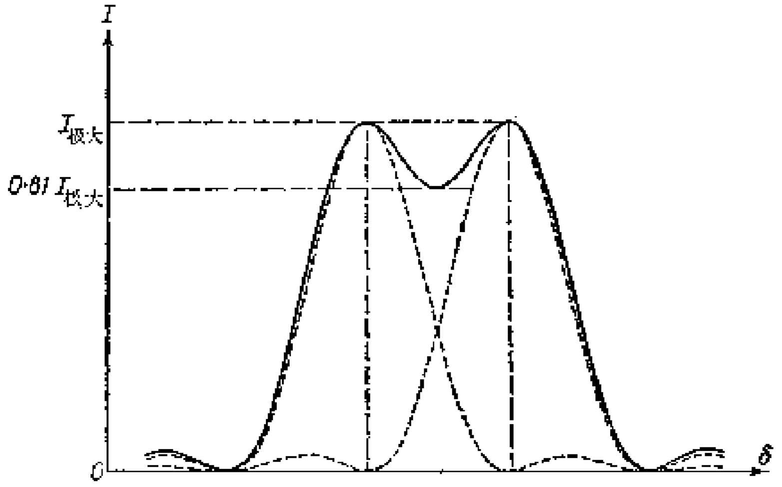


图 7.62 按照瑞利判据，两个刚刚被分辨开的单色光谱成分图示

1) C. Fabry and A. Perot, *Ann. Chim. Phys.* (7), **16** (1899), 115.

2) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5), **8** (1879), 261.

3) 瑞利判据并没有特别物理意义可言，有时人们也提出其他的分辨判据。用于比较不同仪器时，选择哪个判据并没有什么关系。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

响，则由(27)式，一个单色成分产生的强度分布 $I(\delta)$ 可写成如下形式：

$$I(\delta)=\frac{I_0}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}}; \tag{38}$$

而如果有两个这样的成分，它们的相对位移相当于 δ 改变 ε，则二者叠加后产生的总强度为

$$\begin{aligned} I_{总}(\delta,\varepsilon)&=I\left(\delta+\frac{1}{2}\varepsilon\right)+I\left(\delta-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\\ &=\frac{I_0}{1+F\sin^2\frac{\left(\delta+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{2}}+\frac{I_0}{1+F\sin^2\frac{\left(\delta-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{2}}. \end{aligned} \tag{39}$$

在两个成分的强度极大之间中点处，总强度是 $I_{总}(2m\pi,\varepsilon)$，其中 m 是一整数；此外，如果我们认为，当这两个成分刚刚被分辨开时，总强度的极大与各成分的强度极大相重合，则这极大处的总强度是 $I_{总}\left(2m\pi\pm\frac{1}{2}\varepsilon,\varepsilon\right)$. 因此，按照我们所选定的判据，两条线刚刚被分辨开时，ε 应满足下列方程：

$$\frac{2I_0}{1+F\sin^2\frac{\varepsilon}{4}}=0.81\left\{I_0+\frac{I_0}{1+F\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}\right\}. \tag{40}$$

如果条纹的细度很高，则(40)式中的 ε 比 $\pi/2$ 小得多，故可令 $\sin\varepsilon=\varepsilon$；于是(40)化为

$$F^2\varepsilon^4-15.5F\varepsilon^2-30=0,$$

由此得到

$$\varepsilon=\frac{4.15}{\sqrt{F}}=\frac{2.07\pi}{\mathscr{F}}, \tag{41}$$

其中利用了关系式(22).

由(28)式，如果我们设折射率 n' 与波长无关，并且 h 很大，以致 ϕ 与 δ 相比可以忽略，则

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$|\Delta\delta| = \frac{4\pi n'h\cos\theta'}{\lambda_0^2}\Delta\lambda_0 = 2\pi m\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0}. \qquad (42)$$

在分辨极限时，$|\Delta\delta|$ 等于(41)式的 ε，所以法布里-珀罗干涉仪的分辨本领为

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} = 0.97m\mathscr{F}. \qquad (43)$$

此式和衍射光栅的分辨本领表达式§ 8.6(14)式相似——在衍射光栅中干涉光束强度相等而个数有限.对比之下,因子 $0.97m$ 有时称为法布里-珀罗干涉仪的有效光束数.在正入射附近，$m\sim 2n'h/\lambda_0$，分辨本领可取作

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} \sim \frac{2\mathscr{F}n'h}{\lambda_0}. \qquad (44)$$

这样，法布里-珀罗干涉仪的分辨本领正比于细度和板的光学间隔． 举例来说，设 $\mathscr{F} = 30(\mathscr{R}\sim 0.9)$，这在可见光谱范围是很容易达到的，则当 $n'h = 4$ 毫米，$\lambda_0 = 5000$ 埃时，分辨本领约为 5×10^5． 这个量级的分辨本领要用最大的线光栅才能达到． 在光谱学上，采用光谱学波数 $(k_0 = 1/\lambda_0)$ 来计算也是很方便的；当可分辨的最小波长差为 $\Delta\lambda_0$ 时，相应的波数差 Δk_0 为

$$\Delta k_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2} \sim \frac{1}{2\mathscr{F}n'h}. \qquad (45)$$

(45)式中 Δk_0 这个量有时称为干涉仪的分辨极限． 在上例中，分辨极限约为 0.04 厘米$^{-1}$．

如果两个成分的波长间隔足够大，以致两套图样的移错大于各图样中相邻极大的间距时，就发生所谓序的“交叠”． 产生移错1序($|\Delta\delta| = 2\pi$)的波长差 $(\Delta\lambda)_{S.R.}$ 称为干涉仪的光谱范围；在正入射附近，由(42)式，

$$(\Delta\lambda_0)_{S.R.} = \frac{\lambda_0}{m} \sim \frac{\lambda_0^2}{2n'h}. \qquad (46)$$

用光谱学波数表示时，光谱范围为

$$(\Delta k_0)_{S.R.} = \frac{(\Delta\lambda_0)_{S.R.}}{\lambda_0^2} \sim \frac{1}{2n'h}. \qquad (47)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

可见，光谱范围反比于板的间隔．所以，增大板的间隔固然可提高分辨本领，但同时光谱范围却按同一比例减小．比较一下(44)和(46)式还可看出，光谱范围 $(\Delta\lambda_0)_{S.R.}$ 近似等于 $\mathscr{F}$ 乘以可分辨的最小波长差．以实际所能达到的 $\mathscr{F}$ 值而言，当分辨本领很高时，光谱范围是非常小的．在上述典型情况下($\mathscr{F}=30$，$n'h=4$ 毫米，$\lambda_0=5000$ 埃)，$(\Delta\lambda_0)_{S.R.}\sim 0.3$ 埃．在§7.6.8中我们将看到，将两个法布里-珀罗干涉仪串联使用，可获得较大的光谱范围．虽然如此，当检查复杂光谱时，还必需借助辅助仪器将所有谱线(除最靠近的以外)的图样分开，下面我们将要说明这一点．

当两个很近的成分被分辨开时，从测量各环的直径和板的间隔，很容易求出它们的光谱学波数差．由(29)和(30)式，对于光谱学波数 k_0，k_0'，我们可写下

$$m_1+e_1=2n'hk_0+\frac{\phi}{\pi},\quad m_1'+e_1'=2n'hk_0'+\frac{\phi}{\pi},\qquad(48)$$

式中 m_1，m_1' 是第一个亮环的整数序，e_1，e_1' 是中心的小数序，并假定 ϕ 在 k_0 到 k_0' 间隔内是常数．将(48)二式相减，有

$$k_0'-k_0=\frac{(m_1'-m_1)+(e_1'-e_1)}{2n'h}.\qquad(49)$$

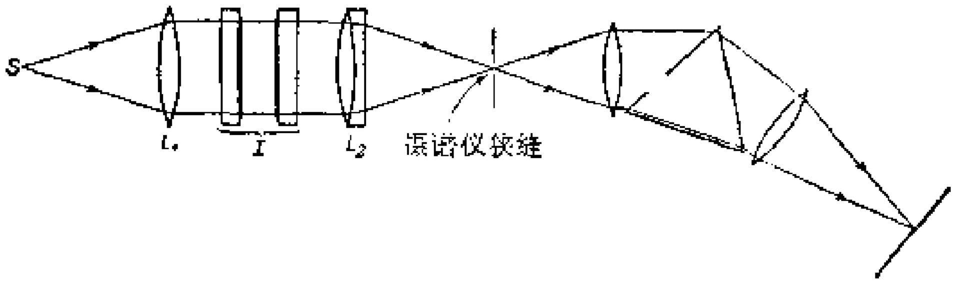


图 7.63 法布里-珀罗干涉仪和棱镜摄谱仪正交

各谱线的中心小数序可以从测量两个亮环的直径来得到．由(32)式，第 p 环和第 q 环的直径 D_p 和 D_q 有如下关系：

$$\frac{D_p^2}{D_q^2}=\frac{p-1+e}{q-1+e},$$

由此，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$e=\frac{(q-1)D_p^2-(p-1)D_q^2}{D_q^2-D_p^2}. \tag{50}$$

如果测量了两个以上的环，则可用最小二乘法求出 e 的平均值．整数 $(m_1'-m_1)$ 是两套图样错叠的序数，可由观测当板间隔减小时图样的变化来决定．通常，序数间隔 $(m_1'-m)+(e_1'-e_1)$ 的测量准确度不超过 0.1%；因为板的间隔很少用小于约 1 毫米的，所以 h 用测微计就可以测得足够准确了，而空气的折射率 n' 可取作 1．

上面曾经提到，由于干涉仪的光谱范围很小，因而除去靠得非常近的谱线以外，其它线的图样须予以分开．当采用照相观测时，通常是将干涉仪同一个无象散的棱镜摄谱仪或光栅摄谱仪"正交"来达到这一目的．一种装置如图 7.63 所示．光源 S 在透镜 L_1 的焦平面上，从 S 来的光将干涉仪 I 照明，所产生的干涉图样则通过一个很好校正的透镜 L_2 成象在摄谱仪狭缝平面上[1]．调节干涉仪取向，使干涉图样中心与狭缝中心相重合．这时，狭缝从所含各谱线的同心圆环上截出一条直径地区，摄谱仪的作用是将这些地区分开．当待测光谱由发射线组成时，狭缝通常可以打开得比较宽．这时，摄谱仪焦平面上的图象如图 7.64 所示，竖条是各谱线的光所形成的狭缝象，条中横道（与狭缝象正交）是亮环条纹的短弧．对于吸收线，当各线所在连续背景的波长范围小于干涉仪的光谱范围时，将得到类似的图象（图 7.65）．较宽的亮条纹系背景所产生，沿亮条纹中间划过的暗线则是吸收线．

当连续背景的光谱范围很宽时，例如象太阳光谱中那样，情况就更加复杂[2]．为了说明这一问题，我们暂先假设摄谱仪狭缝的宽度很小，可以忽略，并且摄谱仪的分辨本领这时为无限大．设 Ox，

---

1) 干涉仪和摄谱仪的组合装置还有多种．对于某一特别目的，选择何种装置最为相宜，须考虑以下因素而定：安装紧凑，费用，光源的大小，强度和均匀性，以及系统中额外表面反射所造成的假图样的影响大小．［见 S. Tolansky, *High Resolution Spectroscopy*, London, Methuen, 1947, Chapt. 9.］

2) C. Fabry and H. Buisson, *Journ. de Phys.* (4), 9 (1910), 197 首先讨论了这一情况．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

Oy 是摄谱仪焦平面上的直角坐标轴，原点 O 在通过狭缝中心的光所确定的直线上，而 Oy 轴平行于狭缝．沿 $x=$ 常数的某直线上，波长 λ_0 是常数，强度极大位置由 (28) 式确定，它可写成为

$$\left(m-\frac{\phi}{\pi}\right)\lambda_0=2n'h\cos\theta'=2n'h\left(1-\frac{\theta'^2}{2}\right)$$

$$=2h\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right),\quad m=1,2,\cdots \qquad (51)$$

式中假定 θ' 很小，并且令空气折射率 $n=n'=1$． θ 角是光在干涉仪上的出射角．当 θ 很小时，θ 和坐标 y 的关系是 $y=Mf\theta$，其中 f 是透镜 L_2 的焦距（透镜 L_2 将条纹成象在狭缝上），而 M 是摄谱仪所引进的放大率． 此外，λ_0 与坐标 x 有关，设为 $F(x)=\lambda_0$，函数 F 由摄谱仪的色散特性来决定．利用上两个关系，从 (51) 式中消去 λ_0 和 θ，就得到当光源发射连续光谱时强度极大的轨迹：

$$\left(m-\frac{\phi}{\pi}\right)F(x)=2h\left(1-\frac{y^2}{2M^2f^2}\right),\ m=1,2,\cdots \qquad (52)$$

在这些极大之间，相对强度分布是干涉仪所特有的形式；这样，摄谱仪焦平面上的光谱是沟槽式的，在窄的亮条纹中间隔着宽的暗区．这些亮的沟槽对直线 $y=0$ 是对称的，并凸向长波一边，而在直线 $y=$ 常数上，它们的间隔显然等于干涉仪的光谱范围．在特别情况下，当 $F(x)$ 是 x 的线性函数时，各沟槽是抛物线．

当存在吸收线时，亮沟槽在与各吸收线相交之处即为暗点所割断，即如若把这些吸收线换成发射线而波长不变，则所产生的亮极大应和这些暗点位置相同． 现在如果把狭缝对称地打开，则各暗点向 x 方向扩展，同时，各亮沟槽也同样沿 x 方向展宽，最后相互连成一片．在此条件下，光谱看起来是连续的，但上面有吸收线产生的暗"条纹"图样（图 7.66），这种暗条纹图样可以按发射线的亮条纹图样那样，如法加以测量．实际上，由于衍射，摄谱仪的分辨本领不是无限大，因而任一一定波长的光一开始就要在 x 方向上铺展开一定的距离． 这和打开狭缝效果相同，即使亮沟槽沿 x 方向展宽，并将发生交叠，除非摄谱仪能够把间隔等于相邻亮沟槽间隔

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的两个波长完全分辨开来．我们知道，这个间隔就是干涉仪的光谱范围，它随板间隔的增加而减小．这样，由于辅助仪器摄谱仪的分辨本领有限，它就决定了所能采用的板间隔的一个上限．

在光谱学上，也可以将法布里—珀罗干涉仪同光电探测器结合使用[1]．先用前级单色仪将待测谱线的光单独分出，而后送入干涉仪中，并将干涉图样的像投到一个与干涉环同心的环孔上，让一个序的一小部分光从中通过而到达光电管．改变干涉仪两板光学间隔，使各干涉环扩大或收缩，从孔上一一掠过，由此即可测得干涉图样．这种装置在技术上颇为重要，因为，如杰奎诺特（P. Jacquinot）所曾指出的[2]，在同样的分辨本领下，法布里-珀罗干涉仪所可通过的光通量比一般棱镜单色仪和光栅单色仪要大得多．

§7.6.4 应用法布里-珀罗干涉仪比较波长

棱镜摄谱仪和光栅摄谱仪所产生的光谱，其波长是用内插法来测量的，任一谱线的波长可用相邻两条标准线的已知波长来表出．当使用大型摄谱仪进行这种比较时，准确度可达大约百万分之一（1×10^{-6}），因此标准线的相对波长值至少要准到这个程度，而且还必须有足够多的标准线才便于内插．此外，因为波长是一个实在的长度，所以使波长和米建立起关系是可取的．这样，在光谱学上，建立一个圆满的波长系统，要包括下列两步：（1）选定一基准线，将它的波长同代表米的实物标准进行比较；（2）在全光谱各处选定一些其它谱线作为次级标准，将它们的波长同基准波长进行比较．1907 年选定的基准线是镉红线（6438 埃）[3] 激发条件有相应规定[4]．测量这条线的波长合多少米，是一个基本度量学过程，需采用特别的方法，我们将在 §7.7 中加以介绍．所得到的

---

1) P. Jacquinot and C. Dufour, *J. Rech. Cent. Nat. Rech. Sci.*, Labs. Bellevue (Paris), No. 6 (1948), 91.

2) P. Jacquinot, *J. Opt. Soc. Amer.*, **44** (1954), 761.

3) *Trans. Int. Union for Co-operation in Solar Research*, **2** (Manchester Univ. Press, 1908), p. 17.

4) *Proc. Verb. Com. Int. Poids et Mes.* (2), **17** (1935), 91.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数值是 6438.4896 × 10^{-10} 米，并取作 6438.4896 埃. 这是埃的定义，它与 10^{-10} 米之差不超过三百万分之一. 在如此定好波长基准之后，其它波长同它的比较就是一个纯光学过程了，这一直是法布里-珀罗干涉仪的重要应用之一.

用基准线和待测线的光照射干涉仪（最好同时），并借助适当装置将各个图样分开并拍照下来. 设 λ_s 是标准线在干涉仪板间空气（折射率为 n'）中的波长，同样设 λ_1, λ_2……是待测线的波长. 由 (29) 和 (30) 式，如果忽略 $\phi\lambda$ 随波长的变化，则

$$(m_{1s}+e_s)\lambda_s=(m_{11}+e_1)\lambda_1$$
$$=(m_{12}+e_2)\lambda_2=\cdots\cdots=2H, \quad (53a)$$

$$2H=2h+\frac{\phi\lambda}{\pi}, \quad (53b)$$

式中 m_{1s}, m_{11}, m_{12}……是各波长第一个亮环的整数序，而 e_s, e_1, e_2……是中心处的小数序. 各波长的中心小数序可由测量各环直径得到，这我们在 438 页已经介绍过了. 整数序 m_{1s}, m_{11}, m_{12}……则可用剩余小数法求得，这我们在 379 页也曾简单提及. 这个方法先是用测微计测量两板间隔 h. 最接近 $2h/\lambda_s$ 的那一整数 m'_{1s} 就是 m_{1s} 的一个近似值，可写成

$$m_{1s}=m'_{1s}+x, \quad (54)$$

式中 x 是一未知整数. 若 h 测量的不确定度是 Δh，则

$$|x|\lesssim\frac{2\Delta h}{\lambda_s}. \quad (55)$$

例如，当 $\Delta h\sim 0.01$ 毫米，$\lambda_s=6438$ 埃时，$|x|\lesssim 30$. 然后，以 λ_1, λ_2……的已知近似值 λ'_1, λ'_2……和 λ_s 的近似干涉序 $m'_{1s}+e_s$ 代入 (53a) 式，计算各待测线相应的近似序 $m'_{11}+e'_1$, ……，关系如下：

$$\left.\begin{aligned}m'_{11}+e'_1&=(m'_{1s}+e_s)\frac{\lambda_s}{\lambda'_1},\\ m'_{12}+e'_2&=(m'_{1s}+e_s)\frac{\lambda_s}{\lambda'_2},\cdots\cdots,\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果令 $\lambda_1 = \lambda_1' + \Delta\lambda_1'$，则由（53a）和（54）式，有

$$(m_{11} + e_1)(\lambda_1' + \Delta\lambda_1') = (m_{1s} + e_s)\lambda_s$$
$$= (m_{1s}' + x + e_s)\lambda_s, \qquad (57)$$

由此，利用（56）式，得到

$$(m_{11} + e_1) = m_{11}' + x + \left[e_1' + \left(\frac{\lambda_s - \lambda_1'}{\lambda_1'}\right)x\right] - (m_{11} + e_1)\frac{\Delta\lambda_1'}{\lambda_1'}. \qquad (58)$$

现在，将（55）式所允许的各个可能的 x 值代入(58)式右边方括弧项中，计算出它所贡献的小数序部分。 x 值正确时，这个计算的小数序必须同(58)式左边测量的小数序 e_1 相一致，不确定度范围是 $(m_{11} + e_1)\Delta\lambda_1'/\lambda_1'$。如果板的间隔足够小，这个不确定度与 1 相比是很小的。例如，以光栅测得的近似波长而言，$\Delta\lambda_1'/\lambda_1' \sim 10^{-5}$，所以，当 $m_{11} \sim 10^4$ 时，$(m_{11} + e_1)\Delta\lambda_1'/\lambda_1' \sim 0.1$，在可见光谱波长范围，这相当于 $h \sim m_{11}\lambda_1/2 \sim 3$ 毫米。于是，从小数序计算值和测量值的比较，可以看出某些 x 值是不可取的，再用其它近似波长 λ_2'，λ_3'，···进行同样计算，即可将 x 确定无疑。 通常有三条线即已足够，只要它们的波长适当分开，有时可用第四条线作为验证。

知道了 x 后，即可由（54）和（58）式求出 m_{1s}，m_{11}，m_{12}，···并从（53a）得到

$$\lambda_1 = \frac{m_{1s} + e_s}{m_{11} + e_1}\lambda_s, \quad \lambda_2 = \frac{m_{1s} + e_s}{m_{12} + e_2}\lambda_s, \cdots. \qquad (59)$$

因为整数序是没有疑问的，所以这些波长的不确定度$\Delta\lambda_1$，$\Delta\lambda_2$，···仅仅来自小数序测量值 e_s，e_1···的不确定度。如果后者在 ± 0.01 以内（这个精密度用高反射敷层是不难获得的），并且 m_{1s}，m_{11}，m_{12}，···象上例中那样，在 10^4 左右，则 $\Delta\lambda_1/\lambda_1$，$\Delta\lambda_2/\lambda_2$，···大约是 10^{-6}，即这测量使 λ_1，λ_2，···各值的准确度提高约 10 倍。现在可用这些较准确的波长并加大板的间隔来重复本项实验，从而得到更准确的波长值，如此继续，一直到各待测线的锐度证明不相宜为止。

上面我们曾经假定，除基准以外，其它波长的数据，相对地说，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

都不准确[1]．一旦有了一些测量准确度接近基准的次级标准，测定其它波长就简单化了．这时用各标准波长和剩余小数法[2]测定 $2H$，而 $2H$ 只需小到足以从近似波长 λ_1', λ_2', $\cdots$ 明确地定出 m_{11}, m_{12}, $\cdots$ 例如，由 (53a) 和 (57) 式，

$$m_{11}+e_1=\frac{2H}{\lambda_1'}-(m_{11}+e_1)\frac{\Delta\lambda_1'}{\lambda_1'}, \qquad (60)$$

当 $(m_{11}+e_1)\Delta\lambda_1'/\lambda_1'$ 譬如说 ~ 0.3 时，m_{11} 即可明确地定出．如果同前

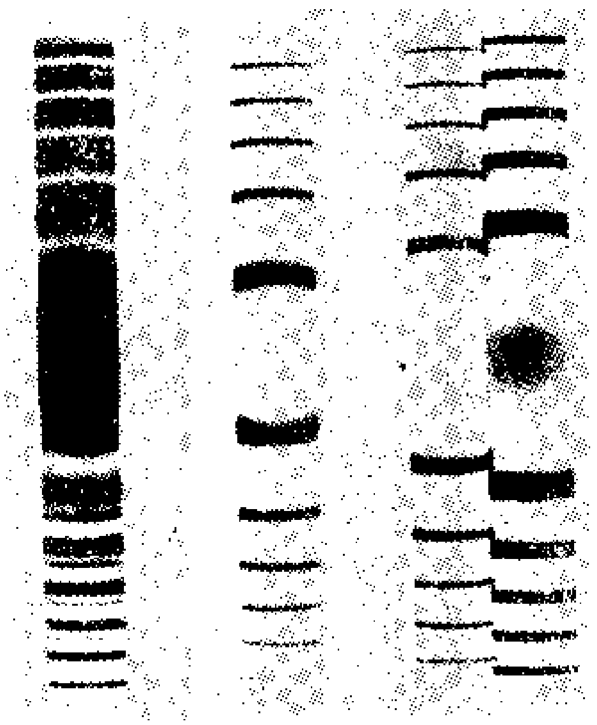


图 7.64　氦的发射光谱线形成的法布里-珀罗条纹(照相负片)
[引自 K. W. Meissner, *J. Opt. Soc. Amer.*, **31** (1941), 416.]

1) 法布里-珀罗 (*Ann. Chim. Phys.*, **16** (1899), 289) 最早几次将波长同镉红线波长进行比较时，采用了他们的滑板式干涉仪．他们利用了从双光束干涉量度学得到的 (A. A. Michelson and J. R. Benoit, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **11** (1895), 1) 准确的镉绿线 (5086 埃) 和镉蓝线 (4800 埃) 波长，并采用了所谓"重合法"来测定整数序．这个方法和我们上面所讲的剩余小数法原理相同，但是它需用目测，而且很费事．

2) 如果各标准波长靠得足够近，则可很快地计算出 x 的一个近似值，从而可减少计算量 (例如，见 C. V. Jackson, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A., **236** (1936), 1). 还可提及，G. R. Harrison (*J. Opt. Soc. Amer.*, **36** (1946), 644) 曾介绍了一种机器，可从干涉仪图样直接定出波长，必要计算皆自动完成．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\Delta\lambda_1'/\lambda_1' \sim 10^{-5}$，这就要求 $m_{11} \sim 3\times10^4$，在可见光谱波长范围，这相当于 $H\sim10$ 毫米；当小数序 e_1 的测量准确度在 ±0.01 以内时，波长 $\lambda_1 = 2H/(m_{11}+e_1)$ 的不确定度 $\Delta\lambda_1/\lambda_1$ 约为 3×10^{-7}，即用干涉仪测量一次，就使准确度提高约 30 倍。

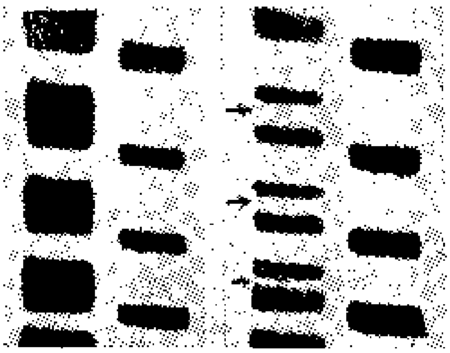


图 7.65 氪的两条光谱线形成的法布里-珀罗条纹(照相负片)：(a) 只有发射； (b) 波长 6402 埃谱线中央有吸收，箭头所示处 [引自 K. W. Meissner, *J. Opt. Soc. Amer.*, **32** (1942), 191.]

实际上，如果被比较的各条线在光谱中隔得很宽，$\phi\lambda$ 与波长无关的假定就不见得成立。由此产生的系统误差，可以用两种间隔 h_I 和 h_{II} 进行测量来加以消除。因为这时由(29)和(30)式，并采用(53)式中的同样符号，我们可写下

$$\left\{(m_{1s}+e_s)_I - \frac{\phi_s}{\pi}\right\}\lambda_s = \left\{(m_{11}+e_1)_I - \frac{\phi_1}{\pi}\right\}\lambda_1$$

$$= \cdots = 2h_I,$$

$$\left\{(m_{1s}+e_s)_{II} - \frac{\phi_s}{\pi}\right\}\lambda_s = \left\{(m_{11}+e_1)_{II} - \frac{\phi_1}{\pi}\right\}\lambda_1$$

$$= \cdots = 2h_{II},$$

由此，

$$\lambda_1 = \frac{(m_{1s}+e_s)_{II} - (m_{1s}+e_s)_I}{(m_{11}+e_1)_{II} - (m_{11}+e_1)_I}\lambda_s. \tag{61}$$

各波长经相变修正后，其数值须化归到基准定义所规定的标准条件，即 15℃ 和 760 毫米汞压力的干燥空气，这就需要知道空气的色散。如果要再化为真空波长数值，就还须知道空气的折射率。足够准确可作此用的空气折射率和色散数据，已由多光束干涉方法测得(§ 7.6.8)。

§ 7.6.5 陆末(Lummer)-盖尔克(Gehrcke)干涉仪

我们在 §7.6.1 中已经提到，当密媒质中入射角接近临界角时，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

图 7.66　太阳光谱中吸收线形成的法布里-珀罗条纹
[引自 H. D. Babcock, *Astrophys. J.*, **65** (1927), 140.]

介质界面的反射率将趋近1. 这一效应被陆末-盖尔克应用于他们所设计的多光束干涉仪中[1]. 此干涉仪主要由一块长的平行平面玻璃板或结晶石英板构成(图 7.67). 板的一端固定有一个棱镜P,

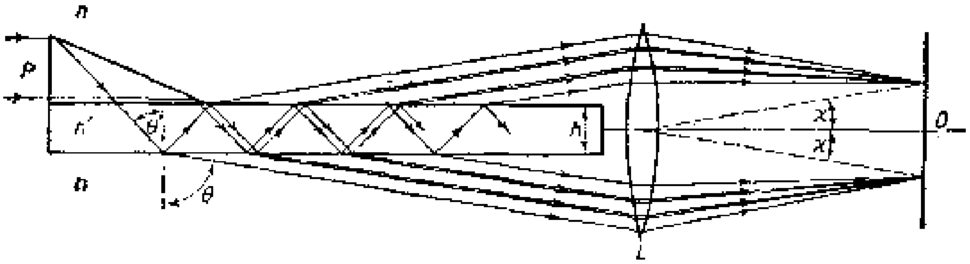


图 7.67　陆末-盖尔克干涉仪

1) O. Lummer, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, **3**(1901), 85.
O. Lummer and E. Gehrcke, *Ann. d. Physik*, (4), **10** (1903), 457.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光源放在板的长轴上，其光束经棱镜 P 进入板内，与板上下两面所形成的角度略小于临界角．于是，有一系列光束从板两边射出，出射角接近90°．这些光束经透镜 L 收集后，在其焦平面上形成干涉图样．

对波长 λ_0 的单色光来说，相邻两束光的位相差 δ 由(1)式给出，即

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos\theta' = \frac{4\pi h}{\lambda_0}\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}, \tag{62}$$

式中 h 和 n' 是板的厚度和折射率，n 是周围空气的折射率，θ' 是板中折射角，θ 是出射角．相应的干涉序

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2h}{\lambda_0}\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta}. \tag{63}$$

干涉条纹各对应于一定的 θ，它们形成一双曲线族，而在图样中心 O 附近，它们近似直线，方向与板面平行．由(63)式可知，图样中心($\theta = \pi/2$)的干涉序 m_0 为

$$m_0 = \frac{2h}{\lambda_0}\sqrt{n'^2 - n^2}, \tag{64}$$

因而

$$m - m_0 = \frac{2h}{\lambda_0}\left(\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta} - \sqrt{n'^2 - n^2}\right). \tag{65}$$

如令 $\chi = (\pi/2) - \theta$，则 χ 在中心附近很小，因此可取 $\sin^2\theta = 1 - \chi^2$；然后将(65)式展开，并略去 χ 二次幂以上各项，得到

$$m - m_0 = \frac{n^2}{\sqrt{n'^2 - n^2}}\frac{h\chi^2}{\lambda_0}. \tag{66}$$

从中心数起第 q 个亮条纹对应于整数序 m_q，相应的角度 χ_q 为

$$\chi_q = \frac{\sqrt[4]{n'^2 - n^2}}{n}\sqrt{\frac{\lambda_0}{h}}\sqrt{m_q - m_0} = \frac{\sqrt[4]{n'^2 - n^2}}{n}\sqrt{\frac{\lambda_0}{h}}\sqrt{q - e}, \tag{67}$$

式中 e 是中心小数序．这样，图样的角尺度正比于 $\sqrt{\lambda_0/h}$，而当 $e = 0$ 时，各亮条纹距轴的距离正比于正整数平方根．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

干涉图样的强度分布与§7.6.1中所讨论的分布不同，因为这里没有板外表面反射的贡献。为了简化对这点的讨论，分析图7.68的装置更为方便。这个装置用挡板 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 围成一孔 JK，而让光经此孔折射到板中。显然，就板的作用而论，图7.67的棱镜也就相当于这样的孔，只是反射系数可以忽略而已[1]。设从板上、下两面以 θ 角射出的光分别聚于 L 的焦点 P' 和 P，并设当板取走时 P 处光的复振幅为 A。如果不考虑那个不重要的常数位相因子，则下组光束在 P 点的复振幅依次为(参见§7.6.1)

$$tt'A,\quad tt'r'^2Ae^{i\delta},\quad \cdots tt'r'^{2(p-1)}Ae^{i(p-1)\delta},\cdots$$

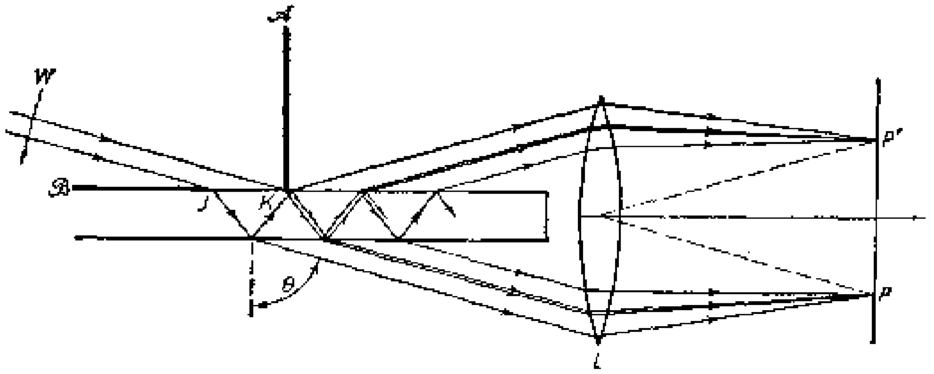


图 7.68 当去掉外反射光束时平行平面板中多次反射图示

因此，前 p 束光在 P 点叠加产生的合振幅为

$$A^{(t)}(p)=(1+r'^2e^{i\delta}+\cdots+r'^{2(p-1)}e^{i(p-1)\delta})tt'A$$

$$=\frac{1-\mathscr{R}^pe^{ip\delta}}{1-\mathscr{R}e^{i\delta}}\mathscr{T}A. \tag{68}$$

如果取极限，令光束数 $p\to\infty$，则

$$A^{(t)}\equiv A^{(t)}(\infty)=\frac{\mathscr{T}}{1-\mathscr{R}e^{i\delta}}A, \tag{69}$$

因而 P 点的强度 $I^{(t)}=A^{(t)}A^{(t)*}$ 为

$$I^{(t)}\equiv I^{(t)}(\infty)=\frac{\mathscr{T}^2}{1+\mathscr{R}^2-2\mathscr{R}\cos\delta}I=\frac{1}{1+F\sin^2\dfrac{\delta}{2}}I, \tag{70}$$

1) 法布里-珀罗干涉仪实际也可实现类似装置，只要把它的一个反射敷层空出一孔而让光由此进入。C. Dufour 曾讨论了这种装置的特性，见 *Rev. d'Opt.*, **24** (1945), 11.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $I=AA^*$ 是当板取走时 P 点的强度. 类此,上组光束在 P' 点的振幅依次为

$$tt'r'A,\ tt'r'^3e^{i\delta}A,\ \cdots tt'(r')^{2p-1}e^{i(p-1)\delta}A,\ \cdots,$$

所以前 p 束光在 P' 点叠加产生的合振幅为

$$A^{(r)}(p)=(1+r'^2e^{i\delta}+\cdots+r'^{2(p-1)}e^{i(p-1)\delta})tt'r'A$$

$$=\frac{1-\mathscr{R}^pe^{ip\delta}}{1-\mathscr{R}e^{i\delta}}\sqrt{\mathscr{R}}\,\mathscr{T}A; \tag{71}$$

而在 $p\to\infty$ 极限时, P' 点的强度为

$$I^{(r)}\equiv I^{(r)}(\infty)=\frac{\mathscr{R}\mathscr{T}^2}{1+\mathscr{R}^2-2\mathscr{R}\cos\delta}I=\mathscr{R}I^{(t)}. \tag{72}$$

由(70)和(72)式显然可见,上、下干涉图样的相应极大相对于板法线的角位置是相同的.

显然,同侧光束沿板长方向的间距为 $2h\tan\theta'$, 所以如果板长为 l, 则光束数

$$p\sim\frac{l}{2h}\cot\theta'=\frac{l}{2h}\sqrt{\frac{n'^2}{n^2\sin^2\theta}-1}; \tag{73}$$

以 $\theta\sim\pi/2$, 空气的 $n=1$ 代入,即有

$$p\sim\frac{l}{2h}\sqrt{n'^2-1}. \tag{74}$$

当 θ' 趋近临界角时, $\mathscr{R}\to1$, $\mathscr{R}^p$ 不再可以忽略, 因而这时使用 $p\to\infty$ 时的极限式(70)、(72)就不对了. 在这种情况下,上干涉图样的强度分布由(68)式可得:

$$I^{(t)}(p)=\frac{1+\mathscr{R}^{2p}-2\mathscr{R}^p\cos p\delta}{1+\mathscr{R}^2-2\mathscr{R}\cos\delta}\mathscr{T}^2I$$

$$=\frac{(1-\mathscr{R}^p)^2+4\mathscr{R}^p\sin^2\dfrac{p\delta}{2}}{(1-\mathscr{R})^2+4\mathscr{R}\sin^2\dfrac{\delta}{2}}\mathscr{T}^2I$$

$$=\frac{1+G_p\sin^2\dfrac{p\delta}{2}}{1+F\sin^2\dfrac{\delta}{2}}(1-\mathscr{R}^p)^2I, \tag{75}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$G_p = \frac{4\mathscr{R}^p}{(1-\mathscr{R}^p)^2}, \tag{76}$$

而 F 由(16)式给出． 这样，强度分布由函数 $(1+G_p\sin^2 p\delta/2)/(1+F\sin^2\delta/2)$ 来支配． 这个函数和 $p\to\infty$ 时分布函数不同之处，在于多了一项 $(G_p\sin^2 p\delta/2)/(1+F\sin^2\delta/2)$． 这一项并不影响各绝对极大的位置，它们仍然在 $\delta/2 = m\pi$ 处，其中 m 是一整数；但因这一项在 $\delta/2=(m+q/p)\pi$，$q=0, 1, 2, \cdots, p$ 时为零，而在其他 δ 时为正，故这些绝对极大比 $p\to\infty$ 时的宽，而且在它们之间还有一系列次极大(图 7.69)．

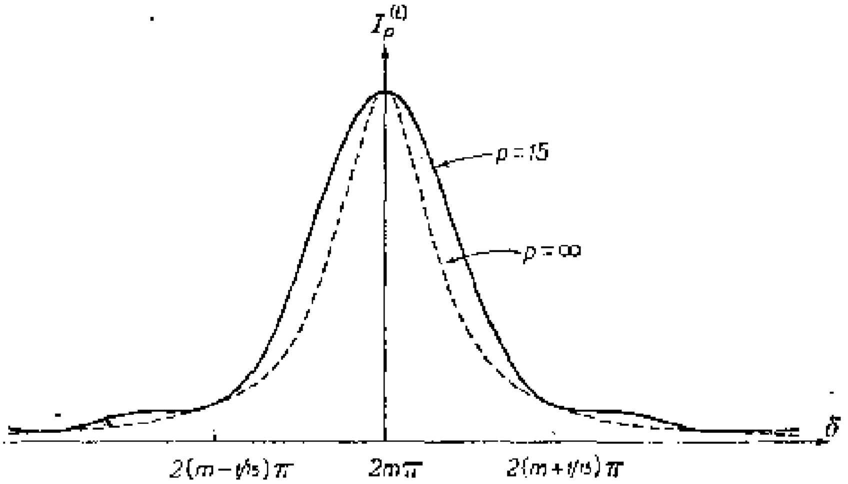


图 7.69 陆末-盖尔克干涉仪条纹：强度随位相差 δ 的变化 ($\mathscr{R}=0.87$)

陆末-盖尔克干涉仪是专门用来研究谱线精细结构的，因此使用时亦须像法布里-珀罗干涉仪那样，配备一辅助色散仪器．这干涉仪的光谱范围可由(63)式求得． 令其中 $n=1$，并写成

$$m^2\lambda_0^2 = 4h^2(n'^2-\sin^2\theta). \tag{77}$$

当 θ 给定时，波长改变 $\Delta\lambda_0$，干涉序相应改变 Δm；如果各小量都保留到一级，则由(77)式可得

$$\Delta m = \frac{4h^2n'\dfrac{dn'}{d\lambda_0} - m^2\lambda_0}{m\lambda_0^2}\Delta\lambda_0. \tag{78}$$

光谱范围 $(\Delta\lambda_0)_{S.R.}$ 对应于 m 改变 1，因此

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$(\Delta\lambda_0)_{S.R.} = \frac{m\lambda_0^2}{\left|m^2\lambda_0 - 4h^2n'\frac{dn'}{d\lambda_0}\right|};\tag{79}$$

如以(77)式的m代入,并令 $\sin\theta \sim 1$(接近掠出射),则

$$(\Delta\lambda_0)_{S.R.} \sim \frac{\lambda_0^2}{2h}\frac{\sqrt{n'^2-1}}{\left|n'^2 - n'\lambda_0\frac{dn'}{d\lambda_0} - 1\right|}.\tag{80}$$

可见,$(\Delta\lambda_0)_{S.R.}$ 反比于板厚 h. 对于石英,因子$\sqrt{n'^2-1}\Big/\left(n'^2 - n'\lambda_0\frac{dn'}{d\lambda_0} - 1\right)$在 $\lambda_0 = 2000 - 6000$ 埃范围从大约 0.6 改变到大约 0.8.

由(75)式可知,如果设 $\mathscr{R}$ 为常数,则条纹图样中 $I^{(t)}(p)$ 下降到它极大值一半的那些点对应于 $\delta = 2m\pi \pm \varepsilon/2$($m$ 是整数),其中 ε 满足

$$\frac{1 + G_p\sin^2\left(\frac{p\varepsilon}{4}\right)}{1 + F\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)} = \frac{1}{2},$$

即

$$\sin^2\left(\frac{p\varepsilon}{4}\right) - \frac{F}{2G_p}\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{1}{2G_p} = 0.\tag{81}$$

显然,细度 $\mathscr{F} = 2\pi/\varepsilon$ 依赖于 $\mathscr{R}$ 和 p 两个量. 图 7.70 绘出了在不同 p 值下 $\mathscr{F}$ 随 $\mathscr{R}$ 的变化曲线. 由(74)式可知,p 主要决定于 l/h. $\mathscr{R}$ 当然是 θ' 的函数,因而是 χ 的函数,并且当 χ 给定时,$\mathscr{R}_\perp > \mathscr{R}_\parallel$(在 $n' > n$ 情况);因此,选择振动垂直于入射面的偏振分量是有利的. 极限情况 $p \to \infty$ 对应于一个无限长的板,相应的强度分布和法布里-珀罗干涉仪的相似(试比较(70)和(27)式);在此情况下,细度由(35)式给出. 当 p 是有限时,图 7.70 表明,只要 $\mathscr{R}$ 不太大,$\mathscr{F}$ 值就等同于 $p = \infty$ 时的相应值. 当 $\mathscr{R}$ 不太大时,$\mathscr{R}^p$(因而也有 G_p)可以忽略,所有进入板中的光基本

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

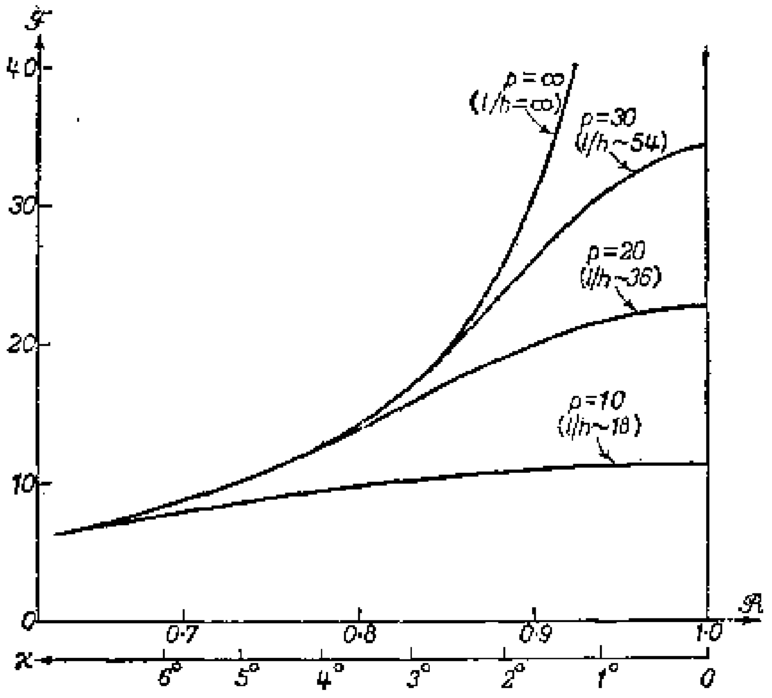


图7.70 在陆末-盖尔克干涉仪情况下，细度 $\mathscr{F}$ 随反射率 $\mathscr{R}$ 和反射次数 p 的变化曲线(为了比较，同时给出了离图样中心的角度 χ 以及板长与板厚之比 l/h，系对石英板而言)

上部又射出，参与了条纹的形成．$\mathscr{R}$再加大时，$\mathscr{F}$ 值小于 $p=\infty$ 时的相应值，而当 $\mathscr{R}$ 趋近 1 时，$\mathscr{F}$ 趋近一最大值

$$\mathscr{F}_l = \frac{2\pi}{\varepsilon_l}, \tag{82}$$

式中极限值 ε_l 可借助(81)式求得． 为此，令 $\mathscr{R}=1-\mathscr{T}$，因 $\mathscr{T}$ 很小，故 $1-\mathscr{R}^p \sim p\mathscr{T}$，是则 $F/G_p=(1-\mathscr{R}^p)^2/\mathscr{R}^{p-1}(1-\mathscr{R})^2 \sim p^2(1-\mathscr{T})^{p-1}$，而当 $\mathscr{T}\to 0$ 时，$F/G_p \to p^2$；又因 $\mathscr{T}\to 0$ 时，$1/G_p \to 0$，所以(81)式化为

$$\sin^2\left(\frac{p\varepsilon_l}{4}\right)-\frac{p^2}{2}\sin^2\left(\frac{\varepsilon_l}{4}\right)=0. \tag{83}$$

因 ε_l 很小，由此

$$\frac{\sin\dfrac{p\varepsilon_l}{4}}{\dfrac{p\varepsilon_l}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{p\varepsilon_l}{4}=0.45\pi,\quad \mathscr{F}_l=1.1p. \tag{84}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

然而，(75) 式表明，当 $\mathscr{R} \to 1$ 时，图样强度 $I^{(t)}(p) \to 0$；进入板中的光在最后一次反射后剩留的比例越来越大，结果都损失在板的另端．如果，象通例那样，任何可观的光损失都是不可取的，这干涉仪就必须用在相当于 $p = \infty$ 时的 $\mathscr{F}$ 值范围，而由图 7.70 可见，这个范围的最高 $\mathscr{F}$ 值约为 $2\mathscr{F}_1/3 \sim 0.7p$．在这范围内，相对强度分布的形式和法布里-珀罗干涉仪所给出的相似，因此，按 438 页上所讲，我们可以取可分辨的最小波长差 $\Delta\lambda_0$ 近似地等于 $1/\mathscr{F}$ 乘以光谱范围 $(\Delta\lambda)_{S.R.}$．利用 (74) 和 (80) 式，就得到 $\mathscr{F} \sim 0.7p$ 时相应的分辨本领为

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} \sim \frac{0.7p\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{S.R.}} \sim 0.7\frac{l}{\lambda_0}\left|n'^2 - n'\lambda_0\frac{dn'}{d\lambda_0} - 1\right|. \tag{85}$$

(85) 式所给出的分辨本领仅仅依赖于板长 l，与板厚 h 全然无关，但是我们必须记住，这个分辨本领是在某 θ 处达到的，当 l 加大时，这 θ 趋近 $\pi/2$．实际上，由于加工技术困难，板长 l 是有限制的．

结晶石英做的陆末-盖尔克干涉仪，短波一直可透明到 2000 埃左右，因此在很长时期内，它一直是紫外高分辨光谱学可利用的最佳干涉仪．但是，在研制出适用于法布里-珀罗干涉仪的紫外反射敷层和做成功反射阶梯光栅之后，这个优点就失去了．现在陆末-盖尔克干涉仪在研究中已很少使用．

§ 7.6.6 干涉滤波器

假设有一束平行白光，垂直射到一块两面反射率都很高的平行平面板上．我们从 (27) 式看到，当位相差 δ 是 2π 的整数倍时，或者由 (25) 式，当波长 $\lambda_0 = \lambda_0^{(m)}$，其中

$$\lambda_0^{(m)} = \frac{2n'h}{(m - \phi/\pi)}, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{86}$$

时，透射光的强度是极大；而且在各极大两边的波长处，透射光的强度急剧下降到很低．这样，这板就是一个有多个透射带的波长滤器，每个带各对应一整数干涉序 m．特别是，当板的光学厚度

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

只有几个 1/2 可见光波长时，可见区各透射带是低干涉序的，在波长上相隔很宽，因此借助辅助的吸收型滤波器，或者依靠观测探测器的选择性波长响应，通常可以抑制住所有来光而仅让其中某个起作用.

这种滤波器可用加膜方法制备于平玻璃面上(图 7.71)，上、下为反射膜，中间为介质膜(间隔层). 如果要求滤波器在正入射下对波长 $\lambda_0^{(m)}$ 有一个 m 序透射带，则由 (86) 式可知，间隔层的光学厚度 $n'h$ 必须等于 $(m-\phi/\pi)\lambda_0^{(m)}/2$. 如采用金属反射膜，则 ϕ 依赖于 λ_0 和膜厚(因而依赖于反射率 $\mathscr{R}$). 如采用多层介质反射膜，则当每层膜的光学厚度为 $\lambda_0^{(m)}/4$ 时，$\mathscr{R}(\lambda_0^{(m)})$ 为极大，并且 $\phi(\lambda_0^{(m)})$ 为零 (参见 §1.6); 因此，这时间隔层的光学厚度应为 $m\lambda_0^{(m)}/2$.

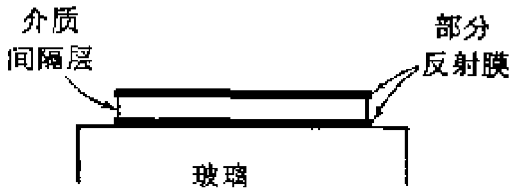


图 7.71 法布里-珀罗型干涉滤波器

滤波器有两个重要的特性参量: 峰值透射率 τ 和波长半宽度 $(\Delta\lambda_0)_{H.W.}$. τ 的定义和法布里-珀罗干涉仪情况的一样 (方程 (33))，而半宽度 $(\Delta\lambda_0)_{H.W.}$ 是指透射带中强度 $I^{(t)}/I^{(i)}$ 下降到它极大值一半时左右两边波长的间隔. 如果在滤波器孔径范围内二反射面的光学间隔是常量，则 τ 由 (36) 式给出; 并且由 (21) 式，$(\Delta\lambda)_{H.W.}$ 对应于 δ 改变 $4/\sqrt{F}$，如果在这波长间隔内 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 随波长的变化可以忽略的话. 由(25)式，在正入射下，当 λ_0 改变 $\Delta\lambda_0$ 时，δ 相应改变 $\Delta\delta$; 如果忽略间隔层中的色散，并且各小量保留到一级，则

$$\Delta\delta=\left(-\frac{4\pi}{\lambda_0^2}n'h+2\frac{d\phi}{d\lambda_0}\right)\Delta\lambda_0; \qquad (87)$$

用 (86) 式 $n'h$ 代入，从而得到，在 m 序透射带附近，

$$\Delta\delta=\frac{2\pi}{\lambda_0^{(m)}}\left\{-m+\frac{1}{\pi}\left[\frac{d}{d\lambda_0}(\phi\lambda_0)\right]_{\lambda_0^{(m)}}\right\}\Delta\lambda_0. \qquad (88)$$

刚才谈到，滤波器的波长半宽度对应于 δ 改变 $4/\sqrt{F}$，因此

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$(\Delta\lambda_0)_{H.W.}=\frac{2\lambda_0^{(m)}}{\pi\sqrt{F}\left|m-\frac{1}{\pi}\left[\frac{d}{d\lambda_0}(\phi\lambda_0)\right]_{\lambda_0^{(m)}}\right|}$$

$$=\frac{\lambda_0^{(m)}}{\mathscr{F}\left|m-\frac{1}{\pi}\left[\frac{d}{d\lambda_0}(\phi\lambda_0)\right]_{\lambda_0^{(m)}}\right|},\qquad(89)$$

式中利用了(22)式．当反射膜是金属膜时，$d\phi/d\lambda_0$ 很小，以致 $d(\phi\lambda_0)/d\lambda_0\sim\phi$．当反射膜中包含多层介质膜时，相变效应如何，杜福曾进行了讨论[1]．他给出如下数据：在可见光谱区，当以硫化锌和冰晶石为介质材料时，$\frac{d}{d\lambda_0}(\phi\lambda_0)/\pi$ 在大约 -1.0 和 -1.5 之间[2]．

我们曾经看到，不管采用现有的哪种反射膜，τ 均随 $\mathscr{F}$ 的增大而下降，因此滤波器在干涉序和制备材料一定时，半宽度越小，峰值透射率越低．实际上，正象法布里-珀罗干涉仪的情形一样，反射率太高没用，其上限决定于两个反射面的光学间隔在孔径范围内的不均匀情况．然而，在这个关系上，滤波器载片玻璃面的平度偏差影响并不重要，因为蒸发膜能适应加膜表面的"地形"．采用适当的制备装置，能使滤波器反射面光学间隔的不均匀程度，比法布里-珀罗干涉仪两个独立工作面可能达到的要小得多，因而可相应地采用较高的反射率．作为示例，下列二表给出了一些滤波器的性能数据．表 16 是金属反射膜和金属-介质反射膜滤波器，表 17 是全介质滤波器．实验表明，半宽度一样时，含介质层反射膜的滤波器峰值透射率最高．可以指出，由于这种膜的反射特性与波长有关，采用这种反射膜的滤波器除去(86)式所给的主透射带以外，还具有若干次级透射带．

因为通常要求滤波器透射某一特定波长，所以间隔层的光学厚度必须控制得很准．由(86)式可知，$n'h$ 改变 $\Delta(n'h)$ 时，m 序透射带的位置相应移动 $\Delta\lambda_0^{(m)}$，$\Delta\lambda_0^{(m)}=\lambda_0^{(m)}\Delta(n'h)/n'h$．以 $\lambda_0^{(m)}=5000$

---

1) C. Dufour, *Rev. d'Opt.*, **31** (1952), p. 1.

2) 在讨论法布里-珀罗干涉仪的分辨本领时，我们忽略了 ϕ 对波长的依赖关系(试比较(42)和(88)式)．当 m 足够大时，这显然是合理的．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 16 金属反射膜和金属-介质反射膜干涉滤波器的性能. M 代表金属膜(银), L 代表 1/4 波长低折射率介质层(氟化镁), 而 H 代表 1/4 波长高折射率介质层(硫化锌)

[引自 A. F. Turner, *J. Phys*, **11** (1950), 457.]

滤 波 器 类 型	极大透射率波长 $\lambda_0^{(m)}$(埃)	峰值透射率 τ	半宽度 $(\Delta\lambda_0)_{H.W.}$(埃)
M—2L—M	5310	0.30	130
M—4L—M	5350	0.26	70
MLH—2L—HLM	5470	0.43	48
MLHLH—2L—HLHLM	6050	0.38	20

表 17 硫化锌-冰晶石干涉滤波器性能. L 代表 1/4 波长冰晶石层, H 代表 1/4 波长硫化锌层

[引自 P. H. Lissberger and J. Ring, *Optica Acta*, **2** (1955), 45.]

滤 波 器 类 型	极大透射率波长 $\lambda_0^{(m)}$(埃)	峰值透射率 τ	半宽度 $(\Delta\lambda_0)_{H.W.}$(埃)
HLH—2L—HLH	5185	0.90	380
HLHLH—2L—HLHLH	4750	0.85	110
HLHLHL—2H—LHLHLH	6565	0.90	65
HLHLHLH—2L—HLHLHLH	5200	0.70	40
HLHLHLHL—2H—LHLHLHLH	6500	0.80	35
HLHLHLHLHL—2H—LHLHLHLHLH	6600	0.50	20

埃为例, 间隔层光学厚度有 1% 误差时, 通带位置就要产生 50 埃的误差, 这已大于窄带滤波器的半宽度了. 格林兰 (K. M. Greenland) 和比林顿 (C. Billington)[1], 贾科莫 (P. Giacomo) 和杰奎诺特[2] 以及利斯伯格(P. H. Lissberger)和林[3] (J. Ring)曾介绍了在加膜过程中监控间隔层厚度的种种适当方法. 从(25)式也可看出, 把滤波器放斜, 以使光偏离正入射, 可将通带调节到较短波长. 但是当倾斜度增大时, 滤波器性能就要变劣. 尤是其, 当反射膜是金属

1) K. M. Greenland and C. Billington, *Journ. de Phys.*, **11** (1950), 418.
2) P. Giacomo and P. Jacquinot, *J. Phys.*, **13** (1952), 59A.
3) P. H. Lissberger and J. Ring, *Optica Acta* **2** (1955), 42.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

膜时，光的电矢量平行于入射面和垂直于入射面这两种情况的相变 $\phi_{\parallel}$ 和 $\phi_{\perp}$ 不相等，因而这两个偏振分量的通带位于不同波长．在一定倾斜下，滤波器通带的波长位移依赖于间隔层中的反射角 θ'，而且间隔层折射率越高，这一位移越小．由于这个原因，当滤波器须在会聚光下使用时，选取高折射率材料做间隔层当为有利．

莱维甘斯 (P. Leurgans) 和特纳 (A. F. Turner)[1] 首先报导了另一种式样的干涉滤波器，即所谓受抑全反射滤波器．在这种滤波器中，反射膜各由一个夹于高折射率媒质之间的低折射率薄层构成．我们在 §1.5.4 中曾经看到，如果这种低折射率层足够薄，则当入射光的角度大于临界角时，也不发生全反射；仍有一部分光通过薄层．这样，它就是一个无吸收反射器，而通过调节层的厚度可得到所需要的任何反射率．这种滤波器的构造如图 7.72 所示．先在一块重玻璃棱镜的斜面上敷镀一层低折射率膜，而后镀上高折射率间隔层和另一低折射膜；再用胶将另一块同样的棱镜粘到第一块棱镜上，胶的折射率应和玻璃的相同．棱镜角和棱镜折射率应如此选择，以使正入射到棱镜底面的光在射到低折射率层上时角度大于临界角．透射带的波长依赖于间隔层的光学厚度，层中的反射角和反射相变；反射率(因而一定干涉序的半宽度)则依赖于低折射率层的厚度．相变依赖于偏振态，因而振动平行于入射面和垂直于入射面这两个分量的同序透射带位于不同波长．表 18 给出了可见光谱区用的这种典型滤波器的性能数据．这种类型的滤

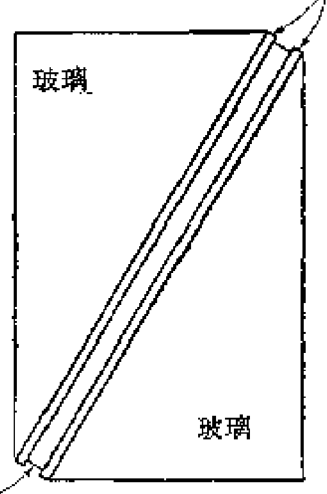


图 7.72　受抑全反射干涉滤波器

1) P. Leurgans and A.F. Turner, *J.Opt. Soc. Amer.*, **37** (1947), 983.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 18 某些受抑全反射滤波器的性能数据，滤波器用重火石玻璃棱镜，氟化镁反射层和硫化锌间隔层

[引自 A. R. Turner. *J. Phys.*, **11** (1950), 458.]

干 涉 序	1		2		1	
偏 振 态	∥	⊥	∥	⊥	∥	⊥
极大透射率波长 $\lambda_0^{(m)}$ (埃)	4600	5300	4630	5080	—	5110
峰值透射率 τ	>0.93	>0.93	0.90	0.90	—	0.12
半宽度 $(\Delta\lambda_0)_{H.W.}$ (埃)	66	120	50	49	—	30

波器在厘米波波段亦曾有使用[1].

§7.6.7 薄膜多光束干涉条纹

在 §7.6.1 中我们曾经看到，平行平面板的等倾条纹在板面反射率增高时大大变锐。反射率的增高，对薄膜斐索等厚条纹(§7.5.2)的强度分布也有同样的效应，结果将薄膜等厚线图的细小结构显示了出来。

为简单起见，我们首先讨论劈形膜的情况，并假定膜的两面都是平面，相交成一个很小的角度 α，而且入射光是平面波，传播方向与劈棱 O 垂直[2]（图 7.73）。由于两面之间的多次反射，透射光中遂形成一组传播方向不同的平面波。如果入射波经第一面折射后，射向第二面的路径和劈棱位于法线同侧，并且入射角为 θ'，则由折射定律和反射定律可知，透射光中第 p 个波的出射角 θ_p 满足

$$n\sin\theta_p = n'\sin[\theta' + 2(p-1)\alpha], \tag{90}$$

式中 n' 是膜的折射率，n 是周围媒质的折射率。现在通过劈棱作各透射波的虚波阵面 $W_1, W_2, \cdots W_p, \cdots$，假如没有反射相变，它们应该是同相的。因此，在第二面的 P 点处，第 p 个透射波和直接透射波 $(p=1)$ 的光程差

$$\Delta\mathscr{S}_p = n(PN_p - PN_1) = n\rho(\sin\theta_p - \sin\theta_1), \tag{91}$$

式中 N_p, N_1 分别是 P 到 W_p, W_1 的垂足，ρ 是 P 离劈棱 O 的距离.

1) B. H. Billings, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39** (1949), 634.

2) 这里的分析主要出自 J. Brossel, *Proc. Phys. Soc.*, **59** (1947), 224.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

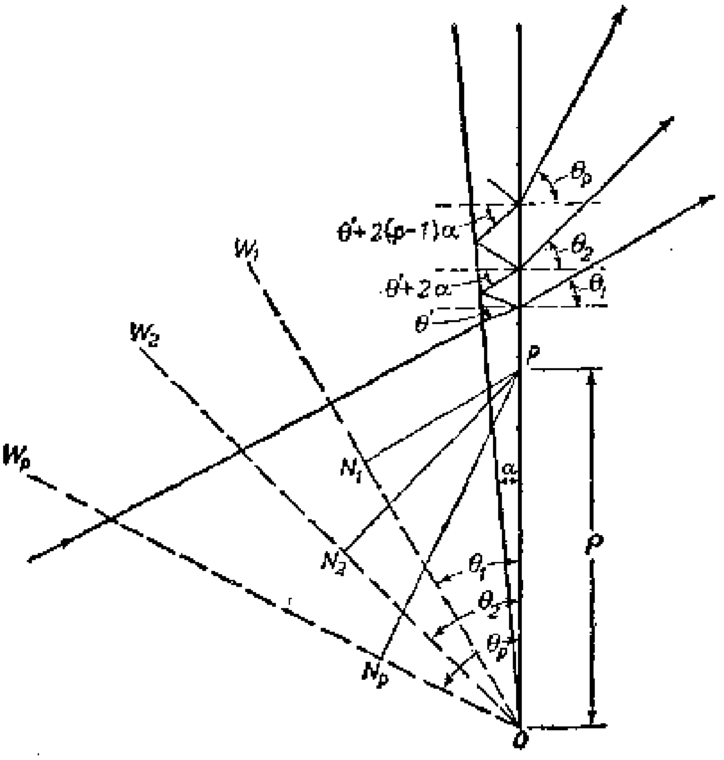


图 7.73　劈中多次反射图示

如劈面反射每次均产生一相变 ϕ，则第 p 个波和直接透射波的总位相差为

$$\delta_p = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathscr{S}_p + 2(p-1)\phi,$$

以 (90) 和 (91) 式代入时，有

$$\begin{aligned}\delta_p &= \frac{2\pi}{\lambda_0}n'\rho\{\sin[\theta' + 2(p-1)\alpha] - \sin\theta'\} + 2(p-1)\phi \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta'\frac{\sin(p-1)\alpha}{\tan\alpha}\{\cos(p-1)\alpha \\ &\quad - \tan\theta'\sin(p-1)\alpha\} + 2(p-1)\phi,\end{aligned} \tag{92}$$

式中

$$h = \rho\tan\alpha$$

是 P 点的膜厚。如果入射波经第一面折射后，射向第二面的路径和劈棱分居法线两侧，则波阵面 W_1 是实的。在此情况下，δ_p 仍由 (92) 式给出，但 $\tan\theta'$ 项要改为正号。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

采用和§7.6.1同样的符号，各透射波的振幅依次为

$$tt'A^{(i)}e^{i\delta_1},\ tt'r'^2A^{(i)}e^{i\delta_2},\ \cdots tt'r'^{2(p-1)}A^{(i)}e^{i\delta_p},\cdots,$$

无限多个这种波相叠加，在 P 点产生的合振幅为

$$A^{(t)}=A^{(i)}tt'\sum_{p=1}^{\infty}r'^{2(p-1)}e^{i\delta_p}=A^{(i)}\mathscr{T}\sum_{p=1}^{\infty}\mathscr{R}^{p-1}e^{i\delta_p}. \tag{93}$$

相应的强度

$$I^{(t)}=I^{(i)}\mathscr{T}^2\left|\sum_{p=1}^{\infty}\mathscr{R}^{p-1}e^{i\delta_p}\right|^2. \tag{94}$$

让我们看看，在(93)和(94)式的级数中只保留有限项数时结果如何。$|A^{(t)}|$ 不能大于 $|A^{(i)}|\mathscr{T}/(1-\mathscr{R})$，如只取前 p 项，则 $A^{(t)}$ 的误差 $|\Delta A^{(t)}|$ 不会超过 $|A^{(i)}|\mathscr{T}\mathscr{R}^p/(1-\mathscr{R})$。相应的相对误差 $|\Delta I^{(t)}|/I^{(t)}$ 满足下列关系：

$$\frac{|\Delta I^{(t)}|}{I^{(t)}}\leqslant 2\left|\frac{\Delta A^{(t)}}{A^{(t)}}\right|\leqslant 2\left|\frac{A^{(i)}}{A^{(t)}}\right|\frac{\mathscr{T}\mathscr{R}^p}{(1-\mathscr{R})}. \tag{95}$$

下面我们即将看到，在实际最重要的条件下，$I^{(t)}$ 由爱里公式(13)来表示差不多足够了。按照这一公式，极小强度对应于 $|A^{(t)}|=|A^{(i)}|\mathscr{T}/(1+\mathscr{R})$。这样，如果对于这一特定的 $|A^{(t)}|$ 值，我们希望 $|\Delta I^{(t)}|/I^{(t)}$ 不大于譬如说0.01，这意味着在 $I^{(t)}$ 极大附近强度的相对误差将远远小于0.01，则由(95)式可知，级数中须要保留的项数 p 由下式给出：

$$\mathscr{R}^p\sim\frac{1}{200}\,\frac{1-\mathscr{R}}{1+\mathscr{R}}. \tag{96}$$

例如，当 $\mathscr{R}=0.93$ 时，$p\sim 120$。

当(94)式的级数中只保留有限项数时，如果 α 很小，我们就可将(92)式按 α 幂次展开，并只保留到二次项，从而得到

$$\delta_p=(p-1)\left\{\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta'+2\phi\right\}-(p-1)^2\alpha\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\sin\theta'$$
$$-\frac{(p-1)(2p^2-4p+3)\alpha^2}{3}\cdot\frac{4\pi n'h\cos\theta'}{\lambda_0}. \tag{97}$$

特别是，在正入射情况($\theta'=0$)下，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\delta_p = (p-1)\left(\frac{4\pi n'h}{\lambda_0} + 2\phi\right)$$

$$-\frac{(p-1)(2p^2-4p+3)\alpha^2}{3}\frac{4\pi n'h}{\lambda_0}. \qquad (98)$$

当(98)中 α^2 项比 π 小得多时，我们可把它忽略，并可认为相邻二波的位相差 $\delta_p - \delta_{p-1}$ 为常数，等于 $\delta = 4\pi n'h/\lambda_0 + 2\phi$. 这时，$I^{(t)}$ 由爱里公式(13)表出，因而条纹虽然形成在劈平面上，但其强度分布和平行平面板在无穷远产生的条纹强度分布(图 7.58)相似. 强度极大对应于 $\delta = 2m\pi$，其位置由下式决定：

$$2n'h = \left(m - \frac{\phi}{\pi}\right)\lambda_0,\quad m = 1, 2, \cdots. \qquad (99)$$

这样，各条纹平行于劈棱，间距为 $\lambda_0/2n'\alpha$. 如反射率很高($\mathscr{R} \gtrsim 0.9$)，使得 p 很大，$(p-1)(2p^2-4p+3)$ 可用 $2p^3$ 代替，则(98)中 α^2 项应比 π 小得多的条件要求

$$n'h \ll \frac{3\lambda_0}{8p^3\alpha^2}. \qquad (100)$$

当 α 的大小相当于约 1 厘米或者更小的条纹间隔时，这个条件对 $n'h$ 是一个严苛的限制，因而只有在劈棱附近膜的光学厚度仅为几个波长的地区，条纹的强度分布才是爱里分布. 例如，当 $\alpha \sim 2.5 \times 10^{-4}$(在 $n' \sim 1$，$\lambda_0 = 5500$ 埃时，这相当于每毫米约 1 个条纹)，$p \sim 50$($\mathscr{R} \sim 0.9$)时，由(100)式得到 $n'h \ll 50\lambda_0$. 离劈棱再远，(98)式中 α^2 项就变得越来越重要，这时数字计算表明(图 7.74) $I^{(t)}$ 开始受到下列三方面影响： 极大强度变得小于爱里公式所给的数值，而同时半宽度变大；极大的位置偏离(99)式所给的数值，向远离劈棱一边移动；条纹变得不对称，并且在远离劈棱一边出现有一些次极大.

按照(99)式，当膜面为平面时，条纹顺沿着等光学厚度线. 然而，条纹的重要实际应用是用来检查非平面膜，因此现在我们必须研究在这种情况下，条纹跟等厚线接近到什么程度. 要条纹丝毫不差地绘出不规则膜的等厚线，各 P 点的强度必须唯一决定于 P

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

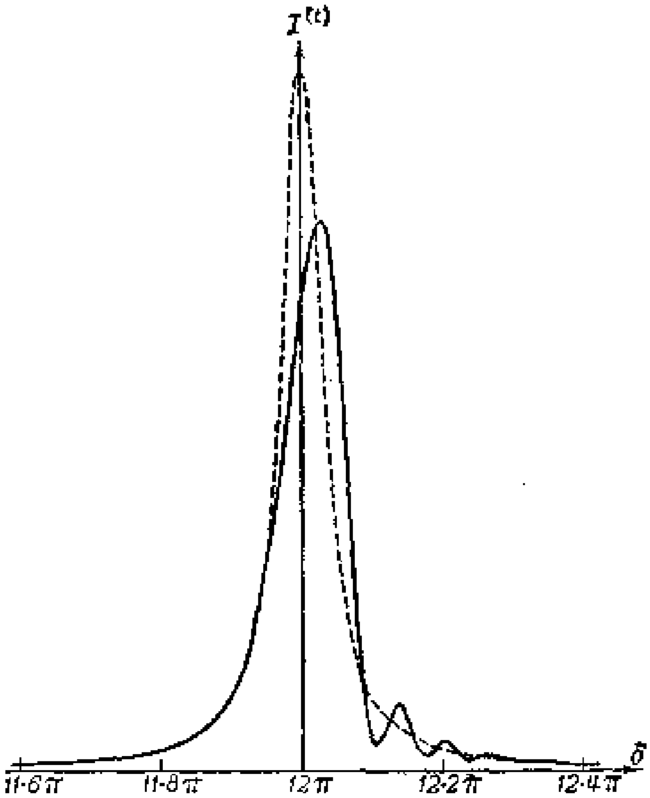


图 7.74 多光束斐索条纹强度分布(实线),和相应爱里分布(链线)比较

[引自 K. Kinosita, *J. Phys. Soc. Japan*, **8** (1953), 219.]

点的膜厚,但一般并非如此. 在 P 点,经过 $2(p-1)$ 次反射后到达的光线(图7.75(a)),是在A_1点进入膜内并依次在 B_1, C_1, $\cdots B_{p-1}$, C_{p-1} 各点被反射的,因而这一光线对 P 点合振幅的贡献,就与 A_1 和 P 之间膜的光学厚度有关. 这样,条纹就可能偏离实际的等光学厚度线,偏离的大小取决于 P 点附近膜的形状. 显然,反射率越高,这影响越大,但当反射率一定时,以膜最薄处和近正入射时影响最小. 我们可以估计一下对 P 点强度有影响的膜区范围,如果我们假定这个地区的膜面为平面的话(图7.75(b)). 设 A_1', A_1'', $\cdots$ A_{p-1}', A_{p-1}'' 是 A_1 点在第二膜面上和第一膜面上接连各次的反射象. 这些象处于通过A_1点的劈主截面内,并位于以劈棱 O 点为中心、以 $OA_1=\rho'$ 为半径的圆上; 而 $\angle A_1OA_{p-1}''=2(p-1)\alpha$. 象点 A_{p-1}'' 和这光线的 $C_{p-1}P$ 段相关联,因此 $C_{p-1}P$ 延长线必定通过 A_{p-1}''. 如果我们令 B_1 点的入射光线在劈主截面内,和 O 点在法线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

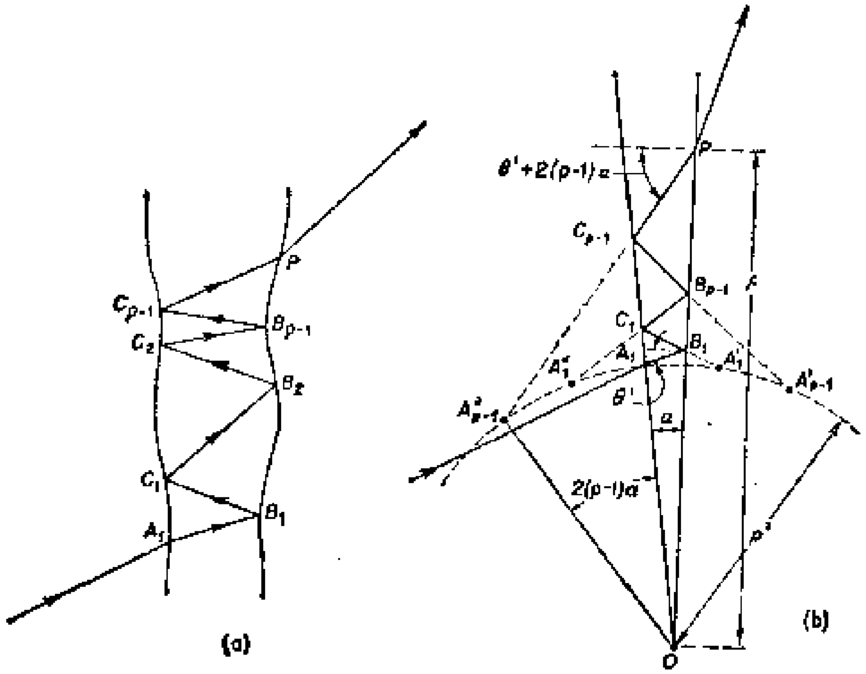


图 7.75 光线沿劈形膜多次反射时位移图示
(a) 劈面不规则 (b) 劈面为平面

同侧，入射角为θ'，则当此光线抵达 P 点时，其入射角为$\theta' + 2(p-1)\alpha$. 因此在三角形 $A''_{p-1}PO$ 中，$OA''_{p-1} = \rho'$，而

$$\angle A''_{p-1}PO = \pi/2 - [\theta' + 2(p-1)\alpha],$$
$$\angle PA''_{p-1}O = \pi/2 + (\theta' - \alpha);$$

所以如令 $OP = \rho$，则 $\rho'/\cos[\theta' + 2(p-1)\alpha] = \rho/\cos(\theta' - \alpha)$. 由此

$$\Delta\rho = \rho - \rho' = \frac{h}{\tan\alpha}\left\{1 - \frac{\cos[\theta' + 2(p-1)\alpha]}{\cos(\theta' - \alpha)}\right\}, \qquad (101)$$

而当 $\theta' = 0$ 时，略去 α 一次方以上各项，上式化为

$$\Delta\rho = \frac{4p^2 - 8p + 3}{2}h\alpha. \qquad (102)$$

这样，如果有 p 束光起作用，则可预期 P 点的强度要受到它周围 $2p^2h\alpha$ 量级距离内膜厚的影响. 当 h 只有几个可见光波长时，即使反射率非常高，这个距离也很小. 例如，当 $p\sim 50$，$h = 2.5\times10^{-4}$ 厘米(约 5 个波长)，而 $\alpha = 2.5\times10^{-4}$ 时，它约为 3×10^{-3} 毫米. 所以只要我们对条纹的细小不规则变化给以小心说明，那么当膜

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

足够薄时，即使是不规则的，条纹所描绘的也是等光学厚度线.

以上我们假定光源是一个点，但实际上出于强度方面的考虑，需要采用尽可能大的扩展光源. 按照(97)式，若 α 项和 α^2 项可予略去，则非正入射时的强度极大发生在

$$2n'h\cos\theta' = \left(m - \frac{\phi}{\pi}\right)\lambda_0, \quad m = 1, 2, \cdots, \tag{103}$$

因此式系由略去劈角得来，所以它对所有入射面都有效. 因此，如果光源周径加大，以致入射角分布在 $0 \leqslant \theta' \leqslant \varepsilon'$ 范围，则同一序的各个极大将排开一段距离，相当于干涉序改变 Δm，而当 ε' 很小时，由 (103) 式可知，

$$\Delta m = \frac{2}{\lambda_0} n'h|\Delta(\cos\theta')| = \frac{n'h\varepsilon'^2}{\lambda_0}. \tag{104}$$

光源加大所引起的条纹展宽，其影响所及取决于单个元光源产生的条纹锐度 $\mathscr{F}$；当 $n'h\varepsilon'^2/\lambda_0 \ll 1/\mathscr{F}$ 时，ε' 的增加主要是使极大增强；而当 $n'h\varepsilon'^2/\lambda_0 \gg 1/\mathscr{F}$ 时，则主要是使条纹变宽. 这个效应和法布里-珀罗条纹因干涉仪两板有球面弯曲而产生的展宽 (434 页)，在形式上是类似的. 我们可利用这个类似性来进一步研究上述效应. 将杜福和皮卡[1]的结果作适当修改即可看到，$n'h\varepsilon'^2/\lambda_0$ 一超过 $1/\mathscr{F}$，极大的强度就很少增加，因而合理的判据是 $n'h\varepsilon'^2/\lambda_0$ 应取 $1/2\mathscr{F}$，这时条纹比点源时的约宽 10%. 如果再把第一膜面上的折射考虑进来，则光源角半径最大可取为

$$\varepsilon \sim \frac{n'\varepsilon'}{n} \sim \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\lambda_0 n'}{2h\mathscr{F}}}, \tag{105}$$

这和双光束干涉方面的类似关系式 § 7.5(73) 式差别不大. 当 h 只有几个波长时，ε 并不很小；例如，当 $h \sim 5\lambda_0$，$\mathscr{F} = 30(\mathscr{R} \sim 0.9)$，$n' \sim n \sim 1$ 时，由 (105) 式得到 $\varepsilon \sim 3°$. 这样并不需要使入射光严格平行，而允许使用大一些的光源，对条纹的高倍放大观测甚为有利.

---

1) C. Dufour and R. Picca, *Rev. d'Opt.*, **24** (1945), 19.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果光是准单色的，平均波长为 λ_0，波长分布范围为 $\Delta\lambda_0$，则同一序的各个极大将排开一段距离，相当于干涉序改变 Δm。由(99)式可知，如 n' 和 ϕ 对波长的依赖关系可予忽略，则 $\Delta m = 2n'h\Delta\lambda_0/\lambda_0^2$. 如果这个量比 $1/\mathscr{F}$ 小得多，即如果

$$\Delta\lambda_0 \ll \frac{(\lambda_0)^2}{2n'h\mathscr{F}}, \tag{106}$$

则因光偏离严格单色性而引起的条纹展宽并不重要. 当 $n'h$ 只有几个波长时，条件(106)也并不严苛. 例如，当 $n'h \sim 5\lambda_0$, $\mathscr{F} = 30$, $\lambda_0 = 5500$ 埃时，由(106)式得到 $\Delta\lambda_0 \ll 18$ 埃. 因此，这里不一定要用大程差干涉量度学中所常使的那种光源，相反，可使用高压弧灯，这种灯非常亮，对高倍放大观测更属有利.

上面我们讨论了膜的透射光，但多光束干涉图样也可用反射光观察. 当反射面没有吸收时，反射干涉图样和透射干涉图样是互补的，就是说二者的强度之和在各点都等于入射强度. 实际的反射敷层总要有吸收，霍耳登(J. Holden)曾考虑了它的影响[1]. 他指出，当采用反射高而吸收低的银敷层时，反射光的干涉图样是由暗条纹构成，形成在一个近乎均匀的亮背景上，并且比透射光的相应亮条纹窄；但是反射图样的极小强度与膜前表面敷层的吸收有很大关系，如果这吸收太高，条纹就看不到了.

多光束斐索条纹在光学工厂里用来检查高级光学平面(如法布里-珀罗干涉仪所需要的那种平面)的质量，而托兰斯基(S. Tolansky)和他的同事们曾大量应用这种条纹来研究近乎平面的晶体表面和金属表面的地形[2]. 为此，他们将待测面和另一光学平面各敷镀上一层银反射膜，而后尽可能紧地贴在一起，在显微镜下观测它们之间空气膜的条纹，显微镜的角孔径要足够大，以便能收集进所有起作用的光束. 这些条纹就是以光学平面为基准时待测面的等高线，高度间隔为 $\lambda/2$，其中 $\lambda = \lambda_0/n'$ 是空气中的波长. 当二面

---

1) J. Holden, *Proc. Phys. Soc. B.*, **62** (1949), 405.

2) S. Tolansky, *Multiple-beam Interferometry of Surfaces and Films* (Oxford, Clarendon Press, 1948).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

夹角适使视场中产生数条条纹时(例如,见图 7.76),通过测量各条纹跟直线的偏离,可定量算出待测面的地形. 如表面有一坎坷,高度为 Δh, 则条纹通过此处时将遭受侧移,相当于干涉序改变 Δm, Δh 和 Δm 的关系是

$$\Delta h = \frac{\lambda}{2}\Delta m; \tag{107}$$

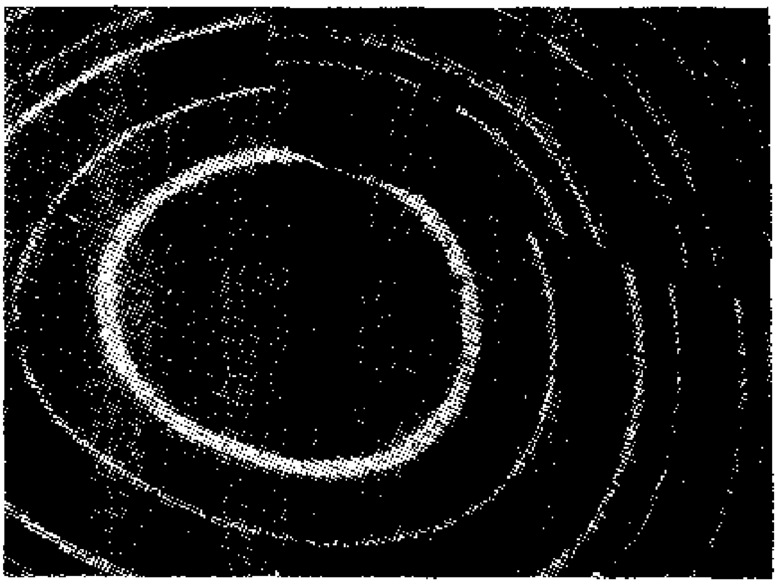


图 7.76 云母裂面上的多光束斐索条纹(透射光),包括三种波长: 汞的绿线 (5461 埃) 和两条黄线 (5770 埃, 5790 埃) (引自 W. L. Wilcock)

所以如果知道了 Δm, 就可求出 Δh, 而 Δm 等于(至少是近似地)条纹位移和相邻条纹间距之比. 当反射率很高时,用这种方法可测量出高度非常小的表面坎坷. 条纹位移等于半宽度时,还是很容易测量的,这相当于 $\Delta h = \lambda/2\mathscr{F}$,如取 $\lambda = 5500$ 埃, $\mathscr{F} = 40$, 则此 Δh 仅约为 70 埃[1]. 至于表面坎坷是凸起还是下凹,常能靠改变两面间隔同时观察条纹移动方向来决定,但一般至少需采用两种波长. 采用透射光条纹时,几种波长可同时使用,而以汞的两条黄线 $\lambda = 5770$ 埃和 5790 埃为便. 这时条纹成双出现,每对靠得很近,其间距随干涉序的增加而加大;这样,局部劈角的方位直

1) 虽然银敷层厚度有 500 埃左右,但已确定它在本法所可检测的范围之内不改变表面地形.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

接可见，而且如果条纹出现不连续(像通过晶体解理阶时那样)就可能决定出两边相对应的干涉序.

如果待测面接近平面，则可使它对光学平面的倾角减小到整个视场只有一个条纹（例如，见图 7.77). 在这种情况下,极其微小的高度差可导致可察觉的强度变化.设 I, $I+\Delta I$ 是两个近邻地区上的强度，这两个地区有一个小的高度差 Δh，相当于 δ 改变 $\Delta\delta$. $\Delta I/I$ 叫做衬比. 当调节 δ 使得 $|dI/d\delta|/I$ 为极大时，衬比 $\Delta I/I$ 也是极大. 现在我们讨论透射光图样,由(27)式有

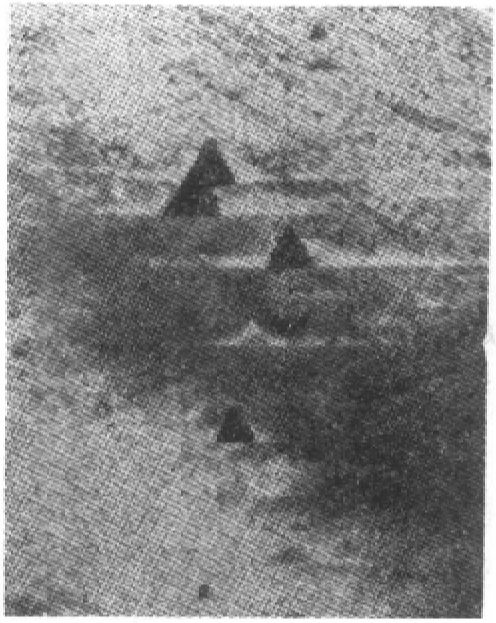


图7.77 金刚石晶面上的多光束斐索条纹

(引自 W. L. Wilcock)

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}_{极大}}=\frac{1}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}},\tag{108}$$

由此

$$\frac{d}{d\delta}\left(\frac{I^{(t)}}{I^{(t)}_{极大}}\right)=\frac{-F\sin\delta}{2\left(1+F\sin^2\frac{\delta}{2}\right)^2}.\tag{109}$$

因此

$$\frac{1}{I^{(t)}}\left|\frac{dI^{(t)}}{d\delta}\right|=\frac{F\sin\delta}{2\left(1+F\sin^2\frac{\delta}{2}\right)},\tag{110}$$

所以要衬比为极大,须

$$2\left(1+F\sin^2\frac{\delta}{2}\right)\cos\delta-F\sin^2\delta=0.\tag{111}$$

当反射率很高时,F 很大,满足(111)式的 δ 值接近 2π 整数倍,因而可令 $\delta=2m\pi\pm\varepsilon$，其中 m 为一整数，而 ε 比 $\pi/2$ 小得多. 代入

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(111)式,略去 ε 二次方以上各项,得到

$$\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{F+2}}\sim\frac{2}{\sqrt{F}}, \tag{112}$$

这时(110)式给出

$$\frac{1}{I^{(t)}}\left|\frac{dI^{(t)}}{d\delta}\right|_{极大}\sim\frac{F\varepsilon}{2\left(1+\frac{F\varepsilon^2}{4}\right)}\sim\frac{\sqrt{F}}{2}. \tag{113}$$

因此在一级程度上,极大衬比

$$\left|\frac{\Delta I^{(t)}}{I^{(t)}}\right|_{极大}=\frac{1}{I^{(t)}}\left|\frac{dI^{(t)}}{d\delta}\right|_{极大}|\Delta\delta|\sim\frac{\sqrt{F}}{2}|\Delta\delta|. \tag{114}$$

由(99)式,$\Delta\delta$ 和 Δh 的关系是 $|\Delta\delta|=4\pi|\Delta h|/\lambda$,再应用关系式(22),即可将极大衬比表成为

$$\left|\frac{\Delta I^{(t)}}{I^{(t)}}\right|_{极大}\sim\frac{4\mathscr{F}}{\lambda}|\Delta h|. \tag{115}$$

当 $\lambda=5500$ 埃,$\mathscr{F}=40$,而 Δh 只有 ~3.5 埃时,$|\Delta I^{(t)}/I^{(t)}|_{极大}\sim 0.1$. 3.5 埃已是分子大小的量级了.

以上我们讨论了采用准单色光时的效应. 现在假设膜用白光垂直照射,并用消色差透镜 L 使膜通过其透射光成象在摄谱仪的狭缝平面上(图 7.78). 对每一波长成分而言,各光束到达狭缝上 P' 点时的位相关系,和在膜上 P 点(P' 的共轭点)时相同. 因此,如果膜足够薄,满足条件(100)式,则按(99)式,P' 点强度极大所在波长 $\lambda_0^{(m)}$ 满足下列关系:

$$\lambda_0^{(m)}=\frac{2n'h}{m-\frac{\phi}{\pi}},\quad m=1,2,\cdots, \tag{116}$$

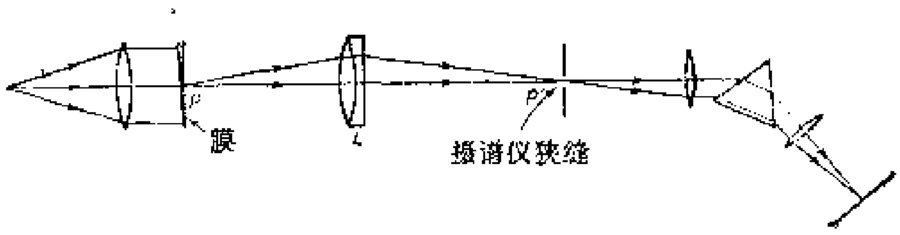


图 7.78 薄膜形成白光条纹的观测装置

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $n'h$ 是 P 点膜的光学厚度；这些极大之间各波长的强度由爱里公式给出。这样，当反射率很高时，摄谱仪焦平面上就形成沟槽光谱，在窄的亮条纹之间隔着很宽的暗带，膜越薄，相邻条纹的波长间隔越大。

在特别情况下，当 $n'h$ 为常数时，$\lambda_0^{(m)}$ 也是常数，条纹是平行于狭缝的直线。这种条纹有时叫做埃德索-巴特勒（Edser-Butler）条纹。如果 ϕ 与波长无关，这些条纹在光谱波数 $k_0=1/\lambda_0$ 标尺上是等间距的，间隔 $\Delta k_0=1/2n'h$。由于这种性质，它们对校准摄谱仪很有用，特别是在红外，因为这个光谱区标准波长不很多。比较普遍的是，$\lambda_0^{(m)}$ 沿同一条纹是改变的，其状况取决于膜上与狭缝共轭地区的光学厚度的变化情况。特别是，如果膜是由一待测面和一光学平面夹成的空气膜，这种条纹就提供了一个十分有效的测量方法，来测定待测面上选定地区的截面轮廓。这种条纹是托兰斯基首先报导的[1]，有时称为等色序条纹（图 7.79）。

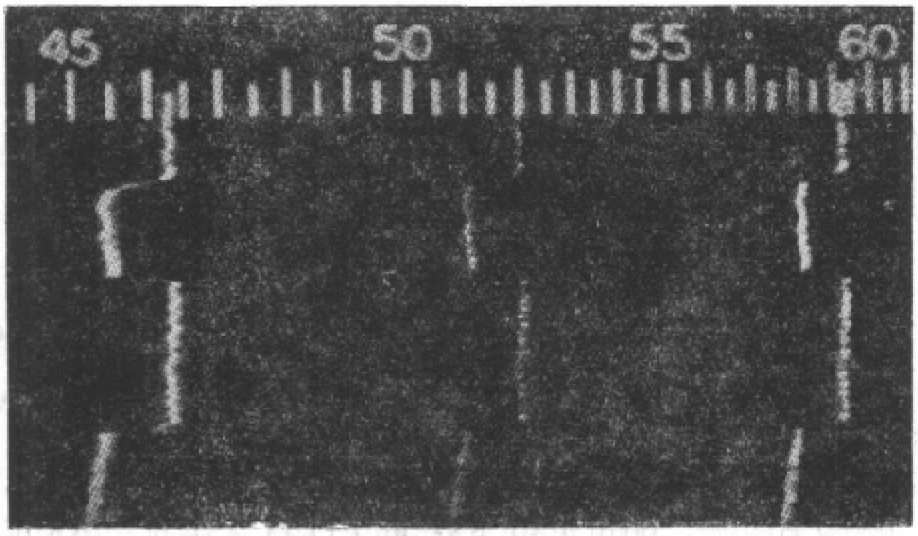


图 7.79 金刚石晶面某一地区产生的等色序条纹。标度为波长值，单位 100 埃

[引自 S. Tolansky and W. L. Wilcock, *Proc. Roy. Soc.*, *A*, **191** (1947), 192.]

设 P_1, P_2 两点的膜厚为 h_1, h_2，并设在狭缝上共轭点 P_1', P_2' 处，m 序极大的波长在空气中分别为 $\lambda_1^{(m)}$, $\lambda_2^{(m)}$。因 $\lambda^{(m)}=\lambda_0^{(m)}/n'$，于

1) S. Tolansky, *Phil. Mag.* (7), **36** (1945), 225.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是利用(116)式得到

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \left(m - \frac{\phi_1}{\pi}\right)\frac{\lambda_2^{(m)} - \lambda_1^{(m)}}{2} + \frac{a}{2}\lambda_2^{(m)}, \quad (117a)$$

式中

$$a = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\pi}, \quad (117b)$$

而 ϕ_1, ϕ_2 是波长 $\lambda_1^{(m)}$, $\lambda_2^{(m)}$ 的反射相变. $(m - \phi/\pi)$ 这个量可由测量相邻条纹的波长间隔定出. 例如，如果对于狭缝的 P_1 点，$(m+1)$ 序极大的波长为 $\lambda_1^{(m+1)}$，则由(116)式又有

$$\left(m - \frac{\phi_1}{\pi}\right)\lambda_1^{(m)} = \left(m + 1 - \frac{\phi_1'}{\pi}\right)\lambda_1^{(m+1)},$$

即

$$m - \frac{\phi_1}{\pi} = (1 + b)\frac{\lambda_1^{(m+1)}}{\lambda_1^{(m)} - \lambda_1^{(m+1)}}, \quad (118a)$$

式中

$$b = \frac{\phi_1 - \phi_1'}{\pi}, \quad (118b)$$

而 ϕ_1' 是波长 $\lambda_1^{(m+1)}$ 的反射相变. 如果条纹是不连续的，则须测量不连续处各边相邻条纹的波长间隔以确定相对应的干涉序. 由(117)和(118)式，得出

$$\Delta h = (1 + b)\frac{\lambda_1^{(m+1)}}{\lambda_1^{(m)} - \lambda_1^{(m+1)}}\frac{\lambda_2^{(m)} - \lambda_1^{(m)}}{2} + \frac{a}{2}\lambda_2^{(m)}. \quad (119)$$

a、b 二量是因为相变随波长改变而引起的，当采用银反射敷层，并且所涉及的波长间隔不太大时，这两个量可以忽略. 这时，测量 $\lambda_1^{(m)}$, $\lambda_1^{(m+1)}$ 和 $\lambda_2^{(m)}$，即可求出 Δh；而(119)式表明，Δh 正比于 $\lambda_2^{(m)} - \lambda_1^{(m)}$，因此只要按波长比例尺绘出一条条纹，即可得到待测面上选定地区的截面轮廓.

§7.6.8 两块平行平面板产生的多光束条纹

(a) 单色光和准单色光生成的条纹

设有两块表面反射率很高的平行平面板，一前一后放置，并由

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

单色平面光波照射(图 7.80)，现在来讨论它们产生的干涉条纹．如采用 § 7.6.1 符号，并用下标 1 和 2 区别二板，则按照 (27)、(26) 两式，第一块板透射光的强度

$$I_1^{(t)} = \frac{\mathscr{T}_1^2}{(1-\mathscr{R}_1)^2} \frac{1}{1 + F_1 \sin^2 \frac{\delta_1}{2}} I^{(i)}, \tag{120}$$

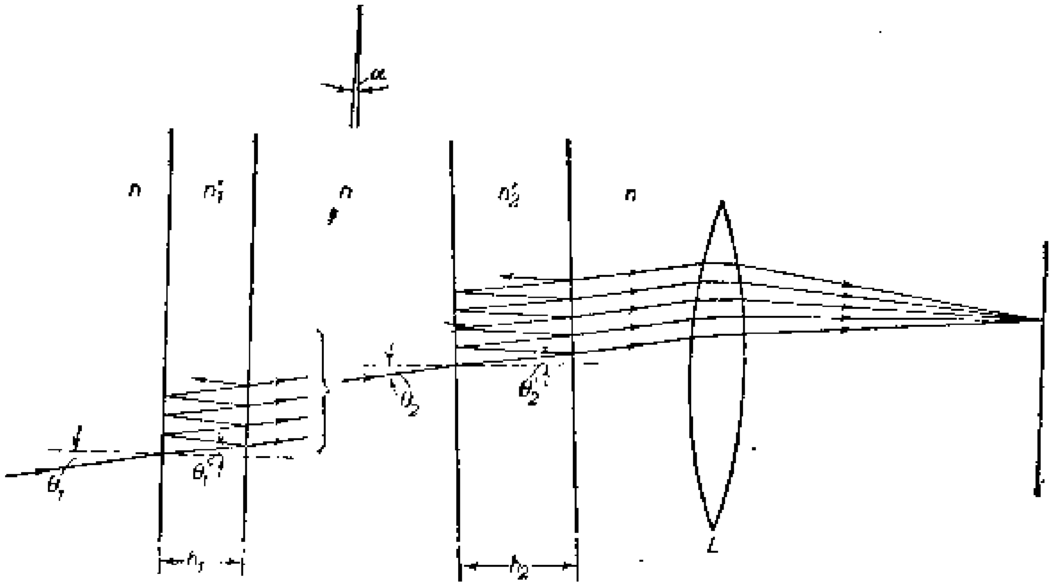


图 7.80　入射光在两块平行平面板内多次反射后于无穷远处产生条纹图示

式中 $I^{(i)}$ 是入射光的强度．对第二块板来说，入射光的强度是 $I_1^{(t)}$，所以透射光的强度相应为

$$I_2^{(t)} = \frac{\mathscr{T}_2^2}{(1-\mathscr{R}_2)^2} \frac{1}{1 + F_2 \sin^2 \frac{\delta_2}{2}} I_1^{(t)}. \tag{121}$$

我们将假设，从第二块板反射回去、随后又从第一块板反射回来的光已被排除掉；这就意指，两块板的间距与它们孔径相比是足够大的，而且如果两块板相互平行，入射方向也是不太正的．因此总透射光的强度 $I^{(t)}$ 就等于 $I_2^{(t)}$，而且由 (120) 和 (121) 式，得出

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}} = \frac{\mathscr{T}_1^2}{(1-\mathscr{R}_1)^2} \frac{\mathscr{T}_2^2}{(1-\mathscr{R}_2)^2} \frac{1}{\left(1+F_1\sin^2\frac{\delta_1}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+F_2\sin^2\frac{\delta_2}{2}\right)}. \tag{122}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这样，在透镜 L 的焦平面上，条纹的相对强度分布等于每块板单独产生的条纹的相对强度分布之积。

按照(25)式，位相差 δ_1 和 δ_2 为

$$\delta_1 = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_1' h_1 \cos\theta_1' + 2\phi_1, \quad \delta_2 = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2' h_2 \cos\theta_2' + 2\phi_2. \quad (123)$$

让我们考虑两块板相互平行时的情况，这时每块板要是单独产生条纹，两套圆环将是同心的。当入射角 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ 很小时，$\cos\theta' \sim 1 - \theta_1'^2/2$，$\cos\theta_2' \sim 1 - \theta_2'^2/2$，并且由折射定律，$\theta_1' \sim n\theta/n_1'$，$\theta_2' \sim n\theta/n_2'$，式中 n 是周围媒质的折射率。因此由(123)式，保留到 θ 二次项时，有

$$\delta_1 = \frac{4\pi}{\lambda_0} h_1 \left(n_1' - \frac{n^2\theta^2}{2n_1'}\right) + 2\phi_1,$$

$$\delta_2 = \frac{4\pi}{\lambda_0} h_2 \left(n_2' - \frac{n^2\theta^2}{2n_2'}\right) + 2\phi_2 \quad (124)$$

由(124)式可知，如果认为 ϕ_1 和 ϕ_2 与 θ 无关，则当 θ 改变一点时，两个 δ 相应改变之比为

$$\frac{\Delta\delta_2}{\Delta\delta_1} = \frac{n_1' h_2}{n_2' h_1}. \quad (125)$$

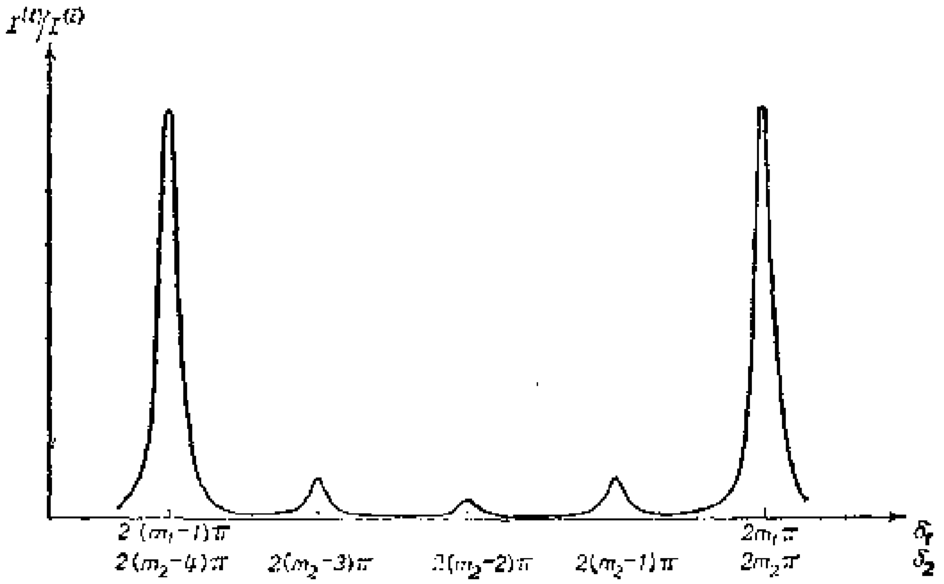


图 7.81　两块平行平面板产生的多光束等倾条纹：透射强度与入射强度之比随位相差 δ_1 和 δ_2 的变化曲线

$(\mathscr{R}_1 = 0.64,\ \mathscr{R}_2 = 0.64,\ a = 4)$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果折射率 n_1'，n_2' 和板厚 h_1，h_2 的大小使得在某一方向 $\theta = \theta_0$ 上，每块板的干涉序都是整数，即如果

$$\theta = \theta_0,\ \delta_1 = 2m_1\pi,\ \delta_2 = 2m_2\pi,\ (m_1 \text{ 和 } m_2 \text{ 都是整数}), \tag{126}$$

则(122)式中 F_1 和 F_2 两项因子同时达到它们的极大值1，因而在 $\theta = \theta_0$ 时，透射光强度有一个绝对极大。如果此外还有

$$\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1} = a, \tag{127}$$

式中 a 是一整数，则由(125)式可以看出，第二块板的整数序 $(m_2 - a)$，$(m_2 - 2a)$，$\cdots$ 分别和第一块板的整数序 $(m_1 - 1)$，$(m_1 - 2)\cdots$ 对应于相同的 θ，因而在这些 θ 方向，$I^{(t)}/I^{(i)}$ 也各存在一个绝对极大[1]。

透射光强度曲线的形状如图 7.81 所示。在接连二个主极大之间，有 $(a - 1)$ 个次极大，分别对应于第二块板的整数序 $(m_2 - 1)$，$(m_2 - 2)$，$\cdots(m_2 - a + 1)$；但是如果 F_1 很大，而 a 不太大，则 F_1 所在项的相应各值比 1 小得多，因而次极大比主极大弱得多。

人们曾应用这种两个法布里-珀罗干涉仪产生的条纹来研究光谱线的精细结构。先将二间隔圈加工到 h_2/h_1 接近所要的整数 a，而后作精细调节，将一个干涉仪封在空气密封器中，改变其中空

---

1) 实际上，干涉序重合个数 p 只要求是有限的，因而如果在 $\delta_1 = 2(m_1 - p)\pi$，$\delta_2 = 2(m_2 - pa)\pi$ 处 F_1 项和 F_2 项极大的相对位移比它们的半宽度小得多，$n_1'h_2/n_2'h_1$ 就是充分接近整数 a 了。利用(125)式和方程(21)，这些半宽度用 δ_2 标度表出时为 $4n_1'h_2/n_2'h_1\sqrt{F_1}$，$4/\sqrt{F_2}$。因此，所要求的条件是

$$\left|\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1}2p\pi - 2pa\pi\right| \ll \frac{n_1'h_2}{n_2'h_1}\frac{4}{\sqrt{F_1}} + \frac{4}{\sqrt{F_2}},$$

因 $(n_1'h_2/n_2'h_1) \sim a$，故上式可写成

$$\left|\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1} - a\right| \ll \frac{1}{p}\left(\frac{a}{\mathscr{F}_1} + \frac{1}{\mathscr{F}_2}\right), \tag{126a}$$

式中 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$ 是每块板单独产生的条纹的细度。只要 p 不太大，并且第一块板的干涉序 m_1 不太小，关系式(126a)和(126)实际上可同时满足。例如，当 $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 30$，$a = 1$ 时，(126a)要求 $|(n_1'h_2/n_2'h_1) - 1| \ll 1/15p$；而(126)式在 $n_2'h_2$ 改变 $\lambda_0/2$ 左右时总可满足，这时 $n_1'h_2/n_2'h_1$ 相应改变约为 $n_1'\lambda_0/2n_2'^2h_1 \sim n_1'^2/n_2'^2m_1$，因为 $m_1 \sim 2n_1'h_1/\lambda_0$。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

气压力，使其折射率改变，即可很方便地将 $n_1'h_2/n_2'h_1$ 调到等于 a[1].

当 a 大于 1 时，这种组合与单个干涉仪相比，其优点是它在同样分辨本领下光谱范围较大[2]. 当波长改变，使图样移动一个主极大间隔时，第一块板的干涉序相应改变 1，第二块板的干涉序则改变 a. 因此，各个波长的主极大不发生交叠的光谱范围，和薄干涉仪的光谱范围相等，而是厚干涉仪光谱范围的 a 倍(参见(46)式). 主极大的半宽度对应于 $\delta_1=2m_1\pi\pm\varepsilon_1/2$ 或 $\delta_2=2m_2\pi\pm\varepsilon_2/2$ (m_1, m_2 整数)，其中 ε_1 和 ε_2 满足(由 (122)式)

$$\left(1+F_1\sin^2\frac{\varepsilon_1}{4}\right)\left(1+F_2\sin^2\frac{\varepsilon_2}{4}\right)=2,$$

利用 (125) 和 (127) 式，此即

$$\left(1+F_1\sin^2\frac{\varepsilon_2}{4a}\right)\left(1+F_2\sin^2\frac{\varepsilon_2}{4}\right)=2. \tag{128}$$

当 F_2 足够大时，ε_2 比 $\pi/2$ 小得多，我们可取 $\sin\varepsilon_2=\varepsilon_2$. 于是方程 (128) 化为

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_2}\right)^4-\left(F_2+\frac{F_1}{a^2}\right)\left(\frac{4}{\varepsilon_2}\right)^2-\frac{F_1F_2}{a^2}=0. \tag{129}$$

由此，

$$\varepsilon_2=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\left(F_2+\frac{F_1}{a^2}\right)+\sqrt{F_2^2+\frac{6F_1F_2}{a^2}+\frac{F_1^2}{a^4}}}}. \tag{130}$$

当取走薄干涉仪时，$F_1=0$，(130)式化为 $\varepsilon_2=4/\sqrt{F_2}$，和(21)式一致. 否则 ε_2 小于 $4/\sqrt{F_2}$，因而主极大的半宽度小于厚干涉仪条纹的半宽度. 实用上取 a 等于 3 或者再大一些，所以由(130)式可以看出，增大 F_2 比同样增大 F_1，能更大地减小 ε_2. 但是我们还须记住，组合的峰值透射率系等于两个干涉仪的峰值透射率之积 $\tau_1\tau_2$，这由 (122) 和 (33) 式可以看出；而我们在 §7.6.2 中曾经看到，

1) 改变一干涉仪对另一干涉仪的倾角，亦可进行精细调节，但是效果较差.

2) 首先介绍这种组合装置的是 W. V. Houston, *Phys. Rev.* (2), **29** (1927), 478, 和 E. Gehrcke and E. Lau, *Zeits. f. tech. Physik*, **8** (1927), 157.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

以可用的反射敷层而言，增加 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$(因而增加了 F_1 和 F_2)时，τ_1 和 τ_2 随之下降。由于这些原因，有利的做法是使 F_1 不大于为把次极大压低到圆满程度所需的数值，而同时使 F_2 在强度考虑所允许的范围内尽量大。在这种情况下，F_1/a^2 比 F_2 小得多，因而 $\varepsilon_2 \sim 4/\sqrt{F_2}$，组合的分辨本领和厚干涉仪的接近相等。如果待测光源各光谱成分的强度相差悬殊，次极大的出现就很不相宜，因为弱成分的主极大会被强成分的次极大所混淆。用不同的厚度组合进行观测，可消除这种疑问。

当 $a=1$ 时，没有次极大，并且由(122)和(34)式可知，这时组合的衬比因子就等于两个干涉仪的衬比因子之积 $\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2$。在一定的峰值透射率下，组合的衬比因子可以比单个干涉仪的高得多，这种装置对观测光谱线的弱伴线是很有价值的[1]。

(b) 叠加条纹

现在设两块板相互倾斜成 α 角，照射光仍接近正入射，但远非单色，以致单独用哪一块板观测时都不能看到条纹，而这时却可观察到一种在实用上非常重要的条纹。为了解其原由[2]，先讨论波数 $k_0=2\pi/\lambda_0$ 的单色波从一块板通过的情况。设 $A^{(i)}(k_0)$ 和 $A^{(t)}(k_0)$ 分别是入射波和透射波的复振幅。按照(10)式，如果把所有各次反射都考虑进来，并应用(2)和(4)式，则有

$$A^{(t)}(k_0)=A^{(i)}(k_0)\mathscr{T}\sum_{p=0}^{\infty}\mathscr{R}^p e^{ip\delta}, \tag{131}$$

所以透射光的强度 $I^{(t)}=A^{(t)}A^{(t)*}$ 为

$$I^{(t)}(k_0)=I^{(i)}(k_0)\mathscr{T}^2\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{p'=0}^{\infty}\mathscr{R}^p\mathscr{R}^{p'}e^{i(p-p')\delta}, \tag{132}$$

式中 $I^{(i)}=A^{(i)}A^{(i)*}$ 是入射光的强度。如令 $|p-p'|=q$，则(132)

---

1) L. C. Bradley and H. Kuhn, *Nature*, London, **162** (1948), 412. C. Dufour, *Ann. de Physique*, *Paris* (12), **6** (1951), 5.

2) 这里的分析主要仿照 J. R. Benoit, C. Fabry and A. Perot, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **15** (1913), 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式可写成如下形式:

$$I^{(t)}(k_0)=I^{(i)}(k_0)\mathscr{T}^2\sum_{p=0}^{\infty}\mathscr{R}^{2p}\left\{1+\sum_{q=1}^{\infty}\mathscr{R}^q(e^{iq\delta}+e^{-iq\delta})\right\}$$

$$=I^{(i)}(k_0)\frac{\mathscr{T}^2}{1-\mathscr{R}^2}\left(1+2\sum_{q=1}^{\infty}\mathscr{R}^q\cos q\delta\right). \qquad (133)$$

两块板串联使用时,如果忽略它们之间回去回来的反射光,则单色光通过二板后强度为

$$I^{(t)}(k_0)=I^{(i)}(k_0)\frac{\mathscr{T}_1^2\mathscr{T}_2^2}{(1-\mathscr{R}_1^2)(1-\mathscr{R}_2^2)}$$

$$\times\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\mathscr{R}_1^r\cos r\delta_1\right)\left(1+2\sum_{s=1}^{\infty}\mathscr{R}_2^s\cos s\delta_2\right), \qquad (134)$$

式中下标 1 和 2 分别指第一块板和第二块板. 位相差 δ_1 和 δ_2 则由下式给出:

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=k_0\Delta\mathscr{S}_1+2\phi_1=k_0 2n_1'h_1\cos\theta_1'+2\phi_1,\\ \delta_2&=k_0\Delta\mathscr{S}_2+2\phi_2=k_0 2n_2'h_2\cos\theta_2'+2\phi_2,\end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

式中各项符号意义同前.

现在设光不是单色的，我们可以把它看成是由频率不同的各个单色成分叠加而成. 按照 § 7.5.8, 不同成分的相加是不相干的, 所以总强度等于各个成分的强度和(积分). 于是由(134)式得到两板透射光总强度表达式如下:

$$I^{(t)}=\int\frac{\mathscr{T}_1^2\mathscr{T}_2^2}{(1-\mathscr{R}_1^2)(1-\mathscr{R}_2^2)}i^{(i)}(k_0)$$

$$\times\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\mathscr{R}_1^r\cos r\delta_1\right)\left(1+2\sum_{s=1}^{\infty}\mathscr{R}_2^s\cos s\delta_2\right)dk_0, \qquad (136)$$

式中 $i^{(i)}(k_0)$ 代表入射光的光谱强度分布. $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 这两个量一般是 k_0 的函数,但是我们将假定,在 $i^{(i)}(k_0)$ 有可观大小的波数范围内,它们随 k_0 的变化可以忽略. 于是(136)式中头几个因子可提到积分号外边,所得结果并可改写成如下形式:

$$I^{(t)}=\frac{\mathscr{T}_1^2\mathscr{T}_2^2}{(1-\mathscr{R}_1^2)(1-\mathscr{R}_2^2)}\int i^{(i)}(k_0)\{1$$

$$+2[\sigma_1+\sigma_2+\sigma_{12}^{+}+\sigma_{12}^{-}]\}dk_0, \qquad (137a)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\sum_{r=1}^{\infty}\mathscr{R}_1^r\cos r\delta_1,\\\sigma_2&=\sum_{s=1}^{\infty}\mathscr{R}_2^s\cos s\delta_2,\\\sigma_{12}^+&=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\mathscr{R}_1^r\mathscr{R}_2^s\cos(r\delta_1+s\delta_2),\\\sigma_{12}^-&=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\mathscr{R}_1^r\mathscr{R}_2^s\cos(r\delta_1-s\delta_2).\end{aligned}\right\}\tag{137b}$$

如果各单色成分的平均波长为 λ_0，所分布的波长间区为 $\Delta\lambda_0$，则相应的波数间区 Δk_0 为 $2\pi\Delta\lambda_0/\lambda_0^2$，并且当 $\Delta\mathscr{S}_1$ 和 $\Delta\mathscr{S}_2$ 与相干长度 $\lambda_0^2/\Delta\lambda_0$ 相比足够大时，δ_1 和 δ_2 的间区就比 2π 大得多[1)]. 在这种情况下，σ_1、σ_2 和 σ_{12}^+ 在积分区内将改变得很快，每一个都将反复多次易号．结果这些项对 $I^{(t)}$ 没有什么贡献，(137) 式遂化为[2)]

$$I^{(t)}\sim\frac{\mathscr{T}_1^2\mathscr{T}_2^2}{(1-\mathscr{R}_1^2)(1-\mathscr{R}_2^2)}\int i^{(i)}(k_0)$$
$$\times\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\mathscr{R}_1^r\mathscr{R}_2^s\cos(r\delta_1-s\delta_2)\right)dk_0\,.\tag{138}$$

一般，$r\delta_1-s\delta_2$ 各量至少也是 δ_1 或 δ_2 的量级，因而 (138) 式中余弦项的积分同样可以忽略，于是 $I^{(t)}$ 实际与 δ_1 和 δ_2 无关． 但是，有一例外，发生在

$$a\left(\Delta\mathscr{S}_1+\frac{2\phi_1}{k_0}\right)-b\left(\Delta\mathscr{S}_2+\frac{2\phi_2}{k_0}\right)=\varepsilon,\tag{139}$$

式中 a 和 b 是两个没有公因子的小整数，而 $|\varepsilon|$ 不大于 $\lambda_0^2/\Delta\lambda_0$. 在此情况下，当

$$r=qa,\quad s=qb,\quad(q=1,2,3,\cdots)\tag{140}$$

时，

---

1) 这时，如将 (133) 式对所有光谱成分进行积分，则可显见，δ 间区比 2π 大得多就意味着不管用哪块板，透射强度实际均与 δ 无关，即没有条纹．

2) 从 (137a) 到 (142) 式，严格的证明需要更细致的考虑．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$r\delta_1 - s\delta_2 = qk_0\varepsilon, \tag{141}$$

而 $|r\delta_1 - s\delta_2|$ 各值的间区是 $|q\varepsilon\Delta k_0|$，不超过 $2\pi q$；对 r 和 s 的这些值来说，(138) 式中余弦项的积分不一定可以忽略，因而我们得到

$$I^{(t)}(\varepsilon) \sim \frac{\mathscr{T}_1^2\mathscr{T}_2^2}{(1-\mathscr{R}_1^2)(1-\mathscr{R}_2^2)}\int i^{(i)}(k_0)$$

$$\times\left(1 + 2\sum_{q=1}^{\infty}(\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b)^q\cos qk_0\varepsilon\right)dk_0. \tag{142}$$

(142)式积分号内的级数，和单色波情况单块板透射波强度表达式(133)中所包含的那个级数是等同的，其闭式形式已于 § 7.6.1 中求得[方程(13)]．因此由比较可立即写出本处级数之和：

$$1 + 2\sum_{q=1}^{\infty}(\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b)^q\cos qk_0\varepsilon = \frac{1-(\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b)^2}{(1-\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b)^2 + 4\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b\sin^2\dfrac{k_0\varepsilon}{2}}. \tag{143}$$

代入 (142) 式，得到

$$I^{(t)}(\varepsilon) = \frac{\mathscr{T}_1^2\mathscr{T}_2^2\{1-(\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b)^2\}}{(1-\mathscr{R}_1^2)(1-\mathscr{R}_2^2)(1-\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b)^2}$$

$$\times\int\frac{i^{(i)}(k_0)}{1 + B\sin^2\left(\dfrac{k_0\varepsilon}{2}\right)}dk_0, \tag{144}$$

式中

$$B = \frac{4\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b}{(1-\mathscr{R}_1^a\mathscr{R}_2^b)^2}. \tag{145}$$

和 (156) 式比较，我们看到强度分布 (144) 式等效于各单色强度分布的叠加，每一单色分布都是图 7.58 所示的那种形式．这些分布的强度极大发生在 $k_0\varepsilon$ 等于 2π 整数倍时，即

$$\varepsilon = m\lambda_0 \qquad |m| = 0, 1, 2, \cdots. \tag{146}$$

如果我们假设，在(144)式所包含的光谱范围内，n_1', n_2', ϕ_1/k_0 和 ϕ_2/k_0 均为常数，则各单色强度分布的零序极大 ($\varepsilon = 0$) 重合在一起，构成中央条纹．根据 (139) 和 (135) 式，这个条纹在透镜 L

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

焦平面上的位置（图 7.80）由下式决定：

$$\frac{n_2'h_2\cos\theta_2'+c_2}{n_1'h_1\cos\theta_1'+c_1}=\frac{a}{b},\tag{147}$$

式中 c_1，c_2 分别是 ϕ_1/k_0，ϕ_2/k_0 的值．在中央条纹两边，当 $|\varepsilon|$ 增加时，各成分的图样将相互错开，因为各个图样的尺度正比于波长，于是条纹的消晰度变差．采用白光观测时，在（147）式所给定的位置上有一条白色中央条纹，两边有若干彩色的极大和极小，再往外，眼睛看到的就是均匀照明了．这些条纹叫做叠加条纹．它们是多光束的布儒斯特条纹（§ 7.5.6），像布儒斯特条纹一样，是一条条直线，平行于二板夹劈的劈棱，并且间距反比于劈角 α．

按照法布里和比松（H. Buisson）[1] 所提出的方法，叠加条纹可用来测定两个法布里-珀罗标准具的光学厚度差，这两个标准具的光学厚度之比非常接近整数 a．为此，将一标准具固定，另一标准具调斜到白色中央条纹通过 O，O 是透镜 L 对固定标准具正透射光的焦点（图7.80）．如果固定的是第一个标准具，则 $\theta_1=\theta_1'=0$，$\theta_2=\alpha$，α 是二标准具的夹角．因 α 很小，故由折射定律可知，$\theta_2'\sim n\alpha/n_2'$，式中 n 是标准具周围空气的折射率；$\cos\theta_2'\sim 1-\theta_2'^2/2\sim 1-n^2\alpha^2/2n_2'^2$；而由（147）式，设 $b=1$，保留到 α 二次项，有

$$(n_2'h_2+c_2)-a(n_1'h_1+c_1)=\frac{n^2h_2}{2n_2'}\alpha^2.\tag{148a}$$

换过来，如果固定的是第二个标准具，则当

$$a(n_1'h_1+c_1)-(n_2'h_2+c_2)=\frac{n^2ah_1}{2n_1'}\alpha^2\tag{148b}$$

时，白色中央条纹出现于 O 点．只要 $[a(n_1'h_1+c_1)-(n_2'h_2+c_2)]$ 这个差足够小，则即使象有时采取的那样，把标准具抽空，我们也可取 $n_1'=n_2'=n$．因而，测量了 α，即得到上述差值(以其中一个标准具的光学厚度为计算单位)．在这种测量中，α 值有高达 10 的．

---

1) C. Fabry and H. Buisson, *Journ. de Phys*, (5), 9 (1919), 189.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

巴雷耳(H. Barrell)和西尔斯(J. E. Sears)曾采用一个类似的装置(只是二标准具的厚度接近相等)来测定空气的折射率和色散[1]. 测量时,先将二标准具抽空,将其一调斜,使得准单色光产生间距合适的条纹,然后将空气徐徐放入固定标准具中,同时计下通过 O 点的条纹数 Δm. 设准单色光的平均波长为 $\bar{\lambda}_0$,固定标准具的厚度为 h,空气的折射率为 n,则空气的放入使 ε 改变 $\Delta\varepsilon = 2(n-1)h$,而由(146)式,

$$\Delta m = \frac{\Delta\varepsilon}{\bar{\lambda}_0} = \frac{2(n-1)h}{\bar{\lambda}_0}, \tag{149}$$

如果知道了 h 和 $\bar{\lambda}_0$,即可由此得到 $(n-1)$.

§ 7.7 波长与标准米的比较

长度的标准是刻在一根铂-铱合金杆上的两条刻线在0°C温度时的距离. 这根合金杆保存在法国,称为国际米原器. 正象我们在§7.6.4中说过的那样,光学波长与实际长度的关系,是通过将镉红线波长(6438埃)与这一长度标准进行比较而建立起来的. 1892年,迈克耳孙和贝诺瓦(J. R. Benoit)[2]用一种迈克耳孙干涉仪首次作了这种比较,但1905年贝诺瓦,法布里和珀罗[3]又重复作了测量,并提高了测量准确度. 他们用了5个法布里-珀罗标准具,长度分别近似为6.25, 12.5, 25,50 和 100 厘米. 先用剩余小数法测定出最短标准具的长度合多少个镉红线波长,这个方法只需要知道足够精确的波长比(§7.6.4),而不需要精确知道各波长的实际数值. 然后,借助白光条纹将每个标准具的长度,按短长次序和后一个进行比较. 在比较时,将两个标准具平行放置,用白光照射,并令其透射光通过两个半镀银平面所夹成的薄空气劈. 在这种情况

1) H. Barrell and J. E. Sears, *Phil. Trans. Roy. Soc., A.*, **238** (1939), 1.
2) A. A. Michelson and J. R. Benoit, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **11** (1895), 1.
3) J. R. Benoit, C. Fabry and A. Perot, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **15** (1913), 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

下，有类似于§ 7.6.8(b)所描述的条纹定域在劈上，在中央条纹处，劈的厚度是等于长标准具长度与两倍短标准具长度之差．劈的厚度事先已用镉红线校准好，于是这一差值合多少个镉红线波长便可知道．经如此四次接替比较后，即可定出 100 厘米标准具的长度合多少个波长．最后，再测量这个标准具和一个米原器复制品的长度差．这部分实验包括用高质量的移测显微镜来测量米尺分度两端线与标准具两端板侧边上同样刻线的距离，后二刻线与标准具两反射面的各自距离则由另一补充实验测定．所得的最后结果是，在 15℃ 和 760mmHg 压力的干燥空气中，镉红线的波长是 $6438.4696 \times 10^{-10}$ 米，其中干涉量度的可几误差约为千万分之一 (1×10^{-7})．

后来，又有几家实行标准化的实验室对镉红线波长和米的关系进行了测量[1]，采用的方法与贝诺瓦，法布里和珀罗的或是相同，或原理相似．西尔斯和巴雷耳[2]的实验是很有意思的，因为他们能够直接测量真空波长．他们只用了三个法布里-珀罗标准具，最长的略大于 1 米，其余两个大约是它的 1/3 和 1/9．间隔圈是殷钢空心圆柱，和标准具板相贴的两个端面是光学平的，并且镀了铬，这样形成的接合是气密的，所以可将标准具抽空．最短标准具的长度合多少个波长是用剩余小数法测定的，而各标准具的接替比较则借助 § 7.6.8 中所描述的叠加条纹．最长的标准具足以容纳下一个标长为 1 米的钢质端规．端规抛光面与标准具反射面之间的距离是多少个波长，系由观测它们在无穷远处产生的反射条纹来测定．这样就得到了以镉红线波长计算的端规长度，准确度约为亿分之二 (2×10^{-8})．最后，按端标准和线标准相比较的规范程序，将此端规和米的一个复制品进行比较[3]．

当将所有测定结果一律折合成标准空气（15℃ 和 760mmHg

---

1) 关于参考资料，见 H. Barrell, *Proc. Roy. Soc.*, *A*, **186** (1946), 164.
2) J. E. Sears and H. Barrell, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, *A*, **231** (1932), 75; **233** (1934), 143.
3) 详见 J. E. Sears, *Proc. Roy. Soc.*, *A*, **186** (1946), 152.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

压力的空气，不含水蒸汽，含 0.03% 二氧化碳）中的波长时，得到平均值为 $6438.4696 \times 10^{-10}$ 米，这碰巧就是用来定义埃（Ångström）的那个值．任何一个测定值跟平均值的最大偏差约为三百万分之一，即 1 米最大差 3×10^{-4} 毫米．这比米原器以及各实验所用复制品的分度线宽度都小得多，毫无疑问，它代表移测显微镜的测量误差范围．干涉量度的测量精密度可以高得多，所以人们很自然就考虑用某光谱线的波长来定义米，以之取代实物基准．

1954 年，国际权度委员会采纳了这样的建议[1]，但是要求新的定义应与镉红线波长的数值 $6438.4696 \times 10^{-10}$ 米一致，以求尽可能保持长度标准的连续性．1958 年，这委员会决定[2]在可供选用的光谱线当中，以氪^{86} 6056 埃（对应于能级跃迁 $2p_{10}$—$5d_5$）这条线最为适当；而且根据五个不同实验室的测量，建议一米应定义为正好是这一辐射的 1650763.73 个真空波长．1960 年，第 11 届国际权度大会一致同意了这一定义[3]．因此，波长的基准和长度的基准现在是一个，而 1 埃正好是 10^{-10} 米．

---

1) *Proc. Verb. Com. Int. Poids et Mes.*, **24** (1954) 2.

2) *Proc. Verb. Com. Int. Poids. et Mes.*, (2), **26-B** (1958) *M.* 30.

3) C. R. 11^{me} *Conf. Gén. Poids et Mes.* (Paris, Gauthier-Villars, 1960) pp. 51, 85.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第八章　衍射理论基础

§8.1 引　　言

前面从一般电磁场过渡到以很高频率(很短波长)为特点的光学场时,我们发现在某些区域,能量传播的简单几何模型是不适用的. 特别是,我们看到,在紧靠阴影边界处和有大量光线相遇的区域,必然会跟这个模型发生偏离. 这些偏离表现在出现有亮带和暗带,即衍射条纹. 衍射理论主要是讨论这些特殊区域中的场. 由于这种区域包括了光学象所在的那部分象空间(焦点区),因而它们具有重要的实际意义.

第一个提到衍射现象的,是达·芬奇(L. da Vinci 1452—1519)的著作. 然而,这种现象是首先由格里马耳迪在他的书中给以精确描述的,这本书在他死后二年即 1665 年出版. 当时,微粒理论已被人们广泛相信可以正确描述光的传播,但它不能解释衍射现象. 第一个提出波动理论的惠更斯,似乎不曾知道格里马耳迪的发现,否则他无疑会引用它们来支持自己的见解. 在大约 1818 年以前,一直没有人注意到有可能根据波动理论说明衍射效应. 1818 年,菲涅耳的著名论文问世了(见历史引言). 他在这篇论文中证明,应用惠更斯作图(见 §3.3.3),结合干涉原理,可以解释衍射现象. 菲涅耳的分析后来由基尔霍夫给以了完善的数学基础(1882 年). 从此以后,许多作者对这个问题进行了广泛讨论[1]:

衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一. 在衍射理论

---

1) 关于这个问题的发展的比较完全的历史记述,见 C. F. Meyer, *The Diffraction of Light, X-rays, and Material Particles* (Chicago The University Press, 1934)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

中，那种在某种意义上可以认为是严格的解，是很少有的. 迟至1896年，才由索末菲给出了第一个这样的解，他在一篇重要论文中讨论了一个完全导电的半无限平面屏对平面波的衍射. 此后，对少数其他衍射问题（主要是二维问题）也求得了严格解（参见第十一章）. 但是，由于数学上的困难，在大多数有实际意义的情况中，还必须采用近似方法. 在这些方法中，惠更斯-菲涅耳理论是最富成效的，它适用于处理仪器光学中所遇到的大多数问题. 这个理论和它的某些应用构成本章的主要课题.

§8.2 惠更斯-菲涅耳原理

按照惠更斯作图法（§3.3.3），波阵面上的每一点可以认为是产生球面子波的一个次级扰动中心，而以后任何时刻的波阵面则可看作是这些子波的包络. 菲涅耳对惠更斯作图法进行了补充，假定这些次级子波相互干涉，从而说明了衍射现象. 惠更斯作图法加上干涉原理，就称为**惠更斯-菲涅耳原理**. 在应用它来研究衍射效应之前，我们先来证明这个原理（再加上一些简单的假设）可正确描述光在自由空间的传播.

设 S（图 8.1）是从点源 P_0 发出的一个球面单色波阵面的瞬时位置，其半径为 r_0，并设 P 点是光扰动待定的一点. 略去时间周期因子 $e^{-i\omega t}$，则波阵面 S 上某点 Q 的扰动可表成为 Ae^{ikr_0}/r_0，其中 A 是离点源单位距离处的振幅. 按照惠更斯-菲涅耳原理，我们把波阵面 S 上每一面元看作是一个次级扰动的中心，这个扰动以球面子波的形式传播，这样便得到 Q 点 dS 面元对 P 点扰动的贡献

$$dU(P)=K(\chi)\frac{Ae^{ikr_0}}{r_0}\frac{e^{iks}}{s}dS,$$

式中 $s=QP$，$K(\chi)$ 是一**倾斜因子**，描写次级波振幅随方向的变化，χ 是 Q 点法线与 QP 方向的夹角（常称为**衍射角**）. 依照菲涅耳的做法，我们假定，在原来的传播方向上，即 $\chi=0$ 时，K 最大，并假定 χ 增加时 K 迅速减小，在 QP 与波阵面相切，即 $\chi=\pi/2$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

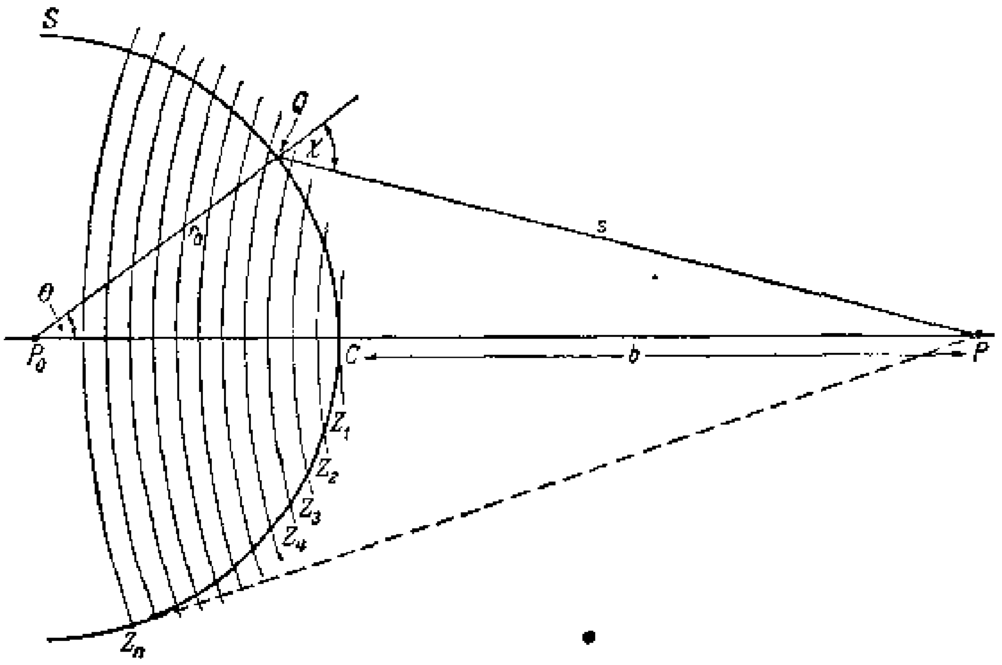


图 8.1 非涅耳波带作图法

时，K 为零；最后假定，如果 P_0 与 P 之间有障碍物，就只有未被挡住的那部分初级波 S' 才对 P 点的效应有贡献．因此，P 点的总扰动

$$U(P)=\frac{Ae^{ikr_0}}{r_0}\iint_{S'}\frac{e^{iks}}{s}K(\chi)dS. \tag{1}$$

为了计算(1)式，我们采用所谓非涅耳波带作图法．以 P 点为中心，作一组半径为

$$b,\ b+\frac{\lambda}{2},\ b+\frac{2\lambda}{2},\ b+\frac{3\lambda}{2},\cdots,\ b+\frac{j\lambda}{2},\cdots$$

的球面，其中 $b=CP$，C 是 P_0P 与波阵面 S 的交点(见图 8.1)．这些球面将 S 分成一组波带 Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots Z_j\cdots$．

我们假定，r_0 和 s 都比波长大得多；因此对于同一个波带上的点，可以假定 K 值相同，为 K_j．从图可知

$$s^2=r_0^2+(r_0+b)^2-2r_0(r_0+b)\cos\theta,$$

因而

$$sds=r_0(r_0+b)\sin\theta d\theta, \tag{2}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以

$$dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{r_0}{r_0 + b} s ds d\phi,$$

ϕ 是方位角．因此，第 j 个波带对 $U(P)$ 的贡献为

$$U_j(P) = 2\pi \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0 + b} K_j \int_{b+(j-1)\lambda/2}^{b+j\lambda/2} e^{iks} ds$$

$$= -\frac{2\pi i}{K} K_j \frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} e^{ikj\lambda/2}(1 - e^{-ik\lambda/2}).$$

因 $k\lambda = 2\pi$，最后两个因子遂化为

$$e^{ikj\lambda/2}(1 - e^{-ik\lambda/2}) = e^{i\pi j}(1 - e^{-i\pi}) = (-1)^j 2,$$

所以

$$U_j(P) = 2i\lambda(-1)^{j+1} K_j \frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b}. \tag{3}$$

可以注意，各波带的贡献是依次一正一负的．对所有贡献取和，就得到 P 点的总扰动：

$$U(P) = 2i\lambda \frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} K_j. \tag{4}$$

现在可以用舒斯特（Schuster）方法[1)]对级数

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} K_j = K_1 - K_2 + K_3 - \cdots + (-1)^{n+1} K_n \tag{5}$$

近似求和．

首先将（5）式写成如下形式：

$$\Sigma = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2}\right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2}\right) + \cdots, \tag{6}$$

最后一项为 $\frac{1}{2} K_n$ 或 $\frac{1}{2} K_{n-1} - K_n$，视 n 为奇数或偶数而定．关于方向变化的规律，我们暂先假定它是这样，即 K_j 大于它两个邻项 K_{j-1} 和 K_{j+1} 的算术平均值．于是，(6)式中各括号项都是负的，结果

---

1) A. Schuster, Phil. Mag. (5), **31** (1891), P. 77.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{array}{ll}\Sigma < \dfrac{K_1}{2} + \dfrac{K_n}{2}, & (n\text{ 为奇数}),\\ \text{或} & \\ \Sigma < \dfrac{K_1}{2} + \dfrac{K_{n-1}}{2} - K_n, & (n\text{ 为偶数}).\end{array}\right\} \tag{7}$$

我们也可以将(5)式写成这样的形式:

$$\Sigma = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2}\right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2}\right) - \cdots, \tag{8}$$

当 n 是奇数时,最后一项为 $-\frac{1}{2}K_{n-1} + K_n$,当 n 是偶数时为 $-\frac{1}{2}K_n$。因此

$$\left.\begin{array}{ll}\Sigma > K_1 - \dfrac{K_2}{2} - \dfrac{K_{n-1}}{2} + K_n, & (n\text{ 为奇数}),\\ \text{或} & \\ \Sigma > K_1 - \dfrac{K_2}{2} - \dfrac{K_n}{2}, & (n\text{ 为偶数}).\end{array}\right\} \tag{9}$$

各个 K_j 和它的邻项 K_{j-1}, K_{j+1} 相差甚微,因而(7)、(9)两式中对应关系式的右边实际相等,因此近似地有

$$\left.\begin{array}{ll}\Sigma = \dfrac{K_1}{2} + \dfrac{K_n}{2}, & (n\text{ 为奇数}),\\ \text{或} & \\ \Sigma = \dfrac{K_1}{2} - \dfrac{K_n}{2}, & (n\text{ 为偶数}).\end{array}\right\} \tag{10}$$

当各个 K_j 小于它两个邻项的算术平均值,因而(6)、(8)两式中各括号项都是正的时候,也很容易证明(10)式仍然成立. 此外,甚至当各括号项中只有一些是负的,而其余是正的时候,仍可期望(10)式有效,因为这时可以按照各括号项的正、负将级数分成两部分,而后对每部分进行同样的论证. 因此,我们得出如下结论:(10)式给出了级数(5)的和,除非(6)、(8)两式中各括号项的符号改变得如此频繁,以致误差项加起来达到了可观的数值. 如果我们排除后一种情况,则由(10)式和(4)式可以得到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U(P)=i\lambda(K_1\pm K_n)\frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b},\tag{11}$$

当 n 是奇数时式中取正号，偶数时取负号．利用(3)式，可将方程(11)写成

$$U(P)=\frac{1}{2}[U_1(P)+U_n(P)].\tag{12}$$

对于从 P 点能够看到的最后一个波带(Z_n)，QP 是与波阵面 S 相切的，即 $\chi=\pi/2$．如前所述，对此 χ 值，K 已假定为零．因此 $K_n=0$，(11)式化为

$$U(P)=i\lambda K_1\frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}=\frac{1}{2}U_1(P),\tag{13}$$

此式表明，P 点的总扰动等于第一个波带所产生的扰动之半．

如果设

$$i\lambda K_1=1,$$

即如果

$$K_1=-\frac{i}{\lambda}=\frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda},\tag{14}$$

则方程(13)与球面波作用的表达式相一致．因子 $e^{-i\pi/2}$ 可以由假定次级波的振动位相与初级波差 1/4 周期来说明；而另一个因子则可由假定次级振动与初级振动之比为 $1:\lambda$ 来解释．因此我们可得出结论：惠更斯-菲涅耳原理，加上关于次级波振幅和位相的这些假定，可导出球面波在自由空间传播的正确表达式．但是，这些附加假定必须看作纯粹是解释数学表达式的一种权宜之计，并无任何物理意义；因子(14)的真正证明后面(§ 8.3)即可看到．

现在仍然依照菲涅耳的做法，用一个开有圆孔的平面屏放在 P_0 和 P 之间(与 P_0P 垂直，圆心在 P_0P 上)挡住某些波带，看 P 点的效应如何．这时，必须认为只有未被屏挡住的那些波带的子波才对 P 点的总扰动有贡献．如果各波带除第一个的一半以外，全都被屏遮住，则由(3)式取 $j=1$ 并乘以 1/2，得到

$$U(P)=i\lambda K_1\frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}=\frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b};\tag{15}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此这时 P 点的扰动和没有屏时一样．如果留下第一个波带而遮住其它，则由 (3) 式得到

$$U(P)=2i\lambda K_1\frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}=2\frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}, \qquad (16)$$

因而这时强度 $I(P)=|U(P)|^2$ 比没有屏时要大 4 倍．当圆孔再进一步增大时，强度 $I(P)$ 将下降，因为 (4) 式中头两项的符号相反．此外，由于 K_1 和 K_2 近乎相等，因而当圆孔近似等于头两个波带时，P 点将几乎完全黑暗．这样，当圆孔的大小改变时，P 点的强度呈现周期的亮暗变化．当固定圆孔的大小和点源 P_0，而令观察点 P 的位置沿轴线移动时，也可得到同样的结果；因为这时随着 P 向屏逐渐靠近，圆孔所容纳的波带数目不断增多．

所有这些结果都与实验很好地一致．当时，菲涅耳理论的一个预见，给他同时代的人留下了强烈的印象，事实上，它成为决定性的因素之一，使得微粒理论和波动理论之间的长期论战以后者获胜而暂告结束．它是关于当用一个小圆盘垂直于 P_0P 放置并挡掉第一个波带时所产生的效应．按照(5)式，这时 P 点的复振幅为

$$U(P)=2i\lambda\frac{Ae^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}[-K_2+K_3-K_4+\cdots], \qquad (17)$$

按照和前面同样的论证，括号中级数的和为 $-K_2/2$．因为 K_2 假定和 $K_1=1/i\lambda$ 相差甚微，所以结论是小圆盘几何阴影内应该有光，而且 P 点的强度和没有小圆盘时一样[1]．

§ 8.3 基尔霍夫衍射理论

§ 8.3.1 基尔霍夫积分定理

惠更斯-菲涅耳理论的基本概念是，P 点的光扰动是由此点和

---

1) S. D. Poisson 于 1818 年根据菲涅耳理论推断，在小圆盘阴影中心应该出现一个亮斑．当时，Poisson 是法国科学院菲涅耳获奖论文审查委员会的一个委员，他似乎已经认为这个结论与实验矛盾，因而可驳倒菲涅耳理论．但是，委员会的另一委员 Arago 作了这个实验，发现这令人惊奇的预见是正确的．Maraldi 在一个世纪以前曾作过同样的观察，但是它已被人们遗忘了．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光源之间某面上所发的各个次级波叠加而成．基尔霍夫给这个概念奠定了比较完善的数学基础[1]． 他指出，惠更斯-菲涅耳原理可以看作是某种积分定理[2]的近似形式，这种积分定理将齐次波动方程在场中任一点 P 的解，用 P 点周围任一闭合面上所有各点的解及其一次微商来表出．

我们先考虑一个严格单色的标量波

$$V(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{-i\omega t}. \tag{1}$$

在真空中，与空间有关的部分 U 满足与时间无关的波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0, \tag{2}$$

式中 $k = \omega/c$。方程(2)又称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程．

设 v 是闭合面 S 所包围的体积，P 是 S 内任一点；我们假定，U 在 S 内和 S 上具有连续的一阶和二阶偏微商． 如果 U' 是任一其他函数，和 U 满足同样的连续性条件，则由格林定理，有

$$\iiint_v (U\nabla^2 U' - U'\nabla^2 U)dv = -\iint_S \left(U\frac{\partial U'}{\partial n} - U'\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS, \tag{3}$$

式中 $\partial/\partial n$ 表示沿 S 面内向法线的微商[3]． 特别是，如果 U' 也满足与时间无关的波动方程，即如果

$$(\nabla^2 + k^2)U' = 0, \tag{4}$$

则由(2)和(4)式可立即推出，(3)式左边被积函数在 v 的每一点都为零，因而

$$\iint_S \left(U\frac{\partial U'}{\partial n} - U'\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS = 0. \tag{5}$$

---

1) G. Kirchhoff, Berl. Ber. (1882), 641; *Ann. d. Physik*, (2) **18** (1883), 663; *Ges. Abh. Nachtr.*, 22.

基尔霍夫理论适用于标量波的衍射．正如§8.4将要证明的，标量理论通常完全适用于处理仪器光学的大多数问题．

许多作者提出了惠更斯-菲涅耳原理的矢量推广．第一个圆满的推广归功于 F. Kottler, *Ann. d. Physik*, **71** (1923), 457; **72** (1923), 320。[参见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition 1950), P. 114].

2) 单色波情况的这个定理在早些时候已由 H. von Helmholtz 在声学中导出，见 *J. f. Math.*, **57** (1859), 7.

3) 格林定理通常是用外向法线来表示的，但是在本节应用中，采用内向法线更为方便．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

让我们取 $U'(x, y, z) = e^{iks}/s$，其中 s 代表 P 点到 (x, y, z) 点的距离．这个函数于 $s=0$ 时有一个奇异点．因为 U' 已假定是连续的和可微商的，所以 P 点必须从积分区中除掉． 为此我们围绕 P 点作一个半径为 ε 的小球，而对面 S 和小球面 S' 之间的整个体积取积分（图 8.2）．于是取代 (5) 式而有

$$\iint_S + \iint_{S'} \left\{U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right) - \frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right\} dS = 0,$$

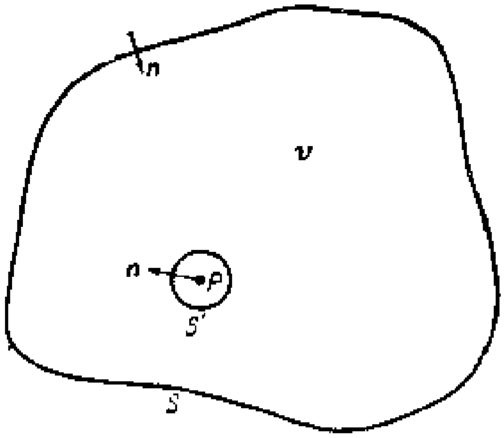


图 8.2　亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理推导：积分区

由此，

$$\iint_S \left\{U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right) - \frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right\} dS$$

$$= -\iint_{S'} \left\{U \frac{e^{iks}}{s}\left(ik - \frac{1}{s}\right) - \frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right\} dS'$$

$$= -\iint_{\Omega} \left\{U \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\left(ik - \frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial s}\right\} \varepsilon^2 d\Omega, \qquad (6)$$

式中 $d\Omega$ 代表一个元立体角．因为对 S 的积分与 ε 无关，所以右边的积分可以用它在 $\varepsilon \to 0$ 时的极限值来代替；在极限时，这积分的第一项和第三项没有贡献，而第二项的总贡献是 $4\pi U(P)$．因此，

$$U(P) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right) - \frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right\} dS. \qquad (7)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这是亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理的一种形式[1].

可以注意,当 $k \to 0$ 时,与时间无关的波动方程(2)化为拉普拉斯方程 $\nabla^2 U = 0$,(7)式则变成熟知的势论公式

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS. \tag{8}$$

设 P 点在 S 面外边,但仍假定 U 在 S 内是连续的,并且可微商到二阶,此外如果同前,取 $U' = e^{iks}/s$,则方程(3)在 S 以内整个体积中都保持有效.按照(5)式,这时面积分为零.

亥姆霍兹-基尔霍夫定理还有一种与(7)式互补的形式,它属于这种情况:波源在闭合面 S 内,而 U 在 S 外和 S 上是连续的,并且可微商到二阶.但是,正象波在无穷媒质中传播时的其它问题一样,这时 S 上的边界值已不足以单值地确定 P 点的解,还必须再对 $S \to \infty$ 时解的性质作某些假设.然而,关于这一情况的讨论,须请读者参阅它处[2].

以上我们讨论的是严格单色波.现在我们来推导基尔霍夫定理的普遍形式,它可用于不一定是单色的波.

设 $V(x, y, z, t)$ 是波动方程

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{9}$$

的一个解,并假定 V 可表成傅里叶积分的形式:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega(x, y, z) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{10}$$

于是,由傅里叶反演公式,

---

1) 这个定理用 S 面上 U 和 $\partial U/\partial n$ 二者的值来表示 $U(p)$.然而,从格林函数理论可以证明,仅仅用 S 面上的 U 值或 $\partial U/\partial n$ 值就足以确定 S 内每一点 P 的 U 值(例如,见 F. Pockels: *Über die partielle Differentialgleichung* $(\nabla^2+k^2)U=0$ (Leipzig, Teubner, 1891.)).然而,只有在最简单的情况,例如,当 S 是平面时,才可能决定出合适的格林函数[参见 A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic Press, 1954), P. 199].

2) 例如,见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1950), PP. 24—25.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U_\omega(x, y, z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x, y, z, t)e^{i\omega t}dt. \tag{11}$$

因为 $V(x, y, z, t)$ 已假定满足波动方程(9),所以 $U_\omega(x, y, z)$ 将满足与时间无关的波动方程(2). 此外,如果 V 在闭合面 S 内和 S 上服从适当的正则条件,我们就可以分别对各个傅里叶成分 $U_\omega(x, y, z)=U_\omega(P)$ 应用基尔霍夫公式:

$$U_\omega(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{U_\omega\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U_\omega}{\partial n}\right\}dS. \tag{12}$$

改变积分次序,并令 $k=\omega/c$, 则(10)式变成

$$\begin{aligned}V(P, t)&=\frac{1}{4\pi}\iint_S dS\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{U_\omega\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-i\omega(t-s/c)}}{s}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{e^{-i\omega(t-s/c)}}{s}\frac{\partial U_\omega}{\partial n}\right\}d\omega\\&=\frac{1}{4\pi}\iint_S dS\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{U_\omega\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{s}\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\frac{i\omega}{sc}\frac{\partial s}{\partial n}\right]e^{-i\omega(t-s/c)}-\frac{e^{-i\omega(t-s/c)}}{s}\frac{\partial U_\omega}{\partial n}\right\}d\omega,\end{aligned}$$

利用(10)式,即有

$$\begin{aligned}V(P, t)=\frac{1}{4\pi}\iint_S&\left\{[V]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{cs}\frac{\partial s}{\partial n}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right.\\&\left.-\frac{1}{s}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]\right\}dS,\end{aligned} \tag{13}$$

式中方括号代表"推迟值",即 $t-s/c$ 时刻的函数值. 公式(13)是**基尔霍夫定理**的普遍形式.

和前一情况相对比,同样可以看出,当 P 点在 S 面外时,(13)式中的积分为零.

(13)式中最后一项代表了一个波源分布的贡献,波源强度为每单位面积 $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$,而头两项可以证明是代表一个偶极子分布的贡献,偶极子的强度是每单位面积 $V/4\pi$,方向则与 S 面垂直.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当然，这些波源和偶极子纯属虚构，这种解释的后面没有深刻的物理意义.

§8.3.2 基尔霍夫衍射理论

虽然基尔霍夫积分定理具体表达出惠更斯-菲涅耳原理的基本概念，但不同面元的贡献所遵守的规律却比菲涅耳所假定的要复杂得多. 不过，基尔霍夫证明，在许多情况下，这一定理可以化为一种近似的、但是大大简化的形式，它和菲涅耳的数学表述基本相同，但是它同时还给出了菲涅耳理论中尚未确定的那个倾斜因子.

考虑从点源 P_0 发出的一个单色波，它传播通过不透明平面屏上的一个开孔，并同前设 P 是光扰动待定的一点. 假定开孔的线度比波长大，但比 P_0 和 P 到屏的距离都小得多.

为求得 P 点的扰动，我们围绕 P 点作一个闭合面 S，对它取基尔霍夫积分. 闭合面 S 由三部分构成（见图 8.3(a)）：(1)开孔 $\mathscr{A}$，(2)不透明屏的部分背照面 $\mathscr{B}$，(3)以 P 为中心、R 为半径的大球的部分球面 $\mathscr{C}$.

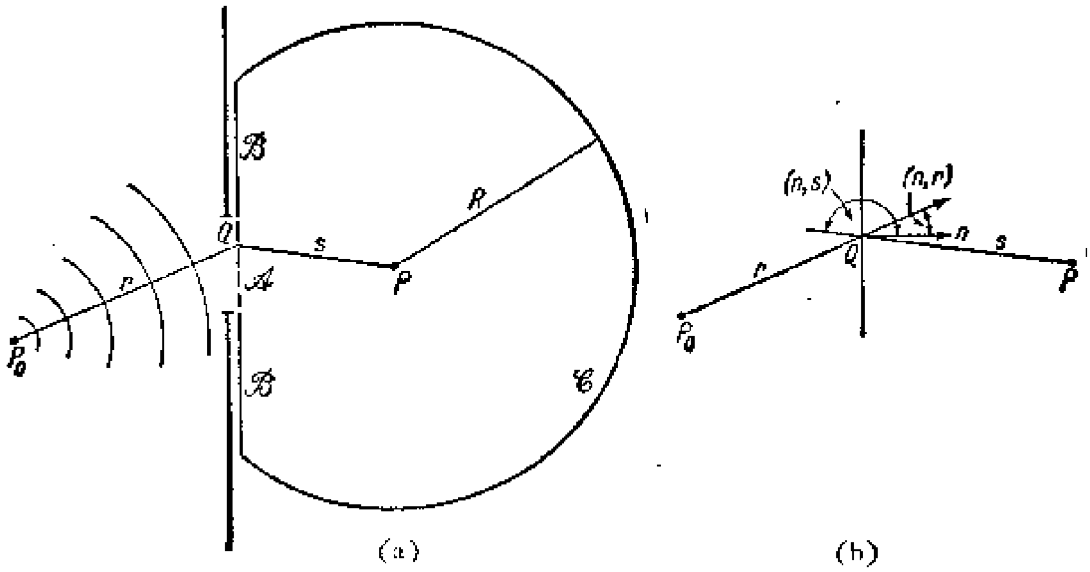


图 8.3 菲涅耳-基尔霍夫衍射公式推导图示

这时，方程(7)所表达的基尔霍夫定理给出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\left[\iint_{\mathscr{A}}+\iint_{\mathscr{B}}+\iint_{\mathscr{C}}\right]\left\{U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)\frac{\partial U}{\partial n}\right\}dS, \tag{14}$$

式中，同前，s 是 P 点到面元 dS 的距离，$\partial/\partial n$ 表示沿积分面内向法线取微商.

这里碰到一个困难，须要代入(14)式中的 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$ 上的 U 和 $\partial U/\partial n$ 值无法准确知道. 不过，可以假定，在 $\mathscr{A}$ 上，除紧靠孔边处以外，各点的 U 和 $\partial U/\partial n$ 同没有屏时的相差无几，而在 $\mathscr{B}$ 上，这些量近似为零. 因此，基尔霍夫令

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 }\mathscr{A}\text{ 上：}\quad U=U^{(i)},\quad \frac{\partial U}{\partial n}=\frac{\partial U^{(i)}}{\partial n},\\&\text{在 }\mathscr{B}\text{ 上：}\quad U=0,\quad \frac{\partial U}{\partial n}=0,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式中

$$U^{(i)}=\frac{Ae^{ikr}}{r},\quad \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n}=\frac{Ae^{ikr}}{r}\left[ik-\frac{1}{r}\right]\cos(n,r) \tag{16}$$

是与入射场有关的值(见图 8.3(b))，A 是常数. (15)的近似称为**基尔霍夫边界条件**，它们是**基尔霍夫衍射理论**的基础.

剩下要考虑球面部分 $\mathscr{C}$ 的贡献. 显然，使半径 R 取得足够大，可使 $\mathscr{C}$ 上 U 和 $\partial U/\partial n$ 的值任意小. 由此看来，$\mathscr{C}$ 的贡献似可忽略. 但是，当让 R 无限增大时，$\mathscr{C}$ 的面积也将无限增大，所以，$R\to\infty$ 时 $U\to 0$ 和 $\partial U/\partial n\to 0$ 的条件并不足以使积分为零. 因此，还必须对离屏很远处波函数的性质作更精密的假定，这一点我们在 492 页讨论在包含无穷大媒质的问题中解的单值性时已经遇到过了. 从物理上看，很明显可以假定，辐射场并非所有时刻都存在，而是由从某特定时刻 $t=t_0$ 开始发射的某一波源所产生. 这个假定对我们的讨论已足够了[1]（当然，这意味着我们现在偏离了严格的单色性，因为完全的单色场应该在所有时刻都存在）. 于是，在 $t>t_0$ 的任何时刻，场所充满的空间区域，其外边界距离 P_0

1) 这个假定不是必要的，但是可缩短讨论. 更加形式的论证，见 Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933), P.149.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

不超过 $c(t-t_0)$，c 是光速．因此，如果 R 选择得足够大，使得在讨论 P 点扰动之时，还没有 $\mathscr{C}$ 的贡献能到达 P 点（因为在再早的适当时刻，场还没有到达 $\mathscr{C}$ 这种遥远地区），则对 $\mathscr{C}$ 的积分将为零．将所有条件代入(14)式，并略去法线微商中的 $1/r$ 和 $1/s$ 项（因为它们比 k 小得多），最后得到

$$U(P)=-\frac{iA}{2\lambda}\iint_{\mathscr{A}}\frac{e^{ik(r+s)}}{rs}[\cos(n,r)-\cos(n,s)]dS, \quad (17)$$

这称为非涅耳-基尔霍夫衍射公式．

显然，任何开曲面，只要其边缘与孔边重合，就都可以用来代替 $\mathscr{A}$．特别说来，我们可以选择图 8.4 的 W 和 $\mathscr{C}$ 来代替 $\mathscr{A}$，其中 W 是一个入射波阵面的一部分，大小差不多正和孔径相配，而 $\mathscr{C}$ 是一个锥面的一部分，这锥的顶点在 P_0，各母线通过孔边．如果波的曲率半径足够大，则 $\mathscr{C}$ 的贡献显然可以忽略．此外，在 W 上，$\cos(n, r_0)=1$．如再令 $\chi=\pi-(r_0, s)$，则取代(17)式而得到

$$U(P)=-\frac{i}{2\lambda}\frac{Ae^{ikr_0}}{r_0}\iint_{W}\frac{e^{iks}}{s}(1+\cos\chi)dS, \quad (18)$$

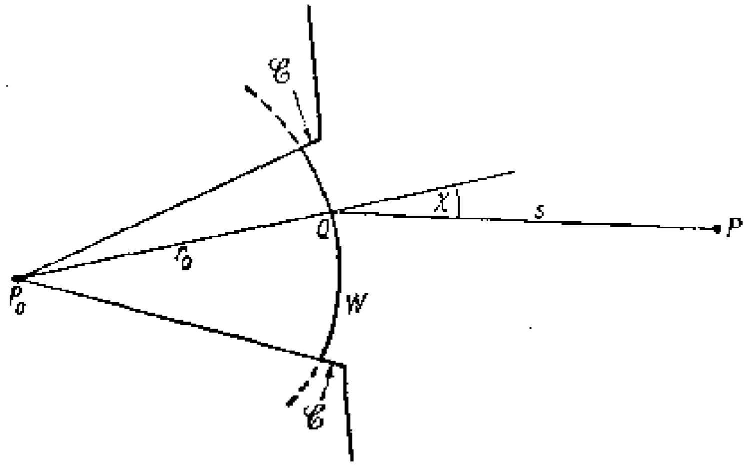


图 8.4　衍射公式(18)图示

式中 r_0 是波阵面 W 的半径．如果我们取

$$-\frac{i}{2\lambda}\frac{Ae^{ikr_0}}{r_0}\frac{e^{iks}}{s}(1+\cos\chi)dS \quad (19)$$

作为波阵面面元 dW 的贡献，则(18)式和非涅耳对惠更斯原理的数学表述相一致．比较一下(18)式和 §8.2(1)式，就得到非涅

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

耳理论的倾斜因子[1]

$$K(\chi) = -\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos\chi) \tag{20}$$

对于中心波带，$\chi = 0$，(20)式给出 $K_1 = K(0) = -i/\lambda$，与§8.2(14)式一致。然而，菲涅耳所假定的 $K(\pi/2) = 0$ 并不正确。

现在再回到菲涅耳-基尔霍夫衍射公式(17)。可以注意，这个公式对源和观测点是对称的。这意味着，P_0 点点源在 P 点产生的效果，和 P 点同等强度的点源在 P_0 点所产生的效果相同。这个结果有时称为亥姆霍兹互易定理(或可逆定理)。

以上我们假定，光在从光源到 P 点的路途中，除衍射屏以外，没有遇到其他任何面；这时入射波是球面的。这分析可很容易加以推广，以包括波不是这种简单形状的更复杂情况。结果发现，倘如波阵面各点的曲率半径比波长大得多，而所包含的角度又都足够小，则基尔霍夫理论的结果和根据惠更斯-菲涅耳原理推断的结果仍旧大体相同。

从上面的讨论我们还可立即得出关于互补屏衍射光分布情况的结论。互补屏是指这样两个屏，其中一个的开孔部分正好对应另一个的不透明部分，反之亦然。设 $U_1(P)$ 和 $U_2(P)$ 分别代表第一个屏和第二个屏单独放在光源和观察点 P 之间时的复位移，$U(P)$ 是没有屏时的值。由于 U_1 和 U_2 可表成为对开孔部分的积分，而两个屏开孔部分加起来正好是整个平面，因而

$$U_1 + U_2 = U. \tag{21}$$

这结果称为巴俾涅(A. Babinet)原理[2]。

由巴俾涅原理可立即得到两个结论：如 $U_1 = 0$，则 $U_2 = U$；因此，放上其中一个屏时强度为零的那些点，在换上另一个屏

---

1) 倾斜因子表达式(20)是 G. G. Stokes 首先推导出的，见 *Trans. Camb. phil. Soc.*, **9** (1849), 1; reprinted in his *Math. and phys. Papers* (Cambridge University Press, **2** (1883), 243).

2) A. Babinet *Compt. Rend.*, **4** (1837), 638. §11.3将给出一个类似的这种定理，它说的是电磁场矢量，而不是单个标量 U，因而可以认为是巴俾涅原理的严格表述。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，强度将跟没有屏时一样。此外，如 $U=0$，则 $U_1=-U_2$；这意味着，在 $U=0$ 的那些点，U_1 和 U_2 的位相差 π，强度 $I_1=|U_1|^2$ 和 $I_2=|U_2|^2$ 相等。例如，当一个点源通过一理想透镜成象时，象平面上的光分布除点源象点 O 近旁以外，其它各处强度皆为零。这时，如果把互补屏放在物与象之间，则除 O 点附近以外，有 $I_1=I_2$。

基尔霍夫理论基本近似(15)式的各个结果曾受到许多评论，例如，这些评论指出，基尔霍夫的解没有能在孔平面上产生原来所假定的那些值[1]。然而，最近沃耳夫和马钱德(E. W. Marchand)[2]指出，如果把边值条件(15)稍加改变，则从基尔霍夫理论可得到一恰当解，从而使这一理论的解释在数学上成为自洽。经证明，基尔霍夫理论完全适用于处理仪器光学中所遇到的大多数问题。这主要是因为光学波长比衍射障碍物的线度小得多[3]。但是在其它问题中，象关于屏和障碍物近旁场的特性这样一些问题，就必须采用更精细的方法；这时，必须把它们作为电磁理论的边值问题来处理，同时把源作为波函数的适当奇异点。只是在极少数情况才求得了这样一些解；其中几个将在第十一章中讨论。

§ 8.3.3 夫琅和费衍射和菲涅耳衍射

现在我们进一步细致地分析菲涅耳-基尔霍夫衍射积分(17)

1) H. Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière* (Paris, George Carré, II (1892)), PP. 187—8. 又见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygen's Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1950), PP. 71—72 和 G. Toraldo di Francia, *Atti Fond. Giorgio Ronchi*, **XI** (1956), § 6.

2) E. Wolf and E. W. Marchand, *J. Opt. Soc. Amer.*, **56** (1966), 1712. 此外，F. Kottler, *Ann der Physik*, **70** (1923), 405 也曾指出，可以认为基尔霍夫理论对某种不连续问题(Saltus problem)(给定问题的不连续条件而不是给定其边值条件)提供了一严格解。这一解释在黑屏(完全吸收屏)衍射问题上具有特别意义。[亦见 F. Kottler, *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland publishing company and New York, J. Wiley and Sons, 1964), P. 281 和 B. B. Baker and E. T. Copson, *loc. cit.*, P. 98.]

C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. phys.* (London, Physical Society), **17** (1954), 35 一文载有许多关于基尔霍夫理论的各种修改的参考文献。

3) 参见 S. Silver, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52** (1962), 131.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式:

$$U(P) = -\frac{Ai}{2\lambda}\iint_{\mathscr{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs}[\cos(n,r) - \cos(n,s)]dS. \quad (22)$$

当面元 dS 在积分区中扫动时，$r+s$ 一般将改变极多个波长，因而因子 $e^{ik(r+s)}$ 将振荡得很快. 相反，如果 P_0 和 P 两点离屏的距离比孔的线度大得多，则因子 $[\cos(n,r) - \cos(n,s)]$ 在整个孔上变化并不显著. 此外，我们假定直线 P_0O 和 OP 与 P_0P 的夹角都不太大，其中 O 是孔上任一点. 于是我们可以用 $2\cos\delta$ 代替上一因子，其中 δ 是直线 P_0P 与屏法线的夹角. 最后，因子 $1/rs$ 可用 $1/r's'$ 代替，其中 r' 和 s' 是 P_0 和 P 离原点的距离. 于是(22)式化为

$$U(P) \sim -\frac{Ai}{\lambda}\frac{\cos\delta}{r's'}\iint_{\mathscr{A}} e^{ik(r+s)}dS. \quad (23)$$

现在取一直角参考坐标系，令原点在孔上，令 x 轴和 y 轴在孔平面上，并选取正 z 方向指向观察点 P 所在的那半空间(图 8.5).

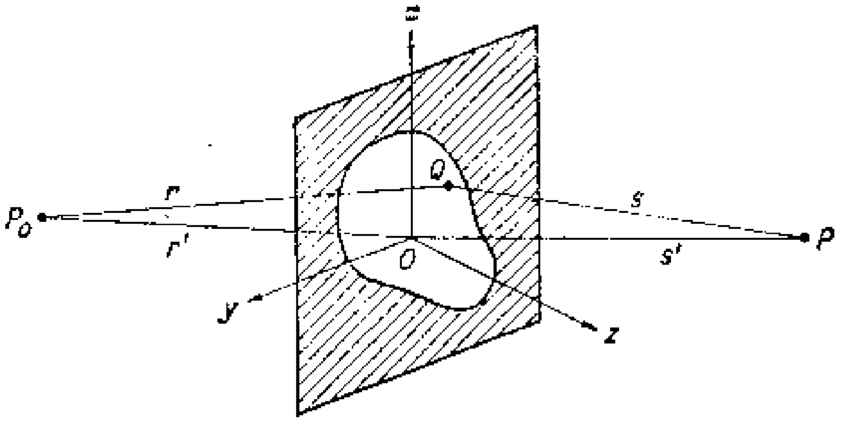


图 8.5 平面屏开孔上的衍射

设 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z) 分别是 P_0 和 P 的坐标，而 (ξ, η) 是孔上某点 Q 的坐标，则

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= (x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + z_0^2, \\ s^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2, \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} r'^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ s'^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= r'^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta) + \xi^2 + \eta^2, \\ s^2 &= s'^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由于我们已经假定孔的线度比 r' 和 s' 都小得多，因而可将 r 和 s 展成 ξ/r'，η/r'，ξ/s' 和 η/s' 的幂级数。于是得到

$$\left.\begin{aligned} r &\sim r' - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3} - \cdots, \\ s &\sim s' - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s'^3} - \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

将(27)式代入(23)式，则

$$U(P) = -\frac{i\cos\delta}{\lambda}\frac{Ae^{ik(r'+s')}}{r's'}\iint_{\mathscr{A}} e^{ikf(\xi,\eta)}d\xi d\eta, \tag{28}$$

式中

$$f(\xi,\eta) = -\frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'}$$
$$-\frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s'^3}\cdots. \tag{29}$$

设以 (l_0, m_0) 和 (l, m) 代表 r' 和 s' 的头两个方向余弦：

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= -\frac{x_0}{r'}, \quad & l &= \frac{x}{s'}, \\ m_0 &= -\frac{y_0}{r'}, \quad & m &= \frac{y}{s'}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

则(29)式可写成如下形式：

$$f(\xi,\eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)(\xi^2 + \eta^2)\right.$$
$$\left. - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{r'} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{s'}\right\}\cdots. \tag{31}$$

我们已经把求 P 点光扰动的问题化成为计算积分(28)。当然，当 f 中 ξ 和 η 的二次项及高次项可以忽略时，这个计算比较简单。这种情况，人们称之为夫琅和费衍射；而当二次项不能忽略时，人们称之为菲涅耳衍射。幸好，在光学中，比较简单的夫琅和费衍射

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

情况要重要得多.

严格地讲，只有在极限情况 $r'\to\infty$，$s'\to\infty$，即光源和观察点都在无穷远时，二次项和高次项才消失;(这时、积分号外的因子 A 须假定和 r'、s' 一样，也趋于无穷大). 但是，如果

$$\frac{1}{2}k\left|\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)(\xi^2+\eta^2)-\frac{(l_0\xi+m_0\eta)^2}{r'}\right.$$

$$\left.-\frac{(l\xi+m\eta)^2}{s'}\right|\ll 2\pi, \tag{32}$$

则显然二次项对积分没有什么贡献. 我们立即能看出满足(32)式的一些条件. 利用不等式 $(l_0\xi+m_0\eta)^2\leqslant(l_0^2+m_0^2)(\xi^2+\eta^2)$，并记及 l_0^2，m_0^2，l^2 和 m^2 不能超过 1，则可发现如果

$$|r'|\gg\frac{(\xi^2+\eta^2)_{极大}}{\lambda}\ 并且\ |s'|\gg\frac{(\xi^2+\eta^2)_{极大}}{\lambda}, \tag{33}$$

或者

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}=0\ 并且\ l_0^2,m_0^2,l^2,m^2\ll\frac{|r'|\lambda}{(\xi^2+\eta^2)_{极大}}, \tag{34}$$

(32)式都将被满足.

从条件(33)能够估计在多大的 r' 和 s' 可采用夫琅和费表示. 条件(34)则意味着，当观察点在平行于孔平面的平面上时，如果观察点和源都和 z 轴靠得足够近，将也产生夫琅和费衍射. 这里可以区分两种情况：当 r' 为负时，入射到孔上的波阵面对传播方向是凹的，即 P_0 是入射波的会聚中心，而不是发散中心. 这一情况具有很重要的实际意义，因为当用一个很好校正的共轴系统使离轴不远的点源成象时，象空间中即出现这种情况. 这时，夫琅和费衍射图样形成在高斯象平面上，并且可以认为是由成象波在出射光瞳上衍射而产生. 当 r' 为正时，波阵面对传播方向是凸的. 衍射现象是虚的，表观上形成在通过源 P_0 的屏上. 例如，拿一个孔放在观察远方光源的眼睛或望远镜物镜的前面，就发生这种衍射情况.

为什么能在很好校正的透镜的焦平面上观察到夫琅和费衍射

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

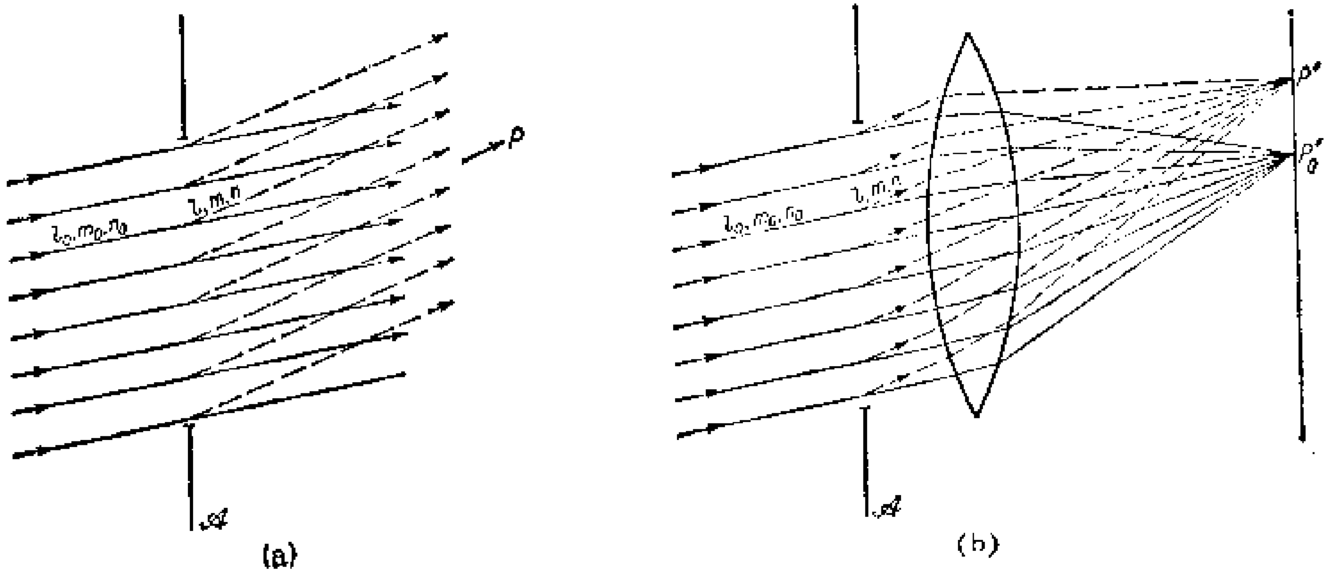


图 8.6 两种夫琅和费衍射情况的比较

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现象呢？为了用更物理的话说明这一点，让我们先比较一下图 8.6 所表明的两种状况．在 (a) 中，从无穷远一点向屏孔射来一束光线，其方向余弦为 l_0, m_0, n_0．在 l, m, n 方向上很远的一点 P，所观察到的效应可以看作是由一组起源于孔上各点并同沿这方向传播的平面波叠加产生．这些波(它们在几何光学领域中是不存在的)可以叫做衍射波，相应的波法线可以叫做衍射光线．

现在如果在屏后放上一块经过很好校正的透镜 (图 8.6(b))，则 (l, m, n) 方向上的所有衍射光将会聚到透镜焦平面上一点 P'．因为从这衍射光束的某波阵面到 P' 点，所有光线的光程相等，所以所产生的干涉效应和第一种状况实质相同；当然，这里要假定所用透镜很大，没有引起另外的衍射．再普遍一些，平面波入射这一限制也就可以取消，只要从光源到 P' 点所有光线的光程长度大致相等．

在夫琅和费衍射情况下，l_0, m_0, l, m 这四个量只是以下列组合形式出现于 (31) 式：

$$p = l - l_0, \quad q = m - m_0. \tag{35}$$

因此在上述近似的有效范围内，当孔在自身平面上移动时，效应并不改变．

我们将把夫琅和费衍射所服从的积分写成如下形式：

$$U(P) = C \iint_{\mathscr{A}} e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta, \tag{36}$$

式中 C 代表(28)式积分号前面的常数．C 是由与源和观察点位置有关的一些量来确定的，但实用上，用其它量来表示它常常更为方便．设 E 是入射到孔上的总能量．按照能量守恒定律，到达观察面上的总能量必须也等于 E，所以有如下归一化条件：

$$\iint |U(p,q)|^2 dp dq = E, \tag{37}$$

式中积分遍及 p 和 q 的所有可能值．方程(36)可改写成傅里叶积分的形式：

$$U(p,q) = \iint G(\xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta, \tag{38}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中光瞳函数[1] G 为

$$G(\xi,\eta)=\text{常数 } C \text{（在开孔上各点）}$$
$$=\quad 0 \text{（在开孔外各点），} \tag{39}$$

而积分遍及整个 (ξ,η) 平面.

根据傅里叶变换的帕西瓦定理[2],

$$\iint|G(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\iint|U(p,q)|^2 dp dq, \tag{40}$$

以 (37) 和 (39) 式代入,并以 D 代表开孔面积,即有

$$\frac{1}{\lambda^2}E=|C|^2 D, \tag{41}$$

由此[3],

$$C=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{D}}. \tag{42}$$

于是,夫琅和费衍射的基本积分呈如下形式:

$$U(p,q)=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{D}}\iint_{\mathscr{A}} e^{-ik(p\xi+q\eta)}d\xi d\eta. \tag{43}$$

可以注意,图样中心 $p=q=0$ 处的强度 $I_0=|U(0,0)|^2$ 为

$$I_0=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\frac{E}{D}\left(\iint_{\mathscr{A}} d\xi d\eta\right)^2=\frac{ED}{\lambda^2}=C^2D^2. \tag{44}$$

前面推导 (36) 式时曾对 p 和 q 的范围作了某些限制,而这里在推导 (43) 式时,我们忽略了这一事实. 不过, (40) 式中积分遍及所有 p 和 q 值所引进的误差是微不足道的, 因为除 $p=q=0$ 附近以外, $U(p,q)$ 都非常小.

现在再回到基本衍射积分(28). 当 (ξ,η) 点在积分区内扫动时,函数 $f(\xi,\eta)$ 将改变很多个波长,因而被积函数的实部和虚部都将反复多次改变符号. 结果,不同面元的贡献一般将暗中相互抵

1) 更普遍的光瞳函数将在 §8.6 和 §9.5 中讨论.
2) 参见 I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*(New York, McGraw-Hill, 1951), pp. 25 and 44.
3) 这里我们略去了一个常数相因子,因为它对强度 $I=|U|^2$ 没有贡献.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

消(相消干涉). 但是有一个面元情况不同,这面元当中有一个特别的点,叫做临界点或极点,函数 $f(\xi, \eta)$ 在这个点是稳定的. 在这里,被积函数变化缓慢得多,因而可以预期它将产生显著的贡献. 因此,当波长足够小时,积分(28)的值实际上决定于函数 f 在各极点附近的行为. 这就是用来确定某类积分渐近行为的稳定相方法的原理,我们在附录 3 中给以比较详细的讨论. 这里仅指出这一结果和衍射现象分类的关系.

比较一下(22)和(28)式,可以看到 $r + s = r' + s' + f$,所以(见图 8.5)

$$f = P_0Q + QP + \text{常数}. \tag{45}$$

显然,当 Q 与 P_0 和 P 三点共线时,f 作为 Q 点的函数将是稳定的. 因此,对 P 点扰动的贡献,主要来自孔平面上 $\bar{Q}$ 点近旁地区,$\bar{Q}$ 是源点和观察点连线与孔平面的交点. 在夫琅和费衍射的特别情况下,P_0 和 P 实际上在无穷远,所以不存在择尤点 $\bar{Q}$. 因此这时衍射积分的行为必定会有些例外.

在 § 8.5—§ 8.8,我们将研究几种最重要的夫琅和费衍射和菲涅耳衍射. 但是,首先我们须要证明,在光强的计算中可采用单个标量波函数 U.

§ 8.4 过渡到标量理论[1]

我们在推导基尔霍夫积分定理时所用的那个 U 函数,它唯一的性质是满足齐次标量波动方程. 因此可以确定,这个定理和前节的结论可应用到无电流无电荷区域中,场矢量、矢量势、赫兹矢量等的各个笛卡儿分量. 要获得对场的完全描述,必须分别对每个笛卡儿分量应用这一定理. 所幸,经证明,在光学所遇到的大多数问题中,采用单个复标量波函数的近似描述即已足够.

对电磁场的完全描述,不但需要确定场矢量的大小,还需要确

1) 本节我们基本上采用了 E. Wolf 等人的分析,见 O. Theimer, G. D. Wassermann and E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A., **212** (1952) 426.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

定它们的方向(偏振),二者都是位置和时间的函数。但是,由于光学场的频率非常高(数量级为10^{14}/秒),我们不能测量这些量中任何一个的瞬时值,而只能测量在某时间间隔内的平均值,这个间隔要比光的周期大得多。此外,我们通常遇到的是自然光,所以可观测(宏观)场没有择尤的偏振方向。这时,首要的量是强度 I。强度 I 的定义已见于 § 1.1.4,它是每单位时间每单位面积(在电矢量和磁矢量所决定的平面上)通过的能量的时间平均值:

$$I = \frac{c}{4\pi} |\langle \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \rangle|.$$

我们将证明,当自然光通过一个中等孔径和一般设计的光学仪器时,相关联的电磁场的强度可以用单个复标量波函数借助下列公式近似表出[1]:

$$I = |U|^2,$$

而且知道了这系统的程函,即可计算函数 U。

§ 8.4.1 单色振子产生的象场

我们考虑一个对称的光学系统,在其中 P_0 点处有一点源(图 8.7),发射准单色的自然光,频率为 ω_0。我们假定,通过系统的各条光线对轴的倾角不大,譬如说,不大于 10° 或 15°。在 P_0 点,我

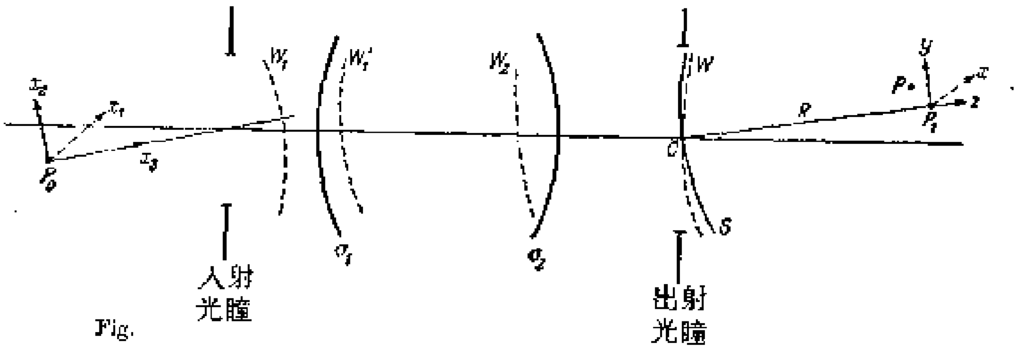


图 8.7 电磁波在光学系统中的传播

1) E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **74** (1959), 269 证明了更普遍的情况:在一个非偏振的准单色场中,(时间平均的)能量密度和能流二者总可从一个复时谐标量波函数导出。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

们选取一组笛卡儿坐标轴(x_1, x_2, x_3)，并令x_3沿主光线方向．这点源可看作是一偶极子，其偶极矩$\boldsymbol{Q}(t)$的大小和方向都随时间t而改变．$\boldsymbol{Q}(t)$在三个方向上的分量可以写成傅里叶积分形式：

$$Q_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} q_j(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{1}$$

因$Q_j(t)$是实量，故可知复量$q_j(\omega)$满足关系式

$$q_j(-\omega) = q_j^*(\omega), \tag{2}$$

式中星号表示复共轭．因此(1)式可以写成为

$$Q_j(t) = \mathscr{R}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} q_j(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\right\} (j = 1, 2, 3), \tag{3}$$

$\mathscr{R}$表示取实部．(3)式的每个傅里叶成分各代表一个单色赫兹振子，振子轴沿x_j方向．

设$|q_j(\omega)|$和$\delta_j(\omega)$是$q_j(\omega)$的振幅和位相，

$$q_j(\omega) = |q_j(\omega)| e^{i\delta_j(\omega)}. \tag{4}$$

因为我们假定点源发射准单色光，所以，对于每个j来说，模$|q_j(\omega)|$只是在很窄的间隔$\left(\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega, \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)$内才明显地不等于零．自然光的假定则意味着，$\delta_j(\omega)$在整个频率范围内是迅速而又无规变化的函数[1]．

因为场可以看作是一组严格单色场的叠加，所以方便的做法是先考察P_0点单个单色赫兹振子的贡献．由于这种振子的场在它轴向附近很弱，而且我们又假定入射光瞳的直径对P_0的张角很小，因而实际上将只有$\boldsymbol{Q}(t)$的$Q_1(t)$和$Q_2(t)$这两个分量对场有贡献．所以，我们将取轴在x_1x_2平面上的某一振子作为讨论典型．

设

$$\mathscr{R}\{q(\omega)\boldsymbol{p}_0(\omega)e^{-i\omega t}\} \tag{5}$$

是这个典型偶极子的矩，$\boldsymbol{p}_0(\omega)$是它轴向上的单位矢量．在真空中，在距离P_0远大于波长$\lambda = (2\pi c/\omega)$的$T$点，这样一个偶极子将产生下式所给的场(见§2.2(64)式)：

---

1) 关于此点，详细讨论可见 M. Planck, *Ann. d. Physik*, (4), 1 (1900), 61.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\omega &= \mathscr{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2 r}\,|q(\omega)|\,\boldsymbol{r}_0\times(\boldsymbol{\rho}_0(\omega)\times\boldsymbol{r}_0)\,e^{i[\delta(\omega)-\omega(t-r/c)]}\right\},\\ \boldsymbol{H}_\omega &= \mathscr{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2 r}\,|q(\omega)|\,\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\rho}_0(\omega)\,e^{i[\delta(\omega)-\omega(t-r/c)]}\right\},\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

式中 $\boldsymbol{r}_0$ 代表单位径向矢量.

设 W_1 是物空间中一个典型的几何波阵面，和 P_0 的距离远大于波长. 因为我们假定光线与系统轴的夹角很小，所以从(6)式立即可以知道，在任何特定时刻，矢量 $\boldsymbol{E}_\omega$ 和 $\boldsymbol{H}_\omega$ 的大小和方向在波阵面 W_1 上的变化不大.

第一个表面[1] σ_1 对入射场的影响有两方面. 第一，场矢量的振幅因反射损失而减小；第二，振动方向发生改变.菲涅耳公式表明，这二个效应主要和入射角的大小有关. 如果入射角很小（如 10° 左右），则反射损失也很小（约为 5%），并且振动面的转动不超过几度(参见 § 1.5). 此外，这些效应在 σ_1 面上实际是均匀的. 因为在波阵面 W_1 上，$\boldsymbol{E}_\omega$ 和 $\boldsymbol{H}_\omega$ 的时间无关部分随位置的变化不大，所以在 σ_1 面之后的折射波阵面 W_1' 上，它们的变化也不大(见图 8.7). 同样，在 σ_1 和第二个面 σ_2 之间的任何其它波阵面上，$\boldsymbol{E}_\omega$ 和 $\boldsymbol{H}_\omega$ 的行为也是如此. 因为，如 § 3.1.3 中所证明的，在一个均匀媒质中，振动方向沿每条光线保持不变，而且由于各个波阵面近似为球面(中心在第一个面所产生的 P_0 的高斯象点)，所以各点的振幅和波阵面的傍轴曲率半径差不多成反比.

如此一一论证，最后到达通过出射光瞳中心 C 的波阵面 W，并且同样得到，在这个波阵面上，$\boldsymbol{E}_\omega$ 和 $\boldsymbol{H}_\omega$ 的时间无关部分也变化不大. 从这个结果，我们立即能够写出象区域中场矢量的近似数学表示.

现在以 P_0 的高斯象 P_1 为原点，取一组直角笛卡儿坐标轴 (x, y, z)，令 z 轴沿 CP_1 方向. 在孔径区域中，除紧靠孔径边缘处以外，其它各点的场可近似表成为(参见第三章)

---

1) 这里我们假定 σ_1 是一个折射面. 如果 σ_1 是一反射镜，讨论亦无需作根本修改，这可从查阅菲涅耳公式得知.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\omega}(x,y,z,t) &= \mathscr{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{e}_{\omega}(x,y,z)e^{i\left\{\delta(\omega)-\omega\left[t-\frac{1}{c}\mathscr{S}_{\omega}(x,y,z)\right]\right\}}\right\},\\
\boldsymbol{H}_{\omega}(x,y,z,t) &= \mathscr{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{h}_{\omega}(x,y,z)e^{i\left\{\delta(\omega)-\omega\left[t-\frac{1}{c}\mathscr{S}_{\omega}(x,y,z)\right]\right\}}\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (7)
$$

此式可以看作是(6)式的推广．其中 $\mathscr{S}_{\omega}(x,y,z)$ 是从物点到 (x,y,z) 点的光程，$\boldsymbol{e}_{\omega}(x,y,z)$ 和 $\boldsymbol{h}_{\omega}(x,y,z)$ 是两个相互正交的实矢量[1)]．在一个折射率为 n 的非磁性均匀媒质中，这两个矢量满足关系式（见 § 3.1 方程 (19) 和 (21)）

$$
|\boldsymbol{h}_{\omega}| = n|\boldsymbol{e}_{\omega}|. \quad (8)
$$

现在以 P_1 为中心作一参考球 S，令它通过出射光瞳中心 C，并用 R 表示它的半径 CP_1．实际上，S 和 W 之间的距离各处都不会超过几十个波长．因此，和 W 面上一样，S 面上振幅矢量 $\boldsymbol{e}_{\omega}$ 和 $\boldsymbol{h}_{\omega}$ 的大小和方向实际没有变化．

设 $P(X, Y, Z)$ 是象区域中强度待定的一点．如果出射光瞳的直径对 P 点的张角很小，我们就可以在前节所讲的那种近似下应用基尔霍夫公式．这时，以 (7) 式为入射场，对 S 上与出射光瞳大致吻合的那一地区 S' 取积分，并略去 S' 上倾斜因子的变化，即可得到

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\omega}(X,Y,Z,t) &= \mathscr{R}\,\frac{\omega^3}{2\pi i c^3}e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\\
&\quad\times\iint_{S'}\frac{1}{s}\boldsymbol{e}_{\omega}(x',y',z')e^{i\frac{\omega}{c}[\mathscr{S}_{\omega}(x',y',z')+s]}dS,\\
\boldsymbol{H}_{\omega}(X,Y,Z,t) &= \mathscr{R}\,\frac{\omega^3}{2\pi i c^3}e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\\
&\quad\times\iint_{S'}\frac{1}{s}\boldsymbol{h}_{\omega}(x',y',z')e^{i\frac{\omega}{c}[\mathscr{S}_{\omega}(x',y',z')+s]}dS,
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

式中 s 是从参考球上一代表点 (x', y', z') 到 P 点的距离．

---

1) $\boldsymbol{e}_{\omega}$ 和 $\boldsymbol{h}_{\omega}$ 是实矢量这一点出于如下事实：(6)式中相应各矢量是实的（线偏振），并且每次折射时，线偏振态仍旧是线偏振态（见 62 页），此外，如§3.1.3所证，在任何前后两面之间，偏振态沿每条光线保持不变．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因为矢量 $\boldsymbol{e}_\omega(x', y', z')$ 和 $\boldsymbol{h}_\omega(x', y', z')$ 在积分面上变化不大，我们可以用它们在出射光瞳中心 C 处的值 $\boldsymbol{e}_\omega(0, 0, -R)$ 和 $\boldsymbol{h}_\omega(0, 0, -R)$ 来代替它们。由于这两个矢量相正交并且满足(8)式，所以如再取 $n=1$，则可令

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\omega(0, 0, -R) &= a(\omega)\boldsymbol{\alpha}(\omega),\\ \boldsymbol{h}_\omega(0, 0, -R) &= a(\omega)\boldsymbol{\beta}(\omega),\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ 和 $\boldsymbol{\beta}(\omega)$ 是垂直于 z 方向的两个正交单位矢量。于是(9)式变成为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_\omega(X, Y, Z, t)\\ &\quad= \mathscr{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X, Y, Z)a(\omega)\boldsymbol{\alpha}(\omega)e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\right\},\\ &\boldsymbol{H}_\omega(X, Y, Z, t)\\ &\quad= \mathscr{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X, Y, Z)a(\omega)\boldsymbol{\beta}(\omega)e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 U_ω 是标量波函数

$$U_\omega(X, Y, Z) = -\frac{\omega}{2\pi ic}\iint_{S'}\frac{1}{s}e^{i\frac{\omega}{c}[\mathscr{S}_\omega(x', y', z')+s]}dS. \tag{12}$$

从(11)式，通过计算坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}_\omega = c[\boldsymbol{E}_\omega \times \boldsymbol{H}_\omega]/4\pi$ 并取时间平均，可立即推出，P_0 点单个偶极子(由(5)式表示)在 $P(X, Y, Z)$ 点所产生的强度，正比于标量波函数 $U_\omega(X, Y, Z)$ 的模的平方。但是，要证明可采用单个标量波函数计算强度，我们还必须对总场而不是对单色成分求时间平均。

§8.4.2 总象场

上面我们看到，各频率成分对总场的贡献可以看作基本上由 P_0 点的两个偶极子所产生，它们的轴分别沿 x_1 和 x_2 方向。因此，如果我们也用(2)式这种形式的关系来定义负频率成分的贡献，则从(1)和(11)式可以得出，象区域中的总场可以近似表成如下形式：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X,Y,Z,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X,Y,Z)[a_1(\omega)\\&\quad\times\boldsymbol{\alpha}_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)}+a_2(\omega)\boldsymbol{\alpha}_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}]e^{-i\omega t}d\omega,\\\boldsymbol{H}(X,Y,Z,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X,Y,Z)[a_1(\omega)\\&\quad\times\boldsymbol{\beta}_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)}+a_2(\omega)\boldsymbol{\beta}_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}]e^{-i\omega t}d\omega.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

这里，下标 1 和 2 分别指轴沿 x_1 和 x_2 方向的振子的贡献.

为了确定象区域的强度，方便的做法是分别写出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的各个笛卡儿分量表达式. 设 $\theta_1(\omega)$ 和 $\theta_2(\omega)$ 代表单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_1(\omega)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2(\omega)$ 与像空间 x 方向的夹角. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1(\omega)$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1(\omega)$，$\boldsymbol{\alpha}_2(\omega)$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2(\omega)$ 是相互正交的实矢量，位于与 z 方向垂直的平面上，所以从 (13) 式可知 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 各分量近似为[1)]

$$\left.\begin{aligned}E_x(X,Y,Z,t)&=H_y(X,Y,Z,t)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U_\omega(X,Y,Z)f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\\E_y(X,Y,Z,t)&=-H_x(X,Y,Z,t)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U_\omega(X,Y,Z)g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\\E_z(X,Y,Z,t)&=H_z(X,Y,Z,t)=0,\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}f(\omega)&=\frac{\omega^2}{c^2}[a_1(\omega)\cos\theta_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)}+a_2(\omega)\cos\theta_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}],\\g(\omega)&=\frac{\omega^2}{c^2}[a_1(\omega)\sin\theta_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)}+a_2(\omega)\sin\theta_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}].\end{aligned}\right\}(15)$$

由 (14) 式可知，坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}=c|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|/4\pi$ 的大小可近似表达成如下形式：

$$|\boldsymbol{S}|=\frac{c}{4\pi}[E_x^2+E_y^2]=\frac{c}{4\pi}[H_x^2+H_y^2].\quad(16)$$

---

1) 如果从(14)式得出结论，认为象区域中任何地方能流的方向都必定平行于 z，那是不正确的. 因为，在强度很小的地区，例如在爱里图样的暗环附近，(14) 式中的相对误差会大大影响方向的计算.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

我们现在必须确定这个量的时间平均值[1]。

为了收敛，我们假定辐射场仅存在于时刻 $t=-T$ 和 $t=T$ 之间，其中 $T\gg 2\pi/\omega_0$；然后很容易过渡到极限 $T\to\infty$。利用傅里叶反演定理，可由(14)式得到

$$U_\omega(X,Y,Z)f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}E_x(X,Y,Z,t)e^{i\omega t}dt,\quad(17)$$

E_y，H_x 和 H_y 各式与此类似。由(14)式，有

$$\langle E_x^2\rangle=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E_x^2dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E_xdt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U_\omega f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$
$$(18)$$

交换积分次序，即有

$$\langle E_x^2\rangle=\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}U_\omega f(\omega)d\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}E_xe^{-i\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}U_\omega f_\omega U_\omega^*f_\omega^*d\omega\ (\text{由(17)式})$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^\infty|U_\omega|^2|f(\omega)|^2d\omega,\quad(19)$$

因为 $U_{-\omega}f(-\omega)=U_\omega^*f^*(\omega)$。类此

$$\langle E_y^2\rangle=\frac{1}{T}\int_0^\infty|U_\omega|^2|g(\omega)|^2d\omega.\quad(20)$$

因此，按照(16)、(19)和(20)三式，强度 $I(X,Y,Z)$——坡印廷矢量大小的时间平均值为

$$I(X,Y,Z)=\frac{c}{4\pi T}\int_0^\infty|U_\omega(X,Y,Z)|^2[|f(\omega)|^2+|g(\omega)|^2]d\omega.$$
$$(21)$$

如果 $|\Delta\omega|$ 足够小，则在有效频率范围内，$|U_\omega|$ 将实际与 ω 无关，所以这时 $|U_\omega|^2$ 可用 $|U_{\omega_0}|^2$ 代替，并可取到积分号外边。余项

1) 我们计算这个平均值的方法引自 M. Born and P. Jordan, *Z. f. Phys.*, **33** (1925), 479.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{c}{4\pi T}\int_0^\infty \{|f(\omega)|^2 + |g(\omega)|^2\} d\omega \tag{22}$$

与 X, Y 和 Z 无关，而且如果所观察的是稳定现象，则此项还必须与 T 无关(从(17)式可知 f 和 g 隐含 T)。因此(22)式必定是一常数(设为 C)，因而强度 I 最后可写成如下形式:

$$I(X, Y, Z) = C|U_{\omega_0}(X, Y, Z)|^2. \tag{23}$$

常数 C 与光源和光学仪器有关，关系甚为复杂；但是通常人们所注意的只是强度的相对分布，而不是它的绝对值。这时强度可以简单地用 $|U_{\omega_0}|^2$ 来量度。这样，对于一个自然光光源和一个中等数值孔径的光学系统，可采用复标量函数(12)来计算像的强度分布。

§8.5 各种形状光孔上的夫琅和费衍射

现在我们来研究各种形状的光孔的夫琅和费衍射图样。

§8.5.1 矩孔和狭缝

首先讨论一个边长为 $2a$ 和 $2b$ 的矩孔。令原点 O 在矩孔中心，$O\xi$ 轴和 $O\eta$ 轴平行于孔边(图 8.8)，则夫琅和费衍射积分§8.3(36)式变成

$$U(P) = C\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} e^{-ik(p\xi+q\eta)}d\xi d\eta = C\int_{-a}^{a} e^{-ikp\xi}d\xi\int_{-b}^{b} e^{-ikq\eta}d\eta.$$

积分

$$\int_{-a}^{a} e^{-ikp\xi}d\xi = -\frac{1}{ikp}[e^{-ikpa} - e^{ikpa}] = 2\frac{\sin kpa}{kp},$$

另一积分与此类似。因此强度

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left(\frac{\sin kpa}{kpa}\right)^2\left(\frac{\sin kqb}{kqb}\right)^2 I_0, \tag{1}$$

由§8.3(44)式，式中 $I_0 = C^2D^2 = ED/\lambda^2$ 是图样中心处的强度，E 是入射到孔上的总能量，$D = 4ab$ 是矩孔面积。

函数 $y=(\sin x/x)^2$ 的曲线绘于图 8.9 中。在 $x=0$ 处，它有一

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 19　函数 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ 的头五个极大

x	$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$
0	1
$1.430\pi = 4.493$	0.04718
$2.459\pi = 7.725$	0.01694
$3.470\pi = 10.90$	0.00834
$4.479\pi = 14.07$	0.00503

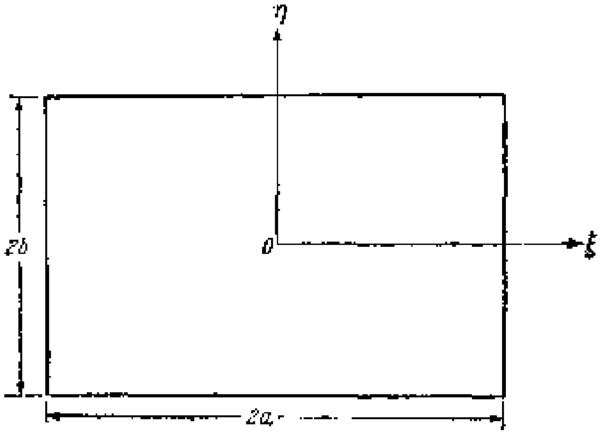


图 8.8　矩孔

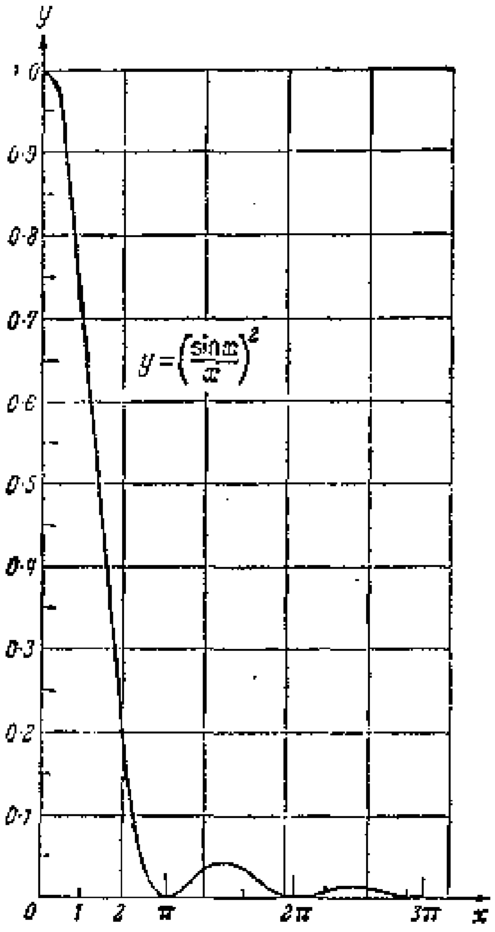


图 8.9　矩孔夫琅和费衍射函数 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

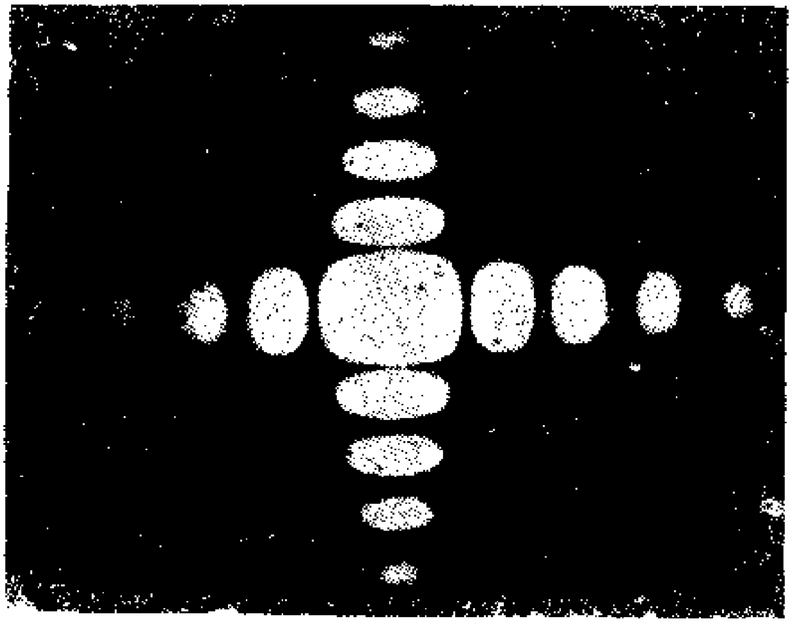


图 8.10　8 毫水 ×7 毫米矩孔的夫琅和费衍射图样，放大 50倍，汞黄光 $\lambda = 5790$ 埃．为了显示出弱的次级大，中央部分已曝光过度（引自 H. Lipson, C. A. Tayor 和 B. J. Thompson）

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

主极大 $y=1$，而在 $x=\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \cdots$ 处，各有一极小 0. 每二极小之间有一次极大，其位置由方程 $\tan x - x = 0$ 的各根给出（见表 19）. 这根的渐近值为 $x=(2m+1)\pi/2$，m 为一整数.

由此可见，强度 $I(P)=0$ 的地方是两组和矩孔边平行的直线，由下列二式表出:

$$kpa = \pm u\pi, \quad kqb = \pm v\pi, \quad (u, v = 1, 2, 3, \cdots), \tag{2}$$

因 $p = l - l_0$，$q = m - m_0$，$k = 2\pi/\lambda$，此即

$$l - l_0 = \pm \frac{u\lambda}{2a}, \quad m - m_0 = \pm \frac{v\lambda}{2b}. \tag{3}$$

在这两组正交暗线所隔成的一个个矩形内，强度各上升到一个极大；但是所有这些极大都比中央极大弱得多，而且从中心往外，强度迅速下降（图 8.10）. 孔越大，衍射图样的有效尺寸越小.

这是点源的相干光所形成的衍射图样. 扩展光源所产生的衍射图样可由这基本衍射图样经积分而得到. 如果这光源是相干的，则须对复振幅进行积分，如果光源是不相干的，则须对强度进行积分. 部分相干光源产生的图样也可以由这基解通过积分处理来确定，但积分时要计及光源各点来光之间所存在的相关性（参见第十章）. 一个特别重要的情况是：光源是一个很长的、不相干的线光源（例如一个发光的金属丝），所发的光被一条和它平行的狭缝所衍射. 为计算简单起见，我们假定发光金属丝以及狭缝在实效上都是无限长，并令 y 轴沿线光源方向. 因 $q = m - m_0$，m_0 代表一个点源的位置，所以求 (1) 式对 q 的积分，就得到线光源产生的强度 I':

$$I' = \int_{-\infty}^{+\infty} I(P)\,dq = \frac{1}{kb}\left(\frac{\sin kpa}{kpa}\right)^2 I_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt,$$

而[1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi,$$

1) 例如，见 W. Gröbner and N. Hofreiter, *Integraltafel*, Vol. II (Wien, Springer, 1950), p. 333.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

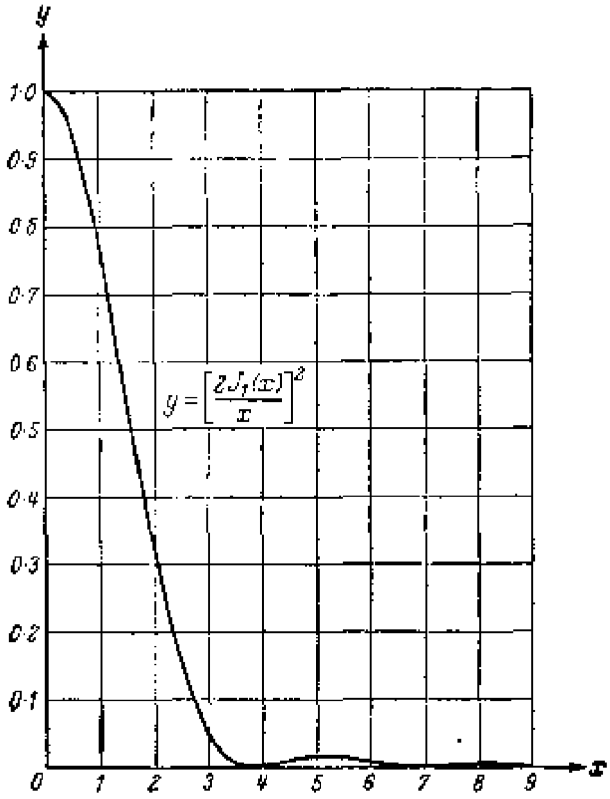


图 8.11　圆孔夫琅和费衍射．函数 $y=\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$

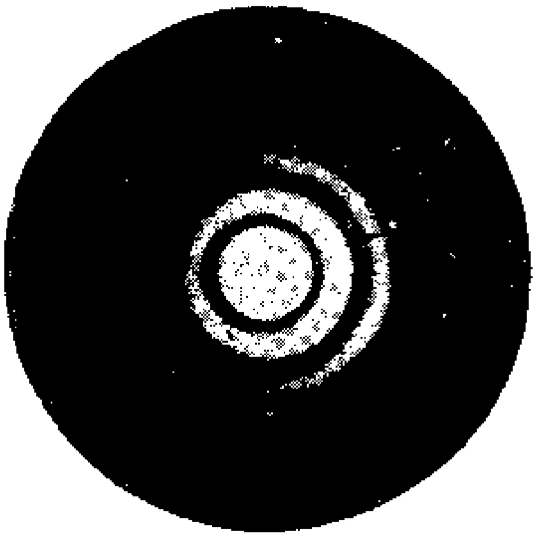


图 8.12　直径 6 毫米圆孔的夫琅和费衍射图样（爱里图样），放大 50 倍，水银光 $\lambda=5790$ 埃．为了显示出弱的次极大，中央部分已曝光过度

（引自 Lipson, C. A. Taylor 和 B. J. Thompson）

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以

$$I' = \left(\frac{\sin kpa}{kpa}\right)^2 I'_0, \tag{4}$$

式中

$$I'_0 = \frac{\lambda}{2b} I_0 = \frac{2aE}{\lambda}. \tag{5}$$

图样仍然由函数 $(\sin x/x)^2$ 来表征，但是是由一系列平行于线光源和狭缝的明暗条纹所组成. 常数 I'_0 是中央位置 $p=0$ 处的强度.

§ 8.5.2 圆孔

用同样方法可以研究圆孔上的夫琅和费衍射. 这时用极坐标代替直角坐标更为适当. 设 (ρ, θ) 是孔上某点的极坐标:

$$\rho\cos\theta = \xi, \quad \rho\sin\theta = \eta; \tag{6}$$

并设 (w, ψ) 是衍射图样上以点源几何象为原点时 P 点的极坐标:

$$w\cos\psi = p, \quad w\sin\psi = q. \tag{7}$$

由 p 和 q 的定义可知，$w=\sqrt{p^2+q^2}$ 是 (p, q) 方向与中心方向 $p=q=0$ 夹角的正弦. 设 a 为圆孔半径，则衍射积分 § 8.3(36) 式这时变成

$$U(P) = C\int_0^a\int_0^{2\pi} e^{-ik\rho w\cos(\theta-\psi)}\rho d\rho d\theta. \tag{8}$$

根据大家熟知的贝塞耳函数 $J_n(z)$ 的积分表示[1)]

$$\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\alpha}e^{in\alpha}d\alpha = J_n(x), \tag{9}$$

(8) 式即化为

1) 例如,见 E. Jahnke and F. Emde, *Tables of Functions with Formulae and Curves* (Leipzig, Teubner, 1933; reprinted by Dover Publications, New York, 4th ed., 1945), p. 149; 或 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1922), p. 20, 方程 5 (用一个明显的代换).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U(P) = 2\pi C \int_0^a J_0(k\rho w)\rho d\rho. \tag{10}$$

此外，根据熟知的递推关系[1]

$$\frac{d}{dx}\{x^{n+1}J_{n+1}(x)\} = x^{n+1}J_n(x), \tag{11}$$

取 $n = 0$，进行积分，有

$$\int_0^x x' J_0(x')dx' = xJ_1(x). \tag{12}$$

由(10)和(12)式得到

$$U(P) = CD\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right], \tag{13}$$

式中 $D = \pi a^2$. 因此强度

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right]^2 I_0, \tag{14}$$

式中，由§8.3(44)式，$I_0 = C^2D^2 = ED/\lambda^2$. 这是爱里以略为不同的形式首先推导出来的一个著名公式[2].

几何像附近的强度分布由函数 $y = (2J_1(x)/x)^2$ 来表征；其曲线如图 8.11 所示. 在 $x = 0$ 处，$y = 1$，是函数的主极大，而当 x 增加时，y 发生振荡，但振幅逐渐减小，和§8.5.1 中所讨论的函数 $(\sin x/x)^2$ 情况类似. 当 x 满足 $J_1(x) = 0$ 时，强度为零(极小). 各极小不再严格等距(见表 20). 次极大的位置由满足方程

$$\frac{d}{dx}[J_1(x)/x] = 0$$

1) 例如，见 E. Jahnke and F. Emde, *loc. cit.*, p. 145 或 E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge *University Press*, 4*th ed.*, 1952), pp. 360—361.

2) G. B. Airy, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **5** (1835), 283. 几乎与爱里同时，Schwerd 用 180 边正多边形代替圆，从而得到了一近似解.

下列文献报导了对会聚球面波圆孔衍射问题的矢量处理（考虑了场的偏振性质）: W. Ignatowski, *Trans. Opt. Inst. Petrograd.*, **1** (1919) IV; V. A. Fock, *ibid.*, (1924), 24; H. H. Hopkins, *Proc. Phys. Soc.*, A, **55** (1943), 116; R. Burtin, *Optica Acta*, **3** (1956), 104; B. Richards and E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A, **253** (1959), 358; A. Boivin and E. Wolf, *Phys. Rev.*, **138** (1965), B 1561; A. Boivin, J. Dow and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **57** (1967), 1171.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 20 函数 $y=\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$ 的头几个极大和极小

x	$\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$	
0	1	极大
$1.220\pi=3.833$	0	极小
$1.635\pi=5.136$	0.0175	极大
$2.233\pi=7.016$	0	极小
$2.679\pi=8.417$	0.0042	极大
$3.238\pi=10.174$	0	极小
$3.699\pi=11.620$	0.0016	极大

的 x 值来决定，或者利用公式[1]（类似于(11)式）

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x), \tag{15}$$

由方程 $J_2(x)=0$ 的根给出。当 x 增加时，相邻二个极小或二个极大的间隔趋近于 π，和前例结果相同。

这些结果表明，衍射图样在中心（点源的几何象）$p=q=0$ 处是一亮斑，周围是一圈圈同心的明、暗圆环（见图 8.11 和 8.12）。亮环的强度随着其半径的加大而急剧下降，通常只有头一、二个环够亮，可被肉眼看见。因 $x=2\pi aw/\lambda$，故由表 20 可知，各个暗环的半径是

$$w=\sqrt{p^2+q^2}=0.610\frac{\lambda}{a},\ 1.116\frac{\lambda}{a},\ 1.619\frac{\lambda}{a},\cdots. \tag{16}$$

相邻二环的间隔渐近地趋近 $\lambda/2a$。可见，衍射图样的有效尺寸仍然反比于孔的线度。

现在来看看，在总入射能量中，有多少落在衍射图样的中心部分，这也是有意义的。设在象平面上以几何象点为中心，以 w_0 为半径画一个圆，并以 $L(w_0)$ 代表落在此圆内的能量百分数，则

$$L(w_0)=\frac{1}{E}\int_0^{2\pi}\int_0^{w_0}I(w)w\,dw\,d\psi$$

1) 例如，见 E. Jahnke and F. Emde, *loc. cit.*, p. 145, 或 E. T. Whittaker and G. N. Waston, *loc. cit.*, p. 361.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$= \frac{D}{\lambda^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{w_0}\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right]^2 w\,dw\,d\phi$$

$$= 2\int_0^{kaw_0}\frac{J_1^2(x)}{x}\,dx. \qquad (17)$$

由(11)式，取 $n=0$，乘以 $J_1(x)$，并利用(15)(取 $n=0$)，可有

$$\frac{J_1^2(x)}{x} = J_0(x)J_1(x) - \frac{dJ_1(x)}{dx}J_1(x)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[J_0^2(x) + J_1^2(x)].$$

以此代入(17)式，记及 $J_0(0)=1$，$J_1(0)=0$，就得到瑞利所导出的公式[1)]

$$L(w_0) = 1 - J_0^2(kaw_0) - J_1^2(kaw_0). \qquad (18)$$

函数 $L(w_0)$ 的曲线如图8.13所示．对于各暗环，$J_1(kaw_0)=0$，所以落在任一暗环外边的能量百分数直接是 $J_0^2(kaw_0)$．对于第一、第二和第三三个暗环，$J_0^2(kaw_0)$ 分别等于0.162，0.090和0.062．这样，有90%以上的光落在第二暗环所包围的圆面积之内．

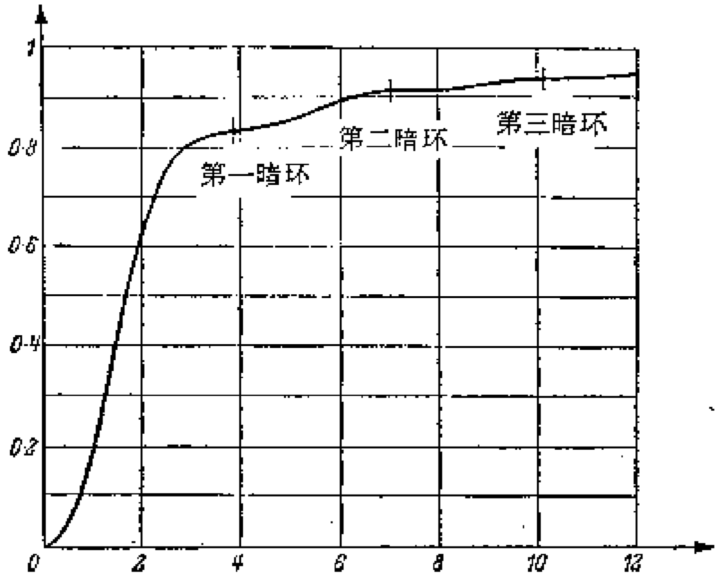


图8.13　函数 $1-J_0^2(x)-J_1^2(x)$，代表夫琅和费圆孔衍射图样中落在规定半径的各个圆内的能量百分数

1) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5), **11** (1881), 214. 又见其科学论文集 (*Scientific Papers*, **1**, 513).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§8.5.3 其它形状的孔

其它形状光孔上的夫琅和费衍射可以用同样方式加以研究。如果能够选用曲线坐标，使得一坐标线与孔的边界重合，计算将特别简单。这里我们不能详细讨论其他情况[1]，但是我们将推导一个有用的定理，它说明当光孔沿某一方向均匀拉伸(或压缩)时衍射图样的变化规律，此外我们将讨论屏上包括好多一模一样的光孔时所产生的夫琅和费衍射。

设 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 是两个这样的孔，其中 $\mathscr{A}_2$ 沿某一方向($O\xi$)的尺寸是 $\mathscr{A}_1$ 的 μ 倍。对于 $\mathscr{A}_1$ 上的夫琅和费衍射，可有

$$U_1(p, q) = C \iint_{\mathscr{A}_1} e^{-ik(p\xi+q\eta)} d\xi d\eta. \tag{19}$$

同样，对于 $\mathscr{A}_2$ 上的夫琅和费衍射，

$$U_2(p, q) = C \iint_{\mathscr{A}_2} e^{-ik(p\xi+q\eta)} d\xi d\eta. \tag{20}$$

如果在(20)式中将积分变量(ξ, η)改成(ξ', η')，其中

$$\xi' = \frac{1}{\mu}\xi, \quad \eta' = \eta, \tag{21}$$

则得到

$$U_2(p, q) = \mu C \iint_{\mathscr{A}_1} e^{-ik(\mu p\xi'+q\eta')} d\xi' d\eta' = \mu U_1(\mu p, q). \tag{22}$$

这表明，当孔沿某一方向按比例 $\mu:1$ 均匀拉伸时，则夫琅和费图样在同一方向按比例 $1:\mu$ 收缩，同时新图样上各点的强度是原图样上对应点强度的 μ^2 倍。利用这个结果，我们可以立即例如从圆孔或矩孔的夫琅和费图样，分别确定出椭圆孔或平行四边形孔的夫

---

1) §8.6.2 中在谈到分辨本领问题时将对环孔上的夫琅和费衍射进行简短讨论。

在 J. Scheiner 和 S. Hirayama 的论文中，刊有各种光孔夫琅和费衍射图样的照片，见 *Abh. d. Königl. Akad. Wissensch.*, Berlin (1894), Anhang I. Y. V. Kathavate 发表了各种非涅耳衍射图样的照片，见 *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **21** (1945), 177—210.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

琅和费图样。图 8.14 说明了椭圆孔的情况。

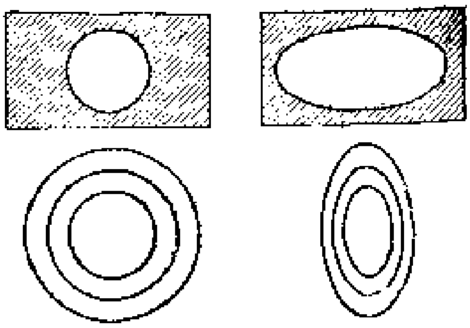


图 8.14 圆孔和椭圆孔夫琅和费衍射的比较

现在我们来讨论重要的衍射情况——屏上包括大量形体相同、取向一致的光孔（按照巴俾涅原理，所得结果将也可应用于互补的障碍物分布）。设 O_1, O_2, $\cdots O_N$ 是一组位置相似的点，每个孔中一个，并设这些点在孔平面上二固定坐标轴中的坐标是 (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), $\cdots$, (ξ_N, η_N)，则夫琅和费衍射图样中的光分布为

$$U(p, q) = C \sum_n \iint_{\mathscr{A}} e^{-ik[(\xi_n+\xi')p+(\eta_n+\eta')q]} d\xi' d\eta'$$

$$= C \sum_n e^{-ik(p\xi_n+q\eta_n)} \iint_{\mathscr{A}} e^{-ik(p\xi'+q\eta')} d\xi' d\eta', \qquad (23)$$

式中积分区是组中任一孔 $\mathscr{A}$。积分表达了单孔的作用，而取和代表了各相干衍射图样的叠加。如果 $I^{(0)}(p, q)$ 是单孔产生的强度分布，则按 (23) 式，总强度为

$$I(p, q) = I^{(0)}(p, q) \left| \sum_n e^{-ik(p\xi_n+q\eta_n)} \right|^2$$

$$= I^{(0)}(p, q) \sum_n \sum_m e^{-ik[p(\xi_n-\xi_m)+q(\eta_n-\eta_m)]}. \qquad (24)$$

最简单的情况是两个孔，这我们在前面 § 7.2 讲述干涉理论时已经讨论过了。不过，那里我们没有考虑 $I^{(0)}$ 对 p 和 q 的依赖关系（即每个孔的衍射效应），而只研究了叠加效应。很容易看出，以前的结果（§ 7.2(17) 式）和 (24) 式是一致的。因为，如 $N = 2$，则 (24) 式化为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\begin{aligned}
I &= I^{(0)}\{2 + e^{-ik[p(\xi_1-\xi_2)+q(\eta_1-\eta_2)]} + e^{-ik[p(\xi_2-\xi_1)+q(\eta_2-\eta_1)]}\} \\
&= 4I^{(0)}\cos^2\frac{1}{2}\delta,
\end{aligned}
$$

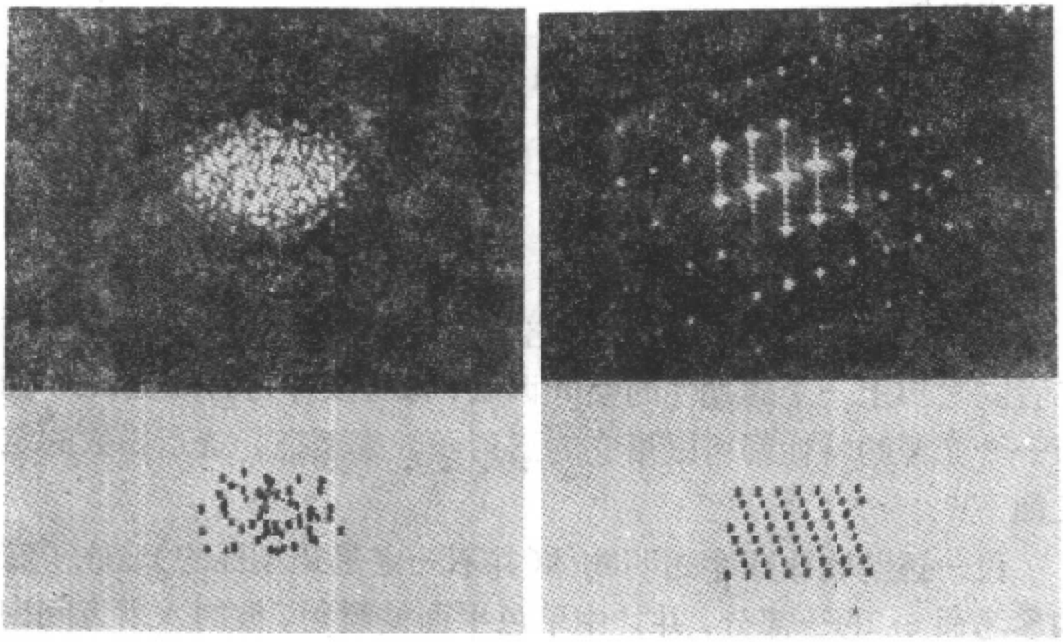
其中

$$
\delta = k[p(\xi_2 - \xi_1) + q(\eta_2 - \eta_1)].
$$

现在我们来讨论大量光孔的效应．我们将看到，孔在屏上有规则分布和无规则分布这两种情况的结果完全不同．

当屏上光孔的分布无规则时，在二重和中，m 和 n 取不同值时，m、n 不相同的那些项将在 $+1$ 和 -1 之间很快地起落，结果这些项的和为零．其余各项 $(m=n)$ 均为 1．由此可知，除局部涨落外[1]，总强度是单孔衍射光强度的 N 倍：

$$
I(p,q) \sim NI^{(0)}(p,q). \tag{25}
$$



(a)　　　　(b)

图 8.15　平面屏上 56 个体形相同、取向一致的光孔的夫琅和费衍射图样
(a) 无规则分布；　(b) 规则分布．　光孔的形状和分布列于各图下方．
光：汞黄光，$\lambda = 5790$ 埃

(引自 H. Lipson, C. A. Taylor, and B. J. Thompson)

---

1) 如果孔的形状不一样，但是分布是有规则的，或者服从某种统计规律，则涨落类型有所不同(参见 M. V. Laue, *Berl. Ber.*, (1914), 1144)．在液体 X 射线衍射方面观察到了类似的效应(参见 J. A. Prins, *Naturwiss*, **19** (1931), 435.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这种衍射效应是很容易观察到的，更常见的是它的互补效应(从巴俾涅原理的意义上说)．例如，用一块玻璃板，沾以石松粉，或涂以形状和大小都相同的其他微粒，执于远处来光之中，即可看到这一效应．将一片锡箔用针乱扎上许多小孔，也可作为上述类型的衍射屏．

当光孔的分布有规则时，结果完全不同．因为这时对于某些 p、q 值，$m \neq n$ 的项可以有显著的贡献．例如，如果 O_1，O_2，$\cdots O_N$ 这些点的位置使得对于某些 p、q 值，所有 $m \neq n$ 的项的位相都是 2π 的整数倍，它们的和将等于 $N(N-1)$，因而当 N 很大时，它将接近 N^2．强度在某些特殊方向上的这种巨大增加，在图 8.15 中可以清楚地见到．下一节我们将看到，这一效应具有非常重要的实用价值．

§8.6　光学仪器中的夫琅和费衍射

§8.6.1　衍射光栅

(a) 衍射光栅原理

任何一种装置或结构，只要它能给入射光的振幅或位相，或者二者同时加上一个周期性的空间调制，都可以称为衍射光栅．任何一个光栅的特性都可以用它的透射函数来表征，透射函数的定义如下：

设一透明物体或半透明物体(并不一定是周期性的)遮住了虚构参考面 $\xi\eta$ 的一部分，并且由单色平面波照射，波的入射方向由方向余弦 l_0，m_0 标定．图 8.16 示出这一结构大意，η 轴系垂直于纸面．假如物体不存在，$\xi\eta$ 平面上的扰动应由函数 $V_0(\xi,\eta)=A\exp\{ik(l_0\xi+m_0\eta)\}$ 来表示．象往常一样，这里略去了因子 $\exp(-i\omega t)$．由于物体的存在，这扰动将受到调制，并可用某一其它函数 $V(\xi,\eta)$ 来表示．物体的透射函数则定义为

$$F(\xi,\eta)=\frac{V(\xi,\eta)}{V_0(\xi,\eta)}. \tag{1}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

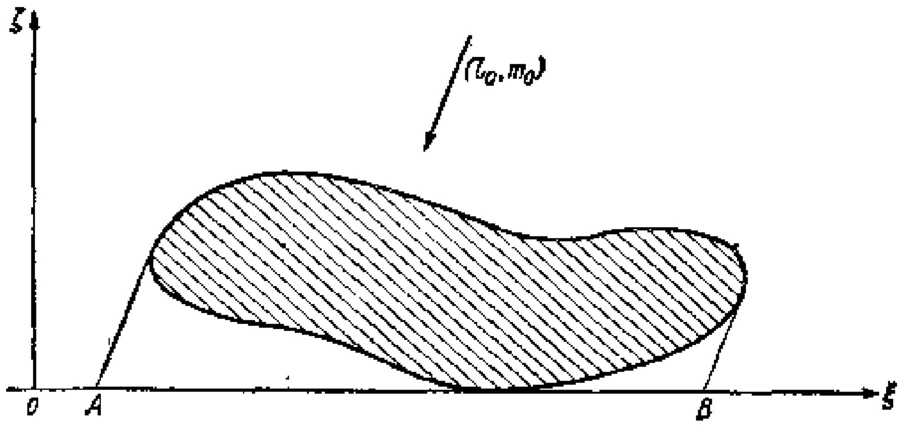


图 8.16 透射函数的定义

当然，一般，F 不仅依赖于 ξ 和 η，而且还和照射方向 (l_0, m_0) 有关．透射函数一般是复数，因为光通过物体时，其振幅和位相都可能改变．在特别情况下，当物体只改变入射波的振幅，而不改变它的位相时（即 F 的幅角 $= 0$），我们称它为幅物体；如果只改变位相，而不改变振幅（即 $|F| = 1$），我们就称它为相物体．

如果我们讨论的是物体的反射光而不是物体的透射光，则采用反射函数一词更为恰当，它可用同样方式来定义，唯一差别是这时参考面和入射光在物体的同一侧．

对于物体几何投影区（其边界在图 8.16 中由 A 点和 B 点表示）外边的那些点，$|V/V_0|$ 实际上为 1．如果用一不透明屏遮住阴影区以外的部分，则这装置就成为一个光瞳函数不是常数的衍射孔 $\mathscr{A}$（参见 §8.3(39) 式）．如果 $\mathscr{A}$ 的线度比波长大得多，而且在线度与波长同数量级的地区内，F 相应保持不变，则衍射公式 §8.3(23) 式在同前条件下仍然有效，只要将衍射积分的被积函数乘以 F 即可．

现在让我们分析一种一维光栅，它由 N 条平行刻线构成，刻线断面形状可任意，刻在一块平行平面玻璃板的一个表面上．设 $\xi\eta$ 面与板的平表面重合，η 是刻线方向，并设 d 是 ξ 方向上的周期（见图 8.17）．

假定光栅入射波的传播方向在图平面上，与 $O\zeta$ 成 θ_0 角，并设 θ 代表极远观察点 P 至光栅连线与 $O\zeta$ 的夹角．同前，令 $l_0 = \sin\theta_0$，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

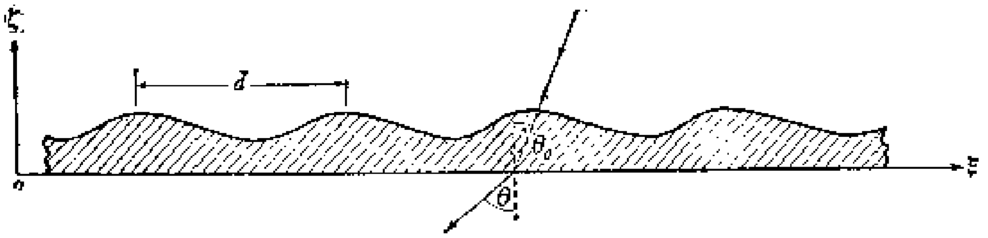


图 8.17 衍射光栅理论图示

$l = \sin\theta$, $p = l - l_0 = \sin\theta - \sin\theta_0$. 于是，由 §8.5(23) 式，将其中被积函数乘以一个周期单元的透射函数 F，即可得到 P 点的复振幅. 我们可以令 $q = 0$,

$$\xi_n = nd, \quad \eta_n = 0, \quad (n = 0, 1, \cdots N - 1). \tag{2}$$

于是得到

$$U(p) = U^{(0)}(p) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-iknd p} = U^{(0)}(p) \frac{1 - e^{-iNkdp}}{1 - e^{-ikdp}}, \tag{3}$$

式中[1]

$$U^{(0)}(p) = C \int_{\mathscr{A}} F(\xi) e^{-ikp\xi} d\xi. \tag{4}$$

因此

$$I(p) = |U(p)|^2 = \frac{(1 - e^{-iNkdp})}{(1 - e^{-ikdp})} \cdot \frac{(1 - e^{iNkdp})}{(1 - e^{ikdp})} |U^{(0)}(p)|^2$$

$$= \frac{1 - \cos Nkdp}{1 - \cos kdp} I^{(0)}(p), \tag{5}$$

式中 $I^{(0)}(p) = |U^{(0)}(p)|^2$. 如果我们引入函数

$$H(N, x) = \left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2, \tag{6}$$

则强度公式 (5) 可写成为

$$I(p) = H\left(N, \frac{kdp}{2}\right) I^{(0)}(p). \tag{5a}$$

在讨论这个基本公式的含义之前，可以注意，按照 (3) 式，这

---

1) 因为 F 依赖于 l_0，所以这里 $U^{(0)}$ 和 $I^{(0)}$ 这两个量依赖于 l 和 l_0，而不是只依赖于它们的差 $l - l_0$. 由于我们只讨论入射方向固定时的效应，因而我们可以将 l_0 看作为常数而保留以前的符号.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光分布等同于这样一组相干次级光源产生的分布，它们的振幅函数都是 $|U^{(0)}(p)|$，而位相差为 kdp 的整数倍．为了搞清楚这个位相差的意义，我们考虑光栅上相邻刻线的两个对应点 A 和 B（图 8.18）．因为光栅的作用是给入射波加上一个周期性的空间调制，所以到达 A、B 两点的光，其程差和没有光栅时一样，即等于 $AK = d\sin\theta_0$，K 是从 B 点到 A 点入射光线的垂足．此外，在 θ 方向上，B 点的来光比 A 点的来光光程大 $BL = d\sin\theta$，L 是从 A 点到 B 点衍射光线（沿 θ 方向的）的垂足．因此，从相邻两条刻线的对应点到达遥远观察点的光，其总程差是

$$BL - AK = d(\sin\theta - \sin\theta_0) = dp, \qquad (7)$$

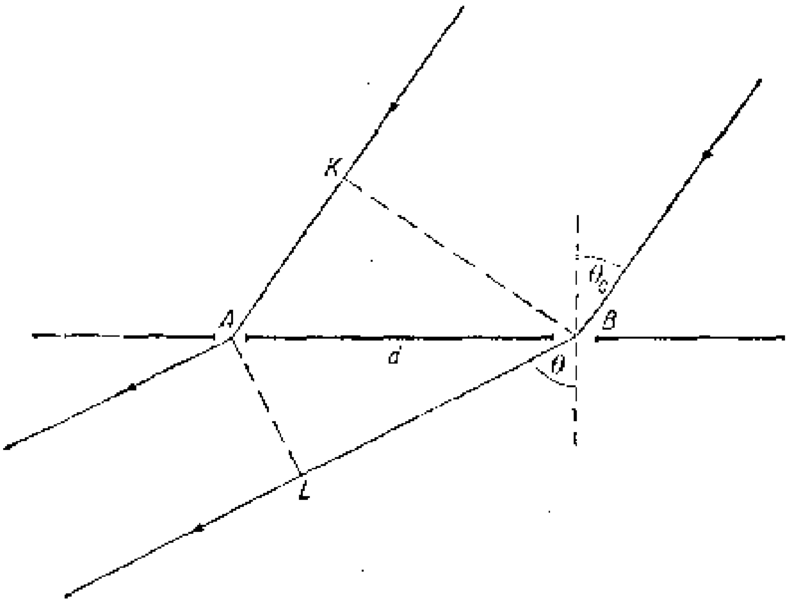


图 8.18　衍射光栅理论图示

而相应的位相差就是 $2\pi dp/\lambda = kdp$．

公式（5a）将 $I(p)$ 表成为两个函数之积，其中函数 $I^{(0)}$ 代表光栅单个周期的作用，而函数 H 代表不同周期来光的干涉效应．函数 $H(N, x)$ 在分母 $\sin^2 x$ 为零，即 x 为零或 π 整数倍的所有点上各有一极大值，高度均为 N^2．因此，当

$$p \equiv \sin\theta - \sin\theta_0 = \frac{m\lambda}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (8)$$

时，$H(N, kdp/2)$ 各有一高度为 N^2 的极大值．按照（7）式，整数

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

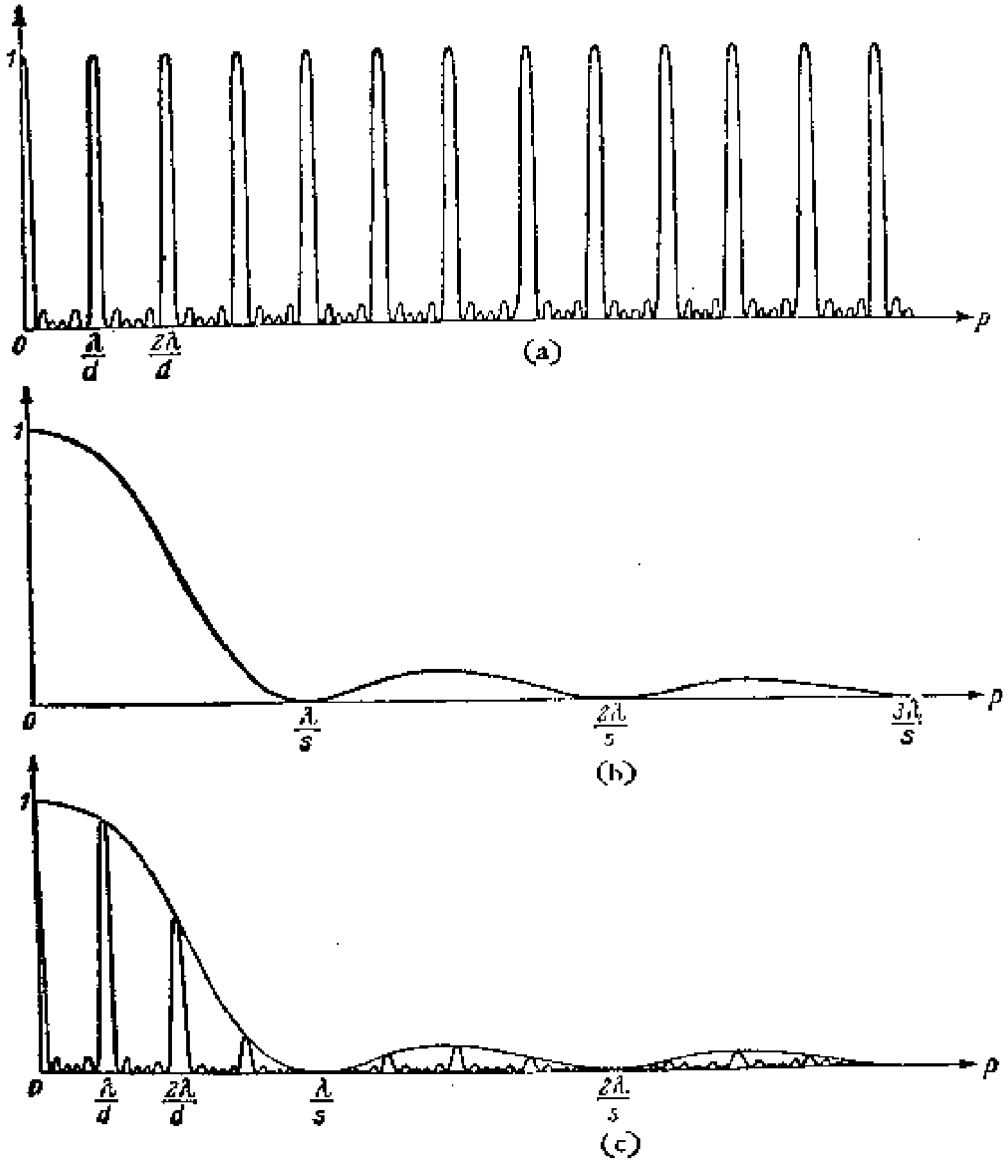


图 8.19

(a) 归一化干涉函数

$$\frac{1}{N^2}H(N,\ kdp/2)=\left[\frac{\sin\ (Nkdp/2)}{N\sin\ (kdp/2)}\right]^2.$$

(b) 一条缝的归一化强度函数

$$I^0(p)=\left[\frac{\sin\ ksp/2}{ksp/2}\right]^2.$$

(c) N条同样的等距平行狭缝组成的光栅的归一化强度函数

$$\frac{1}{N^2}I(p)=\left[\frac{\sin\ (Nkdp/2)}{N\sin\ (kdp/2)}\right]^2\left[\frac{\sin\ ksp/2}{ksp/2}\right]^2.$$

只画出了 $p\geqslant 0$ 范围，所有曲线都对垂直轴 $p=0$ 对称

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

m 代表以波长计量时，从相邻两条刻线对应点衍射到极大值方向的两条光线之间的程差．为了和我们早先的定义（§ 7.3.1）一致，我们称 m 为干涉序．在这些主极大之间，还有许多弱的次极大（见图 8.19(a)）．当 N 很大时，第一个次极大的强度只有主极大的百分之几．每两个极大之间有一个强度为零的点，在 $x=kdp/2=\pm n\pi/N$ 处，即在下式所规定的方向上：

$$p = \sin\theta - \sin\theta_0 = \frac{n\lambda}{Nd}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{9}$$

其中 n/N 为整数的情况要除掉．

函数 $I^{(0)}(p)$ 与刻线的形状有关．假设它在某方向 $p = p'$ 有一主极大，并且在这极大两边，它比 H 下降得缓慢．这时，$I(p)$ 的形状将和干涉函数 H 大体相同，但为 $I^{(0)}$ 所"调制"．这样，$I(p)$ 在靠近 $p = m\lambda/d$ 这些方向，仍将具有相当锐的极大．因为这些方向（$m = 0$ 时除外）与波长有关，可见，光栅将把一束非单色光分解成各光谱序．

为了说明上述各点，让我们举一种光栅，它由不透明屏上 N 条等距长狭缝组成（图 8.20），各缝的宽度为 s，长度为 L．如果用一个很远的平行于各缝的线光源来照射这个光栅，则强度 $I^{(0)}$ 由§8.5 (4) 式给出（令 $2a = s$，$2b = L$），因而

$$I(p) = \frac{sE}{\lambda}\left(\frac{\sin\dfrac{Nkdp}{2}}{\sin\dfrac{kdp}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\dfrac{ksp}{2}}{\dfrac{ksp}{2}}\right)^2. \tag{10}$$

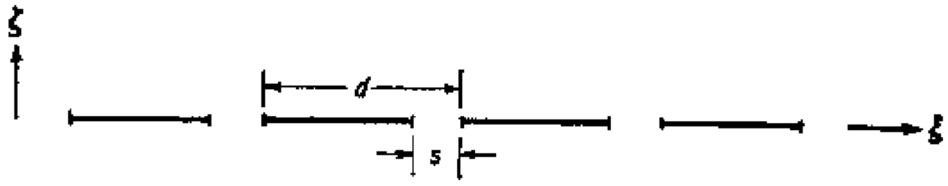


图 8.20　简单线光栅的断面

图 8.19 的三条曲线分别代表（10）式中的两个因子和它们的乘积．后一个因子代表单缝的作用，它在 $p = 0$ 处有一主极大，而在 $ksp/2 = n\pi$ 即

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$p = \frac{n\lambda}{s} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{11}$$

处各有一极小，极小之间隔有弱的次极大。我们看到，如果 $\lambda/s \gg \lambda/d$，即如果每个缝的宽度比 d 小得多，则强度 $I(p)$ 除在 $p=0$ 处有一主极大以外，在它两边靠近(8)式所规定的那些方向，还有一系列锐的极大，但强度逐个减弱。

现在再回到一般情况。显然，如果各刻线的宽度非常小，只有一个波长左右（实际情况常是如此），则根据基尔霍夫近似推导出的公式(4)不再能期望成立。在这种情况下，必须进行更加细致的分析才能确定详细的强度分布。然而，可以预料，即使当刻线非常窄时，只要单个周期的强度函数在 $\Delta p = \lambda/d$ 量级的间隔内变化很慢，我们基础理论所指出的那些主要性质特征仍将保留，即仍存在锐的极大，它们的位置实际上仍由干涉函数 H 来决定。

现在让我们看看一个光栅可能达到的分辨本领。按照(9)式，m 序主极大和相邻极小的间隔是

$$\Delta p = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{12}$$

按照(8)式，当波长改变 $\Delta\lambda$ 时，m 序极大将位移

$$\Delta' p = \frac{|m|}{d}\Delta\lambda. \tag{13}$$

假定当波长 $\lambda + \frac{1}{2}\Delta\lambda$ 的极大和波长 $\lambda - \frac{1}{2}\Delta\lambda$ 的第一极小相重合时，它们的谱线刚刚能被分辨开（参见435页），则对于 m 序的分辨极限，有 $\Delta p = \Delta' p$，即

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = |m|N. \tag{14}$$

这样，分辨本领等于序数 m 和刻线数 N 之积。对于第 m 序，按照(8)式，有 $d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$，因而也可将分辨本领表成如下形式：

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Nd|\sin\theta - \sin\theta_0|}{\lambda}. \tag{14a}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

从(7)式看来，这就意味着，光栅的分辨本领等于以波长计量时，从光栅两端（相距为 Nd）衍射到 θ 方向的两条光线之间的程差．须注意，因为 $|\sin\theta - \sin\theta_0|$ 不能超过 2，所以一个全宽为 w 的光栅，它能达到的分辨本领决不会超过 $2w/\lambda$.

让我们举一个例题来说明公式(14)：设于可见光谱区中心附近，有两条谱线相隔十分之一埃，试求光栅分开这两条谱线所需的刻线数．这时，$\lambda \sim 5500$ 埃，$\Delta\lambda = 10^{-1}$ 埃，如果我们用第二序($m = 2$)观测，则按公式(14)，必须 $N \gtrsim 5.5 \times 10^3/2 \times 10^{-1} = 27500$，即光栅刻线至少要 27500 条．

为了进行比较，让我们看看一个棱镜处在最小偏向角位置时的分辨本领，设线光源（摄谱仪狭缝）和棱镜的 A 棱平行（见图 4.28）．当一束平行光线射到这棱镜上时，它将在宽度为 $l_1 = l_2$ 的矩孔上产生衍射．按照 § 8.5(2) 式，第一个强度极小离狭缝几何象的角距离（假定它很小）为

$$p = \frac{\lambda}{l_1}. \tag{15}$$

根据 §4.7(36) 式，当波长改变 $\Delta\lambda$ 时，角色散相应改变

$$\Delta\varepsilon = \frac{t}{l_1}\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda, \tag{16}$$

式中 t 是边缘光线之一从棱镜通过的最大宽度，而 n 是棱镜材料的折射率．因为在分辨极限时，$p \sim \Delta\varepsilon$，故棱镜的分辨本领为

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = t\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|. \tag{17}$$

方程(17)表明，当玻璃给定时，一个棱镜的分辨本领仅仅依赖于光线所通过的那段棱镜的最大宽度；特别是，分辨本领与棱镜角无关．作为一个例子，设棱镜底边长度等于 5 厘米，棱镜材料为重火石玻璃，在波长 $\lambda = 5500$ 埃处，其色散 $dn/d\lambda \sim 1000$ 厘米$^{-1}$．如果这棱镜被光完全充满，则按(17)式，$\Delta\lambda \sim 5.5 \times 10^{-5}$ 厘米$/5 \times 10^3 = 1.1$ 埃，即在可见区中心附近，它能分开相隔不小于 1.1 埃的两条谱线．由此可见，这样大小的棱镜和上述 27500 条刻线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光栅相比，分辨本领要小10倍.

以上我们只讨论了一维光栅，但是这分析可以很容易推广到二维或三维周期结构的衍射体. 二维光栅(称为交叉光栅)还没有什么实际应用，虽然它们的效应常可见到，例如通过一细织物件(如手帕)去看一个亮光源. 相反，三维光栅的理论则非常重要，因为原子在晶体中的规则排列就形成这种光栅. 晶格距离(相邻原子的距离)是1埃(10^{-8}厘米)左右，这也是X射线波长的数量级. 因此，使一束X射线通过晶体，可产生衍射图样，而且从分析这些图样，可以了解晶体的结构[1]. 1912年，冯莱夫(M. von Laue)[2]预见到了晶体对X射线的衍射效应，后来弗里德里克(W. Friedrich)和尼平(P. Knipping)首先观察到了这种现象.

类光栅结构的另一个例子是液体中的超声波. 超声波是由压电振荡器产生的弹性波，它和普通声波的区别仅在于频率已大大超过听觉上限. 这种波使液体中产生稀疏和密集，它们对入射光的作用就象一个光栅. 这种现象的理论在第十二章中讨论. 本节以下部分将只讨论光谱学工作中所用的各种一维光栅.

(b) 光栅的类型[3]

1785年，里顿豪斯(D. Rittenhouse)[4]发现了衍射光栅的原理，但是这个发现实际上没有引起人们注意. 1879年，夫琅和费重新发

---

1) 例如，见 M. von Laue, *Röntgenstral-Interferenzen*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft 2 Aufl. (1948); 或 *The Crystalline State*, ed. Sir L. Bragg (London, Bell and Sons), Vol. I, W. L. Bragg, *A General Survey* (1933); Vol. II, R. W. James, *The Optical Principles of the Diffration of X-rays* (1948); Vol. III, H. Lipson and W. Cochran, *The Determination of Crystal Structures* (1953).

2) W. Friedrich, P. Knipping and M. von Laue, *Münchener Sitzungsber.*, 1912, p. 303; *Ann. d. Physik*, (4), **61** (1913), 971.

3) 关于光栅的制作方法和发展，比较详细的叙述见 G. R. Harrison, J. Opt. Soc. Amer., **39** (1949), 413.

4) D. Rittenhouse, *Trans. Amer. Phil. Soc.*, **2** (1786), 201. 又见 T. D. Cope 论文, *Journ. Franklin Inst.*, **214** (1932), 99.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现了这个原理[1]. 夫琅和费的头几个光栅是用很细的金属丝绕在两个平行螺丝之间做成. 由于这种绕线光栅制作比较容易，因而时至今日亦间有使用，特别是在长波(红外)范围. 后来，夫琅和费借助机器在玻璃板面的金淀积膜上刻制光栅；此外，他还用金刚石作为刻尖，直接在玻璃面上进行刻线.

罗兰(H. A. Rowland)[2]使光栅制备技术取得了重大进展，他制造了几台性能优良的刻线机，并且还发明了所谓凹面光栅(在538—541页讨论). 罗兰的机器能够刻4吋高6吋宽的光栅，他第一台机器每吋能刻大约14000条线，因而使分辨本领超过了150000. 后来，迈克耳孙刻了更大的光栅，宽度大大超过6吋，分辨本领接近400000.

早期的光栅大多刻在镜齐金属和玻璃上，但是近代的工艺是在铝蒸发层上刻线. 因为铝是一种软金属，它对刻尖(金刚石)的损害较小，而且在紫外区反射还比较好.

一个理想的光栅，它的全部刻线应该严格平行而且形状同一，但是实际上自然要发生误差. 完全无规则的误差会使光谱变模糊，但这种误差不像系统误差，如间距的周期误差那样严重. 这些系统误差造成光谱中的伪线. 它们同真线常常能区分开，只是很困难.

在光谱学应用中，高分辨本领并不永远是唯一重要的要求. 当只有很少能量可予利用时，例如对于弱星光谱或星云光谱的研究，或者红外光谱区的工作，更重要的则是将尽可能多的光衍射到某一特定的序中. 此外，对于精密的波长测量，就必须采用高色散的光栅. 按照(8)式，当入射角固定时，角色散为

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{m}{d}, \tag{18}$$

1) J. Fraunhofer, *Denkschr. Akad. Wiss. München*, **8** (1821—1822), 1. *Ann. d. Physik.*, **74** (1823), 337. Reprinted in his collected works (Munich, 1888), 51, 117.

2) H. A. Rowland, *Phil. Mag.* (5), **13** (1882), 469. *Nature*, **26** (1882), 211, *Phil. Mag.*, **16** (1883), 297.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以,要获得高的色散,间距 d 应该很小,或者须在高序(m 很大)进行观测.然而,如果光栅是由一系列不透明的和透明的(或反射的)长条所组成,则只有一小部分入射光被投到任何一序中. 为了克服这个缺点,近代加工把光栅线槽刻成特定的形状.有一种光栅,其线槽形状如图8.21所示,采用这种刻线光栅,可使光大部分集中到中心像一边某一、二个序中. 这种类型的光栅,刻线相当粗,叫做**小阶梯光栅**,因为它们可以看作是介乎老式光栅和后面讨论的所谓**阶梯光栅**之间的一种型式.小阶梯光栅是伍德(R. W. Wood)[1]首先刻制的,他用特选金刚砂晶体的天然棱边作为刻尖,在铜板上刻成这种光栅.后来,人们将金刚石棱边磨成所需形状,用来刻制.这种光栅每吋有 2000—3000 条刻线,当用于可见光时,可将很大一部分光送到第 15 序或第 30 序附近的光谱群中.在红外光谱学中,小阶梯光栅具有重大价值.

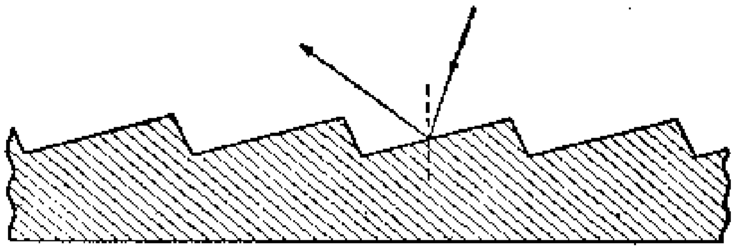


图 8.21 线槽形状特定的反射光栅

近来,对于刻线间距很小的光栅,也已研究出一些方法来控制线槽形状[2]. 人们称之为**闪烁光栅**,它们的线槽形状和小阶梯光栅的相似,但是最强光谱所在的序却低得多(通常是第 1 序或第 2 序).

看来,这类光栅的分辨本领,由于制作工艺所限,最高不能超过大约 400000. 某些应用,例如研究塞曼效应、超精细结构和同

1) R. W. Wood, *Phil. Mag.*, **20** (1910), 770; *Ibid*. **23** (1912), 310; A. Trowbridge and R. W. Wood, *ibid*, **20** (1910), 886, 898.

2) R. W. Wood, *Nature*, **140** (1937), 723; *J. Opt. Soc. Amer.*, **34** (1944), 509; H. Babcock, **34** (1944), 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

位素结构，需要分辨本领高于此值．为了获得如此高的分辨本领，哈里森（G. R. Harrison）[1]设计了所谓中阶梯光栅，它的线槽宽而浅，在大于45°的入射角下使用，入射光要垂直于阶梯的窄边．这种光栅的工作序比较高（$m\sim 1000$）．一个10吋的中阶梯光栅，每吋有100条刻线并且用于第1000序观测时，分辨本领为1000000[2]．

因为制作高质量的光栅非常困难，所以人们常常采用原刻物的复制品[3]．这种复制品是从原刻母光栅上套模下来的．

最后，我们须要谈谈一种结构完全不同的"光栅"，即迈克耳孙所发明的阶梯光栅[4]．它由一组完全一样的平行平面玻璃板排成阶梯而构成（因此得名），形状如图8.22所示．每个阶使通过它的光束所产生的滞后，相对于其邻阶来说，大小都是一样的．因为各阶的宽度比波长大得多，衍射效应被限制在很小的角度范围，所以光绝大部分集中在方向$\theta=0$附近某一、两个光谱序中，而且其序数非常高，因为相邻光束的光程差达很多个波长．

阶梯光栅的分辨本领不仅依赖于光栅两端光线的光程差，而

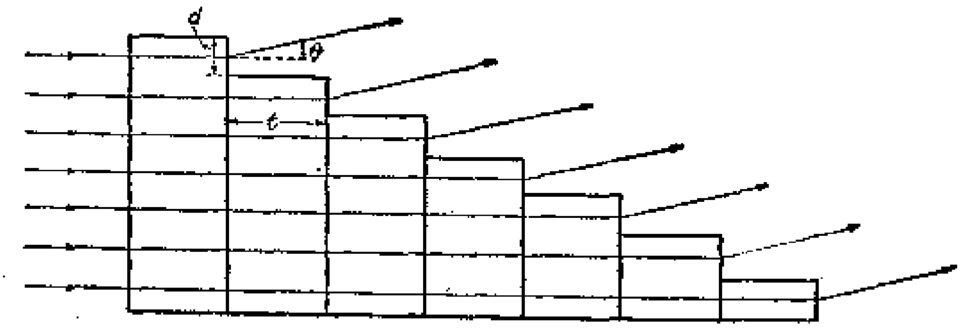


图8.22　迈克耳孙阶梯光栅

1) G. R. Harrison, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39** (1949), 522.

2) 关于高分辨光栅理论和制作的评论，见G. W. Stroke, *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), 1.

3) 头几个复制品是T. Thorp制造的，见*British Patent* No. 11460 (1899)；后来R. J. Wallace [*Astrophys. J.*, **22** (1905), 123; *Ibid.*, **23** (1906), 96.]也进行了制造．T. Merton, *Proc. Roy. Soc.* A, **201** (1950), 187介绍了改进的方法．

4) A. A. Michelson, *Astrophys. J.*, **8** (1898), 37; *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.*, **35** (1899), 109.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

且依赖于(虽然程度差得多)光栅玻璃的色散. 设 n 是折射率, t 是每个阶的厚度, d 是其宽度(见图 8.22), 则相邻二阶衍射光线的光程差显然是 $pd+(n-1)t$, 其中假定 p 很小. 因此主极大位置由下式给出:

$$pd+(n-1)t=m\lambda, \quad (m=0,1,2,\cdots). \tag{19}$$

当波长改变 $\Delta\lambda$ 时, 第 m 序极大将位移

$$\Delta'p=\left|m-t\frac{dn}{d\lambda}\right|\frac{\Delta\lambda}{d}. \tag{20}$$

m 序主极大和相邻极小的间隔 Δp 仍由(12)式给出, 所以从分辨极限条件 $\Delta p=\Delta'p$ 得到

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=N\left|m-\frac{dn}{d\lambda}t\right|. \tag{21}$$

式中 m 可以用(19)式的近似值 $(n-1)t/\lambda$ 代替(略去其中 pd/λ 项), 因为具有显著强度的 p 值范围约为 λ/d, 即 pd 的量级为 1 个波长, 而 $(n-1)t$ 的量级为数千波长. 这样, 我们得到阶梯光栅分辨本领的表达式如下:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\sim N\left|\frac{n-1}{\lambda}-\frac{dn}{d\lambda}\right|t. \tag{22}$$

比值 $\dfrac{dn}{d\lambda}\Big/\dfrac{n-1}{\lambda}$ 是很小的. 对于火石玻璃, 在可见区中心附近, 此值在 -0.05—-0.1 左右. 因此, 在这种情况下, 一个阶梯光栅的分辨本领, 比一个线光栅(有 N 条刻线, 也在 $m=(n-1)t/\lambda$ 序进行观测)的分辨本领高大约 5—10%. 例如, 一个迈克耳孙阶梯光栅由 20 块板组成, 每块厚度 $t=18$ 毫米, 每阶宽度 d 约 1 毫米. 若取 $n=1.5$, 则相邻光束的光程差(以绿光波长 $\lambda=5\times10^{-5}$ 厘米计量时)为 $m\sim0.5\times1.8/5\times10^{-5}\sim20000$. 假定 $\dfrac{dn}{d\lambda}\Big/\dfrac{n-1}{\lambda}=-0.1$, 则此阶梯光栅的分辨本领约为 $20\times(20000+0.1\times20000)=440000$.

更重要的是**反射阶梯光栅**. 这里, 每个阶都镀有金属膜, 反射很高, 所观测的是反射光形成的光谱. 反射阶梯光栅和同样尺寸

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的透射阶梯光栅相比，分辨本领要大 3—4 倍，因为这时每阶在相邻光束之间造成的光程差是 $2t$ 而不是 $(n-1)t\sim t/2$. 像中阶梯光栅一样，反射阶梯光栅的分辨本领可超过一百万. 反射阶梯光栅超过透射阶梯光栅的另一个优点是，它可以用在玻璃有吸收的紫外光谱区. 虽然当时迈克耳孙知道，使阶梯光栅采用反射光，可获益甚多，但是技术上的困难使得反射阶梯光栅的制造长期不能过关近 30 年之久，一直到威廉斯 (W. E. Williams)[1] 才予以解决. 由于将许多厚度相同的板在很窄的容许公差范围内装配在一起有困难，阶数实际限制在 40 左右.

最后有必要略谈一谈序的交叠问题. 仅以可见区为例，即考虑 $\lambda_1=0.4$ 微米到 $\lambda_2=0.75$ 微米的波长范围. 这时可以看出，第一序光谱和第二序光谱之间还有空隙，因为第一序光谱所跨的范围从 $p=\lambda_1/d$ 到 $p=\lambda_2/d=0.75\lambda_1/0.4d=1.8\lambda_1/d$，而第二序光谱从 $p=2\lambda_1/d$ 才开始. 相反，第二序光谱和第三序光谱发生部分交叠，第二序从 $p=2\lambda_1/d$ 到 $p=2\lambda_2/d=2\times1.8\lambda_1/d$，而第三序在 $3\lambda_1/d$ 已经开始. 当序增加时，邻序光谱交叠得越来越多(见图 8.23). 如果波长 λ 的第 $m+1$ 序谱线和波长 $\lambda+\delta\lambda$ 的第 m 序谱线重合在一起，则

$$(m+1)\lambda=m(\lambda+\delta\lambda),$$

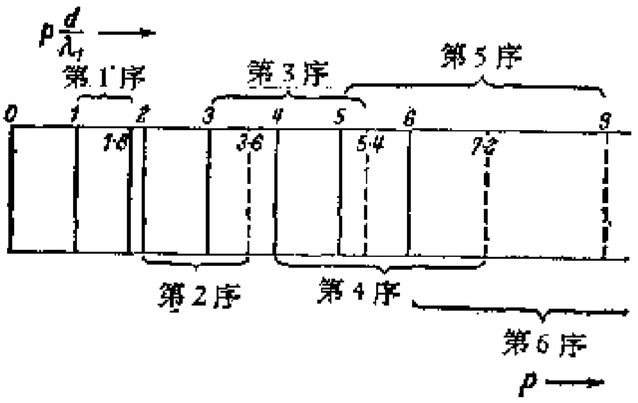


图 8.23 光栅光谱的交叠

1) W. E. Williams, *British Patent*, 312534 (1926); *Proc. Opt. Conv.*, **2** (1926), 982; *Proc. Phys. Soc.*, **45** (1933), 699.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

即

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{1}{m}. \tag{23}$$

这样，"自由光谱范围"与序数成反比.

序的重叠以前在所谓重合法（参见443页）中用来比较波长；这一方法已被简单的内插法所取代，内插用的标准波长由干涉量度法测定.

最后让我们总结一下各类光栅的主要特征. 回想一下，根据(14)式，要获得高分辨本领，可令周期数很大而序数较低，或令周期数适中而序数很高. 普通刻线光栅代表低序一端（$m\sim1$到5），而阶梯光栅代表高序一端（$m\sim20000$）. 中间是小阶梯光栅（$m\sim15$到30）和中阶梯光栅（$m\sim1000$）. 对于一些特殊应用，必须记住角色散与光谱序成正比，与周期成反比，而自由光谱范围与序数成反比.

(c) 光栅摄谱仪

在光栅摄谱仪中，光栅将入射光分解成不同的光谱序，在每个序中产生狭缝光源的各个色象. 图8.24示出一种简单装置. 狭缝光源S在透镜L的焦平面上，光从S发出，经L变为平行，射到反射光栅G上，被衍射后，在望远镜T的焦平面F上形成S的各个像. 这种装置的一种改进形式如图8.25所示，通常称为利托(Littrow)装置，它的优点是体积紧凑. 这是一种自准直设计，它只需要一个透镜. 狭缝紧挨着照相底版下面，透镜靠近光栅，光栅可相对入射光束方向转动一个指定的角度.

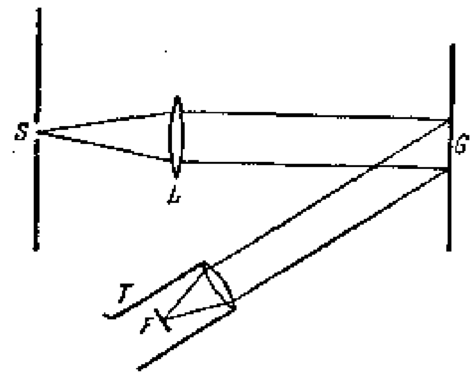


图 8.24　光栅摄谱仪

为了避免用透镜聚焦时对衍射光线所造成的光损失，罗兰引进了凹面光栅. 这种光栅是刻在一个凹的高反射金属面（即凹面

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

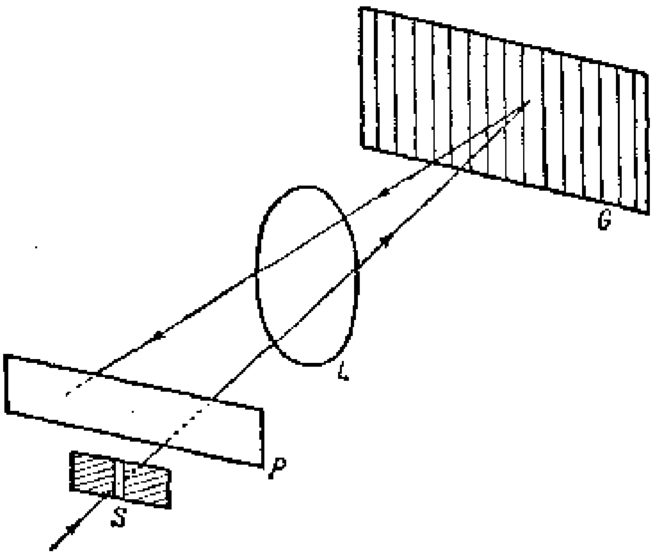


图 8.25　光栅摄谱仪：利托装置

反射镜)上，各刻线在镜面某弦上的投影是等距的．从简单的几何定理可以知道狭缝和观察面相对光栅的可能位置：

设 Q 是光栅面的中点，C 是它的曲率中心，并以 QC 中点 O 为圆心，以 $r=OQ=OC$ 为半径作一个圆 K(图 8.26)．现在我们来证明，从圆 K 上任一点 S 来的光将近似地被反射到圆上另一点 P，同时被衍射到圆上另一些点 P', P'', …，这些点分别是各序衍射光线的焦点．为证明此点，作和入射光线 SQ 对应的反射光线 QP．设 $\alpha=\angle SQC$ 是入射角，则反射角 $\angle CQP$ 也等于 α，而且弧 SC 等于弧 CP．现在再来看从 S 入射到光栅上另一点 R 的一条光线．如果圆的直径足够大(实际一般为几呎)，假定 R 在圆 K 上就不致有多大误差．由于 C 是光栅的曲率中心，因而入射角 $\angle SRC$ 以及反射角仍然等于 α．此外，由于弧 CP 等于弧 SC，故可知 R 点的反射光线仍通过 P．

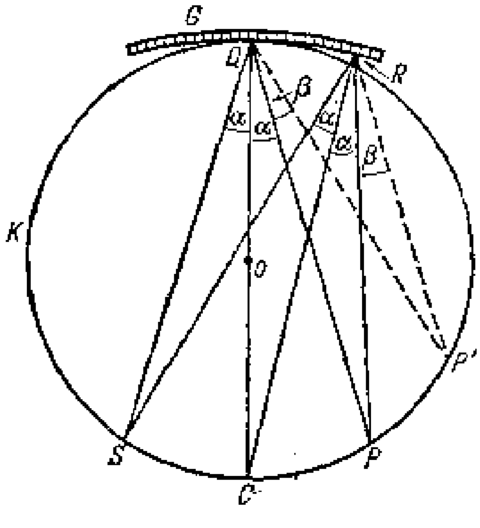


图 8.26　凹面光栅的聚焦作用
(罗兰圆)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

对衍射光线可采用同样的论证．设 β 是 Q 点某一衍射光线与 QP 的夹角．R 点相应同序衍射光线与 RP 的夹角将也是 β．因此，Q 点这条衍射光线与 SQ 的夹角，和 R 点这条衍射光线与 SR 的夹角相同，都是 $2\alpha+\beta$．所以这两条衍射光线相交于圆 K 上一点 P'．由此可见，要得到很锐的线，狭缝、光栅和观察面（照相底版）三者应位于同一圆周上，其直径应等于凹面光栅的曲率半径．

有几种装置都是根据这一原理设计的．罗兰本人所采用的装置如图 8.27 所示．其中光栅 G 和底版架 P 固定在一根可动横梁的两端，梁的长度等于光栅的曲率半径．横梁两端可沿互成直角的两个固定导轨自由滑动．狭缝 S 装在导轨交点的紧上方，使垂直射到狭缝上的光可沿 SG 前进．这样，狭缝就位于以 PG 为直径的罗兰圆上，而底版上所接收到的光谱的序数取决于梁的位置．

另一种装置如图 8.28 所示，它避免使用可动部件．其中圆形钢轨系作为罗兰圆，狭缝 S 和光栅 G 都固定在圆钢轨上．环绕钢轨安装有一排底版架 $P_0,P_1,P_{-1},\cdots$，因而可同时拍摄几个序的光谱．这种装置叫做帕邢（F. Paschen）装置，它还具有稳定性高的优点．

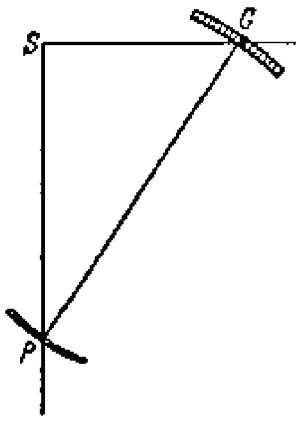


图 8.27　凹面光栅的罗兰装置

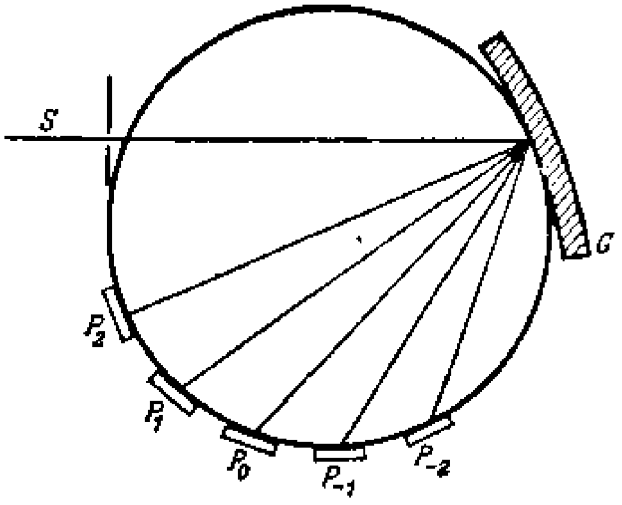


图 8.28　凹面光栅的帕邢装置

伊格耳（A. Eagle）提出了另一种装置，它和平面光栅的利托装置一样，具有体积紧凑的优点．其中狭缝装在底版架中心的紧上方或紧下方（图 8.29），也可装在边上而借助一小反射面将光投

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

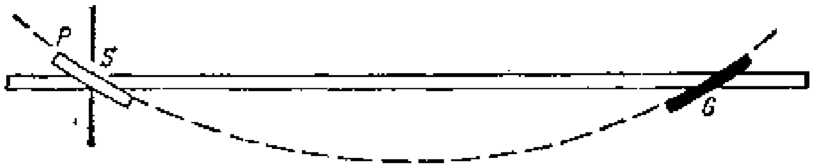


图 8.29　凹面光栅的伊格尔装置

到所需方向．要观测光谱的不同部分，须将底版和光栅沿相反方向转动同一角度，并改变二者距离，使它们和罗兰圆总保持相切．所观测的光谱从光栅上衍射回来的角度几乎等于入射角．如果要这个装置是严格自准直的，狭缝 S 应在底版中心．

凹面光栅所产生的光谱线，和凹面反射镜成象有同样的象差，主要是象散．然而，如果在平行光下来使用凹面光栅，则可使光栅法线方向上象散为零，并使整个可用光谱范围象散非常小[1]．

§8.6.2　成象系统的分辨本领

夫琅和费衍射公式 §8.3(36) 式在光学系统分辨本领的计算中有着重要的应用．我们在 §7.6.3 讨论干涉光谱学时已经引入了分辨本领的概念，并且在前一节中计算了光栅和棱镜所能达到的分辨本领．现在我们把这个概念推广到成象系统．

在光谱仪器(例如，线光栅或法布里-珀罗干涉仪)中，分辨本领是衡量仪器分开波长相差很小的相邻二条谱线的能力．在成象系统中，分辨本领则是衡量分开相邻两个物点的象的能力．按照几何光学，当没有象差时，每个点物应该产生一个锐的点象．然而，由于衍射，实际的象总是一个有限大小的光斑．而如果有二个这样的象斑(衍射图样)发生了重叠，则二者中心强度极大靠得越近，就越难检查出有两个物．当然，眼睛能够分辨出两个物的极限，在某种程度上是一个实际经验问题．采用照相底版时，靠适当显影可

---

1) 关于这种无象散装置，见 F. L. O. Wadsworth, *Astrophys. J.*, **3** (1896), 54. 关于光栅象差理论和光栅装置的讨论，可见 W. T. Welford 的一篇论文，载于 *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 241.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

提高反差，从而可降低分辨极限．虽然如此，人们还是希望有一个简单的判据，以使能对不同系统的相对功能进行粗略的比较，这仍可应用 § 7.6.3 中所讨论的瑞利判据．按照这个判据，当一个象的主极大和另一个象的第一极小相重合时，这两个象算刚刚被分辨开．对于光谱仪器，分辨极限是某一波长差 $\Delta\lambda$，所以那时把分辨本领定义为 $\lambda/\Delta\lambda$．对于成象系统，分辨极限是某个距离 δx 或某个角度 $\delta\theta$，分辨本领则定义为这个量的倒数（即 $1/\delta x$ 或 $1/\delta\theta$）．

让我们首先讨论望远镜的分辨极限．对于一个很远的物体来说，入射光瞳的边和物镜的圆边相重合，因而它起着衍射孔的作用．设 a 是物镜孔径的半径，按照 § 8.5(16) 式，强度的第一极小相对于中心极大的位置是[1]

$$w = 0.61\frac{\lambda}{a}. \tag{24}$$

这里 $w = \sqrt{p^2+q^2}$ 代表方向 (p, q) 与中心方向 $p = q = 0$ 夹角 ϕ 的正弦．这个角通常很小，所以它的正弦可以用角度本身来代替．于是得到如下结论（根据瑞利判据）：**刚刚能被分辨开的两个星的角距离是** $0.61\lambda/a$．

当物镜给定时，眼睛所看到的象的角大小取决于目镜的放大率．然而，增加目镜的光焦度，并不可能显示出原象中不存在的细节结构，因为原象每个面元都是一个小衍射图样，而通过目镜看到的实际象只不过是这些图样放大象的集合．

现有最大望远镜（在帕洛玛山）的直径 $2a \sim 5$ 米．如果暂不考虑望远镜中中心遮挡物的影响，则可知此望远镜的理论分辨极限（对可见区中心附近 $\lambda \sim 5.6\times10^{-5}$ 厘米的光来说）为

$$\phi \sim 0.61\,\frac{5.6\times10^{-5}\text{ 厘米}}{2.5\times10^{2}\text{ 厘米}} \sim 1.4\times10^{-7},$$

用弧秒表示时，即

$$\phi \sim 0.028''.$$

1）按照§7.6.3，在狭缝衍射情况下，分辨极限时的鞍-峰强度比为 $8/\pi^2=0.811$．本处情况（圆孔）的相应值为 0.735．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在§6.1中,我们曾讲过眼睛的分辨极限是1弧分．现在我们可给以更精确的估计． 因为眼睛瞳孔的直径与来光的强度有关,变化范围大约为1.5—6毫米,所以分辨极限的范围是(仍旧取 $\lambda=5.6\times10^{-5}$ 厘米)

$$0.61\,\frac{5.6\times10^{-5}}{0.75\times10^{-1}}>\phi>0.61\,\frac{5.6\times10^{-5}}{3\times10^{-1}},$$

即

$$4.55\times10^{-4}>\phi>1.14\times10^{-4},$$

用分和秒表示时为

$$1'34''>\phi>0'24''.$$

以上我们假定孔是圆的． 但环孔情况也有重要意义,因为在许多望远镜中，例如，圆孔中心部分因存在第二个反射镜而被遮住． 假设环孔周界是两个同心圆,半径分别为 a 和 εa，其中 ε 是某个小于1的正数． 这时，夫琅和费图样中的光分布状态仍由§8.5(8)形式的积分来表示,只是 ρ 的积分范围须换成 $\varepsilon a\leqslant\rho\leqslant a$．于是,代替§8.5(13)式而得到

$$U(p)=C\pi a^2\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right]-C\pi\varepsilon^2a^2\left[\frac{2J_1(k\varepsilon aw)}{k\varepsilon aw}\right],\qquad(25)$$

因此强度

$$I(P)=\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2}\left[\left(\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right)-\varepsilon^2\left(\frac{2J_1(k\varepsilon aw)}{k\varepsilon aw}\right)\right]^2I_0,\qquad(26)$$

式中 $I_0=|C|^2\pi^2a^4(1-\varepsilon^2)^2$ 是图样中心 $w=0$ 处的强度．这时,强度极小(零点)的位置由方程

$$J_1(kaw)-\varepsilon J_1(k\varepsilon aw)=0,\ (w\neq0)\qquad(27)$$

的根给出,而极大位置由

$$J_2(kaw)-\varepsilon^2J_2(k\varepsilon aw)=0\qquad(28)$$

的根给出． 在推导(28)式时，同圆孔情况中一样，用了关系式§8.5(15)式．对于无遮挡的孔($\varepsilon=0$)．(27)式的第一个根当然就是(24)式所给的值,即 $w=3.83/ka=0.61\lambda/a$． 当 ε 增加时,(27)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式的第一个根减小[1]，例如，当 $\varepsilon=1/2$ 时，它略小于 $3.15/ka=0.50\lambda/a$。因主极大与 ε 无关，仍然在 $w=0$，由此可见，遮住孔的中心部分时，分辨本领将得到提高。然而，与此改进的同时，象的亮度将要下降，而且次极大要变得比较显著，以致反差降低。当 $\varepsilon=1/2$ 时，第一个次极大（在 $w=4.8/ka$ 处）是主极大的 10%，与此相比，圆孔情况的这个值为 1.8%（在 $w=5.14/ka$ 处）（见图 8.30）。

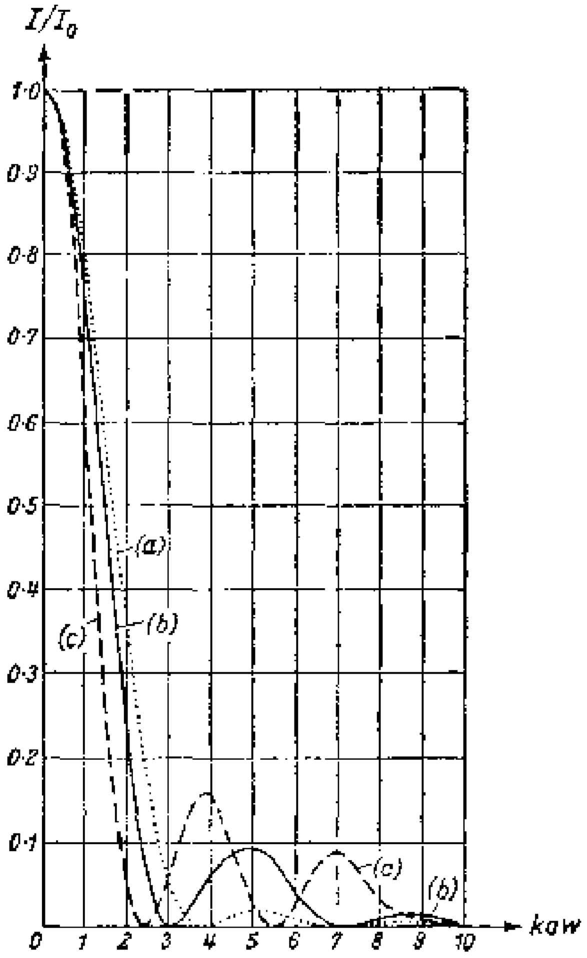


图 8.30　中心遮挡对分辨的影响图示．夫琅和费图样归一化强度曲线

(a) 圆孔，(b) 环孔，$\varepsilon=\frac{1}{2}$，(c) 环孔，$\varepsilon\to 1$

[引自，G. C. Steward, *The Symmetrical Optical System* (Cambridge University Press, 1928), p. 89.]

---

1) 由 (26) 式经简单计算可以得知，当 $\varepsilon\to 1$ 时，$I/I_0\to J_0^2(kaw)$。因为方程 $J_0(x)=0$ 的第一个零点在 $x=2.40$，所以当 ε 增加时，第一暗环的半径趋近 $w=2.40/ka=0.38\lambda/a$ 所给的值。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

遮挡住圆孔的中心部分，就相当于将光瞳函数（参见§8.3(39)式）从

$$G(\xi,\eta)=C \qquad (当\ 0\leqslant\rho\leqslant a\ 时)$$
$$=0 \qquad (当\ \rho>a\ 时)$$

改变成

$$G(\xi,\eta)=C \qquad (当\ \varepsilon a\leqslant\rho\leqslant a\ 时)$$
$$=0 \qquad (当\ \rho<\varepsilon a,\ \rho>a\ 时).$$

自然，还可以用其它方法改变光瞳函数．修改光瞳函数的一般方法，是在系统的一个或多个面上淀积一层材料合适的部分透射薄膜．借助特殊构造的"滤波器"（例如用一个形状适当的空心透镜，充以一种吸收液体）可达到同样效果．问题在于，光瞳函数取什么形式，才能获得从某种相符意义上说是可能最好的象．这个问题已由一些作者加以研究[1]．特别令人感兴趣的是法朗西(T. di Francia)的结果[2]：光瞳函数可以选择成，使第一暗环的半径任意地小，同时使中心圆斑周围的暗带任意地大．但是，在使第一暗环的半径逐渐减小时，中心圆斑中的光越来越少，所以实际可采用的最小圆斑尺寸，以及因而分辨本领，都受到可供使用光量的限制．

适当修改光瞳函数以部分抑制次极大的方法，通常称为**变迹法**[3]．在光谱学分析中，抑制次极大有利于对谱线伴线的探测，而在天文学应用中，它有利于分辨表观亮度相差可观的双星．

本节所概述的这种通行的分辨本领理论，特别适用于直接目视观测．当采用其它探测方法（如光度法）时，常常可检查出角距

---

1) 例如，见 R. Straubel, *P. Zeeman Verh.* (Den Haag, Martinus Nijhoff, 1935), p. 302; R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (Mimeographed Lecture Notes, Brown University, Providence, R. I. (1944). Printed version published by University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964), §50; H. Osterberg and J. E. Wilkins, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39** (1949), 553; G. Lansraux, *Rev. d'Optique* **32** (1953), 475.
关于这一领域的研究，E. Wolf 有一篇简短述评，见 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **14** (1951), 109.

2) G. Toraldo di Francia, *Suppl. Nuovo Cimento*, **9** (1952), 426.

3) B. Dossier 对这个问题进行了透彻的分析，Rev. d'Optique, **33** (1954), 57, 147, 267.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

比瑞利判据所给值还小得多的两个物体。在这方面，将望远镜和迈克耳孙测星干涉仪（§7.3.6）的相对分辨效率作一比较是很有意思的。如果以该干涉仪形成的条纹的第一次消失作为存在两个星的判断标准，并设 d 是干涉仪靠外两个反射镜所能拉开的最大距离，则按照 §7.3(34) 式，这仪器可以探测出角距离小到 $\phi \sim \frac{1}{2}\lambda/d$ 的双星。将此值与 (24) 式进行比较即可看出，如采用目测望远镜来探测这种间距的双星，其物镜直径 $2a$ 则须约为 $2.4d$。

§8.6.3 显微镜中的成象

在上面所概述的分辨本领基础理论中，我们假定从两个物点来的光是不相干的。当两个物是自发光物体时，例如望远镜所观察的星星，这种假定是正确的。这时，在象平面上任何点所观测到的强度等于各物点在该点产生的强度之和。

在显微镜中，情况通常要复杂得多。显微镜所观测的物一般是不发光的，因而须用辅助系统加以照明。由于照明系统（聚光器）孔上的衍射，光源的每一体元将各在显微镜物平面上产生一衍射图样。中心点靠得足够近的那些衍射图样将部分重叠，结果物平面上相邻各点的光振动一般是部分相关的。这光有一些透过了物体，同时可产生一相变，其余部分则被散射，反射或吸收。因此，一般说来，依靠单次观测，即使使用某种特别装置，都不可能获得一个如实反映物体全部结构变化细节的放大图象。因此，人们研究出了各种观测方法，每种方法各适合于研究某些类型的物体，或用以显示特别的结构。

我们将简略说明显微镜成象理论的要点，首先只考虑完全不相干照明和完全相干照明这两种极端情况。部分相干照明情况将在 §10.5.2 中讨论。

(a) 不相干照明

我们先讨论自发光物体（例如，电灯的白炽灯丝）。设 P 是物

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

体的轴点，Q 是物平面上一个邻点，与 P 相距为 Y，并设 P' 和 Q' 是这两点的象（图 8.31）． 此外设 θ 和 θ' 是两个轴向光锥的边缘光线与轴的夹角．

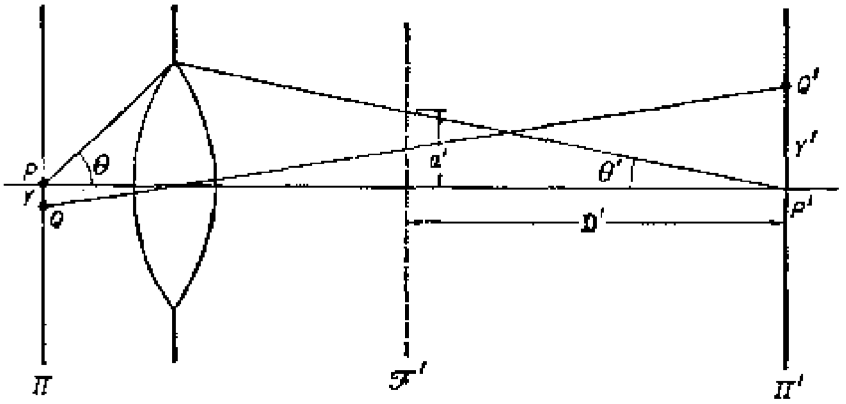


图 8.31　显微镜分辨本领理论图示

设 a' 是会聚到 P' 点的光束与后焦面 $\mathscr{F}'$ 相交区域(假定是圆形的)的半径，并设 D' 是后焦面和象平面的距离．因 θ' 很小，故

$$\theta' = \frac{a'}{D'}. \tag{29}$$

此外，设 $w = \sqrt{p^2 + q^2}$ 是以"衍射单位"计算时 Q' 和 P' 的间距(参看 § 8.3(35) 式和 § 8.5(7) 式)，即 Q'、P' 两点对衍射孔中心张角的正弦，则在良好近似程度上有

$$Y' = wD'. \tag{30}$$

设 n 和 n' 是物空间和相空间的折射率，λ 和 λ' 是相应的波长，λ_0 是真空波长．按照 § 8.5(16) 式，P 的衍射图样的第一极小在 $w = 0.61\lambda'/a'$，因此在分辨极限时，有

$$Y' = 0.61\lambda' \frac{D'}{a'} = 0.61 \frac{\lambda'}{\theta'} = 0.61 \frac{\lambda_0}{n'\theta'}. \tag{31}$$

当然，一个显微镜必须设计成不仅使轴点，而且使物平面上相邻各点都能产生很锐的象．按照 §4.5.1，这就要求满足正弦条件[1)]

$$nY \sin\theta = n'Y' \sin\theta'.$$

1) 这里出现负号是因为 θ' 对应于 §4.5 的 $-\gamma_1$．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因为 θ' 很小，我们可以用 θ' 代替 $\sin\theta'$. 将 Y' 代入(31)式，最后得到

$$|Y| \sim 0.61 \frac{\lambda_0}{n \sin\theta} . \tag{32}$$

这个公式给出了在不相干照明和圆孔情况下，一个显微镜刚刚能分辨开的两个物点的距离.

(32)式中 $n\sin\theta$ 这个量是数值孔径[参见§4.8(13)式]. 因此，要达到高分辨本领，数值孔径必须很大. §6.6 中已经讨论过获得大数值孔径的方法.

(b) 相干照明——阿贝理论

现在我们讨论另一种极端情况，即从物体发出的光可以作为完全相干光来处理. 例如，一个结构比较简单的薄物体，由足够小的光源通过一低孔径聚光器来照明时，情况即近似如此(参见§10.5.2).

阿贝首先给出了圆满的相干照明分辨理论，并对之作了精彩的实验证明[1]. 按照阿贝理论，物体就相当一个衍射光栅，因而在决定象平面上任一特定点的复振动时，不仅要考虑物镜孔上每个面元的贡献，而且还要考虑物体上每个面元的贡献. 用数学的话说就是，从物过渡到象，包括两个积分，一个对物平面，另一个对孔平面. 在阿贝理论中，先是计算物体所产生的衍射，第二步再考虑孔的作用. 也可以采取另一途径，将次序倒过来，所得结果当然相同[2].

为了说明阿贝理论，我们先讨论一个类光栅物体在平面波照

---

1) Ernst Abbe, *Archiv. f. Mikroskopische Anat.*, **9** (1873), 413. 又见其 *Gesammelte Abhandlungen*, **1** (Jena: G. Fischer, 1904), 45 和 O. Lummer and F. Reiche, *Die Lehe von der Bildstehung im Mikroskop von Ernst Abbe*, (Braunschweig; Vieweg, 1910). A. B. Porter 也对阿贝理论作了很好的叙述，见 *Phil. Mag.* (6), **11** (1906), 154.

2) Lord Rayleigh 曾给出了一种与此处理等效的显微镜成象理论，见 *Phil. Mag.* (5), **42** (1896), 167; 又见其 *Scientific Papers*, **4** (Cambridge University Press, 1903), p. 235.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

明下的成象，波的入射方向与物平面垂直(科勒(Köhler)中央照明法)．这个波被这物体衍射后，在物镜后焦面 $\mathscr{F}'$ 上产生光栅的夫琅和费衍射图样(参见 §8.6.1)．在图 8.32 中，这个衍射图样的各个极大(依次各序光谱)用 $\cdots S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \cdots$ 代表．焦平面上的每一点可以认为各是一个相干次级扰动中心，扰动强度正比于该点的振幅．从这些次级光源送出去的各个光波将因此相互发生干涉,并将在物镜的象平面 Π' 上产生物体的象．要得到一个如实的象,所有光谱都必需参与象的形成．严格地讲,这决不可能,因为物镜孔径是有限的．后面我们将看到,删除掉某些光谱会使象中出现完全虚假的细节．从实用目的上说,显然,孔径只要大得足以收进所有携有可观能量的那些光谱就行了．

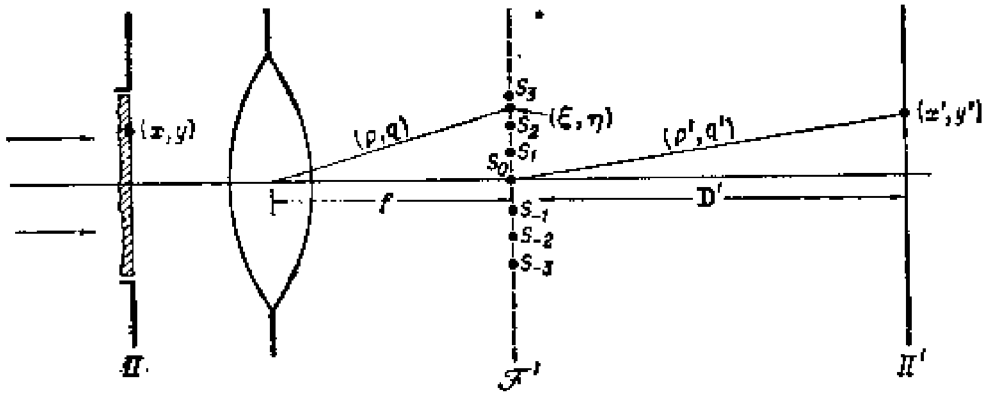


图 8.32　相干照明时显微镜成象的阿贝理论图示

让我们更加精确地表达出这些考虑，并且不仅仅限于类光栅物体．设 x, y 是物平面上某代表点的坐标，f 是焦平面 $\mathscr{F}'$ 离物镜透镜的距离,则 $\mathscr{F}'$ 平面上某点

$$\xi = pf, \quad \eta = pf \tag{33}$$

(见图 8.32)的扰动由夫琅和费公式表出如下:

$$U(\xi, \eta) = C_1 \iint_{\mathscr{A}} F(x, y) e^{-ik\left[\frac{\xi}{f}x + \frac{\eta}{f}y\right]} dx dy, \tag{34}$$

式中 F 是物体的透射函数，C_1 是常数，而积分是对物平面 Π 上被物体复盖的面积 $\mathscr{A}$ 来进行的．

下一步是从后焦面 $\mathscr{F}'$ 过渡到象平面 Π'．如果同前令 D' 代

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 $\mathscr{F}'$ 和 Π' 的距离，$V(x', y')$ 是象平面上某代表点

$$x' = p'D', \quad y' = q'D' \tag{35}$$

的扰动，则对于 $\mathscr{F}'$ 上孔 $\mathscr{B}$ 上的夫琅和费衍射，有

$$V(x', y') = C_2 \iint_{\mathscr{B}} U(\xi, \eta) e^{-ik\left[\frac{x'}{D'}\xi + \frac{y'}{D'}\eta\right]} d\xi d\eta, \tag{36}$$

其中假定 $a'/D' \ll 1$（见图 8.31）。将(34)式代入(36)式，得到

$$V(x', y') = C_1 C_2 \iint_{\mathscr{A}} \iint_{\mathscr{B}} F(x, y)$$

$$\times e^{-i\frac{k}{f}\left[\left(x + \frac{f}{D'}x'\right)\xi + \left(y + \frac{f}{D'}y'\right)\eta\right]} dx dy d\xi d\eta. \tag{37}$$

如果对于物平面上 $\mathscr{A}$ 外边的所有点，定义 $F(x, y)$ 为零，则对 x 和 y 的积分在形式上可扩大到从 $-\infty$ 到 $+\infty$。再者，如果孔 $\mathscr{B}$ 很大，使得对于 $\mathscr{F}'$ 平面上 $\mathscr{B}$ 外边的点，$|U(\xi, \eta)|$ 可以忽略，则 ξ 和 η 的积分范围同样可各扩大到从 $-\infty$ 到 $+\infty$。再注意到[参见§4.3(10)式，其中 f' 和 z' 分别对应于这里的 f 和 $-D'$]

$$\frac{f}{D'} = -\frac{1}{M}, \tag{38}$$

式中 $M(<0)$ 是 Π 和 Π' 之间的放大率，则由傅里叶积分定理[1]可以得到

$$V(x', y') = CF\left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M}\right) = CF(x, y), \tag{39}$$

其中 (x, y) 是和象点 (x', y') 对应的物点，而常数

$$C = C_1 C_2 \lambda^2 f^2.$$

因此，在所包含的准确程度内[2]，只要孔径足够大，象和物是完全相似的(但是是倒象)。

为了证明当删除掉某些携有可观能量的光谱时，象中会出现完全虚假的细节，我们讨论一个一维类光栅物体，它由 N 条等距平

---

1) 例如，见R. Courant and Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (New York. Interscience Publishers, 1953), Vol. 1, p. 79.

2) 正如 501 页上所指出的，这里所采用的夫琅和费近似是限于物点和象点距轴都足够近的情况。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

行狭缝组成，缝宽各为 s，缝间为不透明区，光栅周期为 d. 为简单起见，我们假定孔是矩形的，有两个边和类光栅物体的长条平行.

按照 §8.6(3) 式，

$$U(\xi)=C_1'\left(\frac{\sin\dfrac{k\xi s}{2f}}{\dfrac{k\xi s}{2f}}\right)\frac{1-e^{-iNkd\xi/f}}{1-e^{-ikd\xi/f}}, \tag{40}$$

其中 U_0 已用矩孔衍射表达式代入，C_1' 是一常数(参见 §8.5.1). 如果矩孔在 ξ 方向上占据的范围为

$$-a\leqslant\xi\leqslant a,$$

则由 (36) 和 (40) 式可知，像平面上的扰动

$$V(x')=C'\int_{-a}^{a}\frac{\sin\dfrac{ks\xi}{2f}}{\dfrac{ks\xi}{2f}}\,\frac{1-e^{-iNkd\xi/f}}{1-e^{-ikd\xi/f}}\,e^{-ikx'\xi/D'}d\xi, \tag{41}$$

C' 代表一常数. 被积函数各主极大的位置由方程 $1-\exp[-ikd\xi/f]=0$ 的根，即 $\xi=mf\lambda/d$ 给出，其中 m 是一整数. 在这些主极大之间，还有一系列弱的次极大. 如果 N 很大，主极大就非常锐，次极大相比可以忽略. 这时，在良好近似程度上，上一积分可用一组积分之和来代替，其中各个积分依次从相邻两个主极大的间区中点 Q_m 积到下一个中点 Q_{m+1}. 在各积分间区中，$\sin\dfrac{ks\xi}{2f}\Big/\dfrac{ks\xi}{2f}$ 和 $e^{-ikx'\xi/D'}$ 中的变量可以用其中心值 $\xi=mf\lambda/d=2\pi mf/kd$ 来代替. 由此得到 V 表达式如下：

$$V(x')\sim V_0\sum_{-\bar m<m<\bar m}\frac{\sin\dfrac{m\pi s}{d}}{\dfrac{m\pi s}{d}}e^{\frac{2\pi imx'}{d'}}, \tag{42}$$

式中

$$\bar m=\frac{ad}{\lambda f},\quad d'=Md=-\frac{D'}{f}d, \tag{43}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

而 V_0 代表下列积分:

$$V_0 = C'\int_{\Omega_m}^{\Omega_{m+1}} \frac{1 - e^{-iNkd\xi/f}}{1 - e^{-ikd\xi/f}} d\xi, \tag{44}$$

这个积分除 m 很高时有小的修正项以外，实际上与 m 无关. 级数(42)可以改写成实数形式如下:

$$\frac{V(x')}{V_0} = 1 + 2\sum_{1<m<\bar{m}} \frac{\sin\frac{m\pi s}{d}}{\frac{m\pi s}{d}} \cos\frac{2\pi m x'}{d'}. \tag{45}$$

先假定矩孔的长度 $2a$ 非常大. 这时,求和在形式上可扩大到整个无穷范围 ($\bar{m} = \infty$), 并且可以很容易证明，象和物是完全相似的. 为此,我们将类光栅物体的透射函数(见图 8.33)

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= F_0 \text{ (当 } 0 < |x| < s/2 \text{ 时)} \\ &= 0 \text{ (当 } s/2 < |x| < d/2 \text{ 时)} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

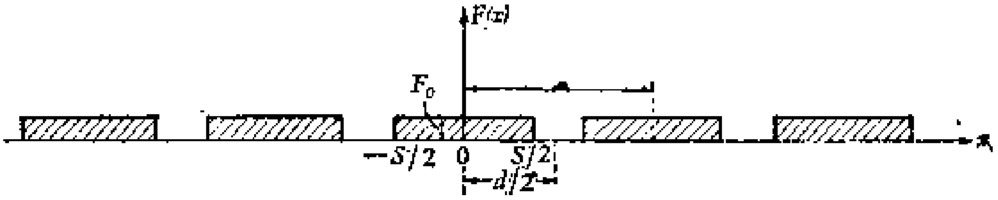


图 8.33 一个类光栅物体

展开成傅里叶级数

$$F(x) = C_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos\frac{2\pi m x}{d}. \tag{47}$$

于是

$$C_0 = \frac{F_0 s}{d}, \quad C_m = F_0 \frac{\sin\frac{\pi m s}{d}}{\pi m} \quad (m = 1, 2, 3\cdots). \tag{48}$$

可见,除常数因子外,这级数和(45)式相同.

现在假定矩孔的长度 $2a$ 减小. 如果 $2a$ 小到只有零序光谱对象有贡献, 即如果 $\bar{m} = ad/\lambda f$ 只是一个小数, 则按照(45)式, $V(x')$ = 常数, 因而象平面只是被均匀照明. (当然, 这个结果并

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

不严格对，因为我们曾略去了某些误差项；实际上，强度朝边部方向有微弱下降.）

如果除零序光谱以外，还可有两个第一序光谱（S_1, S_{-1}）从矩孔通过，即 $\bar{m} = ad/\lambda f$ 略大于 1，则由 (45) 式可知

$$\frac{V(x')}{V_0} = 1 + 2\frac{\sin\frac{\pi s}{d}}{\frac{\pi s}{d}}\cos\frac{2\pi x'}{d'}. \tag{49}$$

这时象的周期 $x' = d'$ 是正确的，但强度分布被大大拉平．使孔越来越增大时，象就越来越接近与物相似．

当去掉较低几序时，所得到的象将是完全虚假的．例如，如果除第二序以外，其它全部删除掉，则

$$\frac{V(x')}{V_0} = 2\frac{\sin\frac{2\pi s}{d}}{\frac{2\pi s}{d}}\cos\frac{4\pi x'}{d'}, \tag{50}$$

因而象的周期是 $x' = d'/2$；"象"中线条数目为物中实有数目的二倍．

最后让我们估计一下分辨本领．回到图 8.31 所示情况，但现在假定从 P、Q 两点来的光是相干的．这时，象平面上的分布主要由两个爱里衍射图样相干叠加而成，一个图样的中心在 P' 点，另一个在 Q' 点．在 P' 和 Q' 之间，距离 P' 为 w_1（以"衍射单位"计算）的地点，复振幅为

$$U(w_1) = \left[\frac{2J_1(kaw_1)}{kaw_1} + \frac{2J_1[ka(w-w_1)]}{ka(w-w_1)}\right]U_0, \tag{51}$$

w 是 P' 和 Q' 的距离，其他符号意义同前．因此强度为

$$I(w_1) = \left[\frac{2J_1(kaw_1)}{kaw_1} + \frac{2J_1[ka(w-w_1)]}{ka(w-w_1)}\right]^2 I_0. \tag{52}$$

前面在非相干照明下，当一个图样的强度主极大与另一个的第一极小相重合时，P'、Q' 两点算是刚被分辨开．这时，在两个极

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

大之间中点处 ($kaw \sim 1.92$)，强度等于 $2[2J_1(1.92)/1.92]^2 \sim 0.735$ 乘上任一极大强度，即合强度曲线在两个主极大之间有一个大约 26.5% 的下陷 (在缝孔情况下，此值为 19%，参见图 7.62)．如果我们仍旧以这样大小的下陷来大体决定分辨极限，则临界间距 $w = 2w_1$ 由下列关系求出：

$$\frac{I(w_1)}{I_0} = \left[2\frac{2J_1(kaw_1)}{kaw_1}\right]^2 = 0.735. \qquad (53)$$

这个超越方程的第一个根是 $w_1 \sim 2.41/ka$，所以临界间距以常用单位计算时为

$$Y' = 2w_1D' \sim \frac{2.41}{\pi}\frac{D'\lambda'}{a} = \frac{0.77\lambda'}{\theta'} = \frac{0.77\lambda_0}{n'\theta'}. \qquad (54)$$

Y' 和物点 P、Q 相应间距 Y 的关系可通过正弦条件 (取 $\sin\theta' \sim \theta'$ 近似) 获得，从而最后得到相干照明时的分辨极限表达式如下：

$$|Y| = 0.77\frac{\lambda_0}{n\sin\theta}. \qquad (55)$$

与非相干照明情况 [方程 (32) 式] 相比，此式除数字因子较大外，其它都一样 (这个数字因子无论如何是有些任意的，因为它和物的形状、孔的形状以及接收器的灵敏度有关)．这样，当光的波长给定时，分辨本领实际上仍决定于物镜的数值孔径．

(c) 相干照明——泽尼克相衬观察法[1]

前已定义，相物体是一种只改变入射波位相而不改变入射波振幅的物体．这种物体的光学厚度是不均匀的，但它对入射光没有一点吸收．在生物学、晶体学和其他领域中常遇到这种物体．从上列讨论显然可见，采用通常方法来观察相物体，将看不到什么结构．因为，这时确定象平面上扰动的复振幅函数与物体的透射

---

1) 关于相衬方法，比较详尽的讨论可参见 M. Françon, *Le contraste de phase en optique et en microscopie* (Paris, *Revue d'Optique*, 1950)；和 A. H. Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg, and O. W. Richards, *Phase Microscopy* (New York, J. Wiley and Sons, 1952).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

函数相似[1]，而眼睛(或任何其它观察仪器)只能辨别强度上的变化，因而人们只能判断物体所导致的振幅变化如何，而不能判断物体导致的位相变化如何.

要了解相物体的结构，必须采用特殊的观察方法，例如，采用所谓中心暗场观察法(用光阑将中心序去掉)，或施利雷(Schlieren)法(将中心序一边所有光谱统统去掉). 最有效的方法是泽尼克的方法，它是泽尼克于1935年首先提出的[2]，其优点是它可产生一个与物体所导致的位相变化成正比的强度分布. 这个方法称为相衬法.

为了说明相衬法的原理，我们先讨论一个一维相光栅形式的透明物体. 这种物体的透射函数按定义(见524页)呈如下形式:

$$F(x) = e^{i\phi(x)}, \tag{56}$$

式中 $\phi(x)$ 是一个实周期函数，其周期(设为 d)等于光栅的周期. 我们假定，ϕ 比1小得多，因而可将(56)式写成

$$F(x) \sim 1 + i\phi(x). \tag{57}$$

如果我们将 F 展成傅里叶级数

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{\frac{2\pi i m x}{d}}, \tag{58}$$

则(因为 F 是(56)式的形式，而且 ϕ 是实函数，数值比1小得多)

$$C_0 = 1, \quad C_{-m} = -C_m^* \qquad (m \neq 0). \tag{59}$$

第 m 序光谱的强度正比于 $|C_m|^2$.

在相衬观察法中，在物镜后焦面 $\mathscr{F}'$ 上放有一块用透明材料做的薄板，叫做相板，它的作用是使中心序(图8.32中的 S_0)的位相相对各衍射谱(S_1, S_{-1}, S_2, S_{-2}, …)滞后或超前1/4周期. 这意

---

1) 只有当物镜孔径无穷大时，这两个函数实际才会严格相似. 由于孔径总是有限的，因而可以看到相结构的一些细节. 在某些情况下，牺牲分辨，将仪器稍稍退焦，可增加这种"象"的可见度(参见 H. H. Hopkins, contribution in *M. Françon, Le Contraste de phase et Le contraste par interférences* (Paris, *Revue d'Optique*, 1952), 142).

2) F. Zernike, *Z. Tech. phys.*, **16** (1935), 454; *Phys. Z.*, **36** (1935), 848; *Physica*, **9** (1942), 686, 974.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

味着，焦平面上的复振幅将从系数 C_m 所表征的那种分布，变成为下列系数 C'_m 所表征的分布：

$$C'_0 = C_0 e^{\pm i\pi/2} = \pm i, \quad C'_m = C_m \qquad (m \neq 0), \tag{60}$$

式中取正号还是负号，视中心序位相是滞后还是超前而定．这时，象平面上产生的光分布不再代表相光栅(57)，而是代表一个假想的幅光栅

$$G(x) = \pm i + i\phi(x). \tag{61}$$

因此这时象平面上的强度将正比于（ϕ^2 与 1 相比可予略去）

$$I(x') = |G(x)|^2 = 1 \pm 2\phi(x), \tag{62}$$

同前，式中 $x' = Mx$，M 是放大率．这个关系式表明，在相衬观察法中，物体所导致的位相变化被转化成强度上的变化，象平面上任一点的强度(除多了一个常数项以外)系与物体相应面元上产生的位相变化成正比[1]．当中心序的位相相对各衍射谱是滞后时((61)式中的加号)，物体上光学厚度比较大的地区，看起来将比平均照度亮，这种情况称为亮相衬；当中心序的位相是超前时，光学厚度较大的地区看起来将较暗，这种情况称为暗相衬(图 8.34 和 8.35)．

为了获得好的分辨，照明系统的孔径常做成环形，而不做成圆形(参见 §8.6.2)．在这种情况下，$\mathscr{F}'$ 上直接(非衍射)光所通过的环形区就相当于图 8.32 中的中心序 S_0，这时正是这部分光，须予以滞后或超前 1/4 周期．

至于变相板，可由在玻璃垫片上蒸发薄薄一层合适的介质来制备．设 n 是这介质的折射率，d 是层的厚度，则要产生 1/4 周期的滞后，须令 $d = \lambda/4(n-1)$．当然，中心序滞后 1/4 周期，等效于各衍射谱超前 3/4 周期，反之亦然．用略有吸收的敷层来代替介质敷层，可提高本方法的灵敏度，下面我们还要再谈到这一点．

剩下还需要证明，相衬法并不只限于周期结构的相物体．为此，我们将积分(34)分成两部分：

---

1) 下列几篇论文讨论了相衬法基础理论中所包含的近似：J. Picht, *Zeitschr. f. Instrkde*, **56** (1936), 481; *ibid*. **58** (1938), 1 和 F. D. Kahn, *Proc. Phys. Soc.*, B **68** (1955), 1073.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

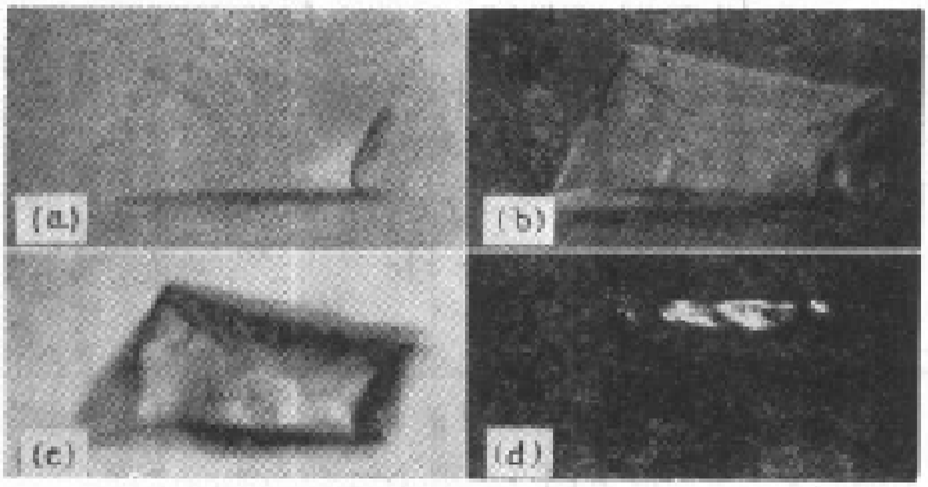


图 8.34 玻璃碎片 ($n=1.52$) 的显微镜象，碎片放在特等载片 ($n=1.54$) 上，放大 100 倍

(a) 亮场象　　(b) 和 (c) 相衬象　　(d) 暗场象

[引自 A. H. Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg, and O. W. Richards, *Trans. Amer. Microscop. Soc.* **65** (1946), 126.]

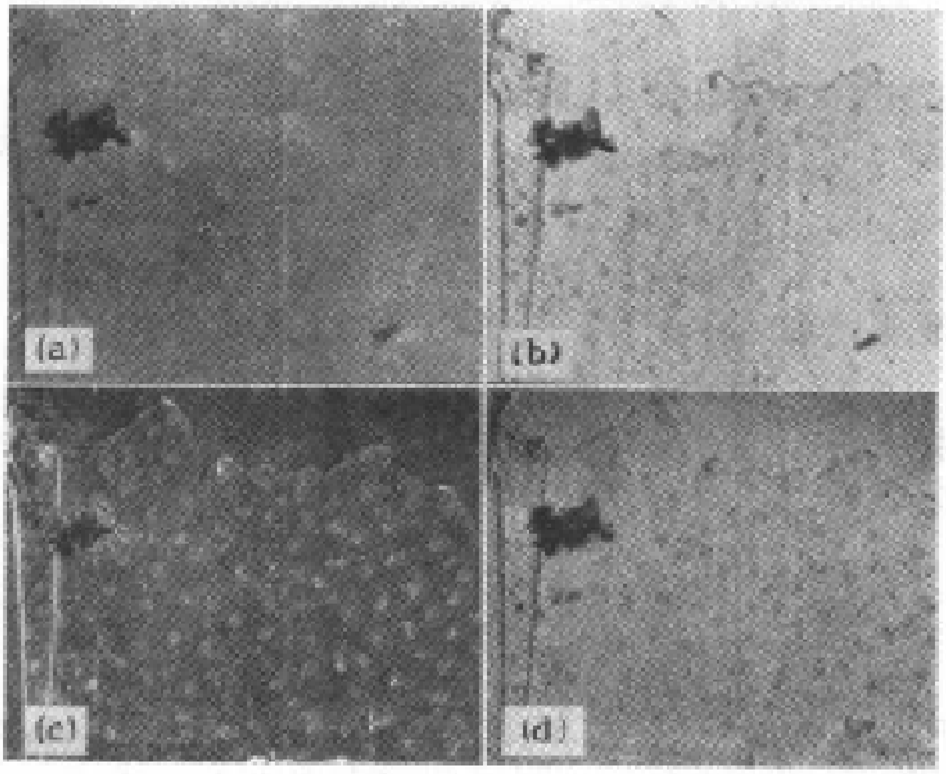


图 8.35 蛙蹼膜表皮的显微镜象，放大 100 倍

(a) 全孔径亮场象，数值孔径 ($N.A.$) = 0.25　　(b) 孔径半遮时亮场象

(c) 全孔径相衬象（亮衬）　　(d) 全孔径相衬象（暗衬）

[引自 A. H. Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg, and O. W. Richards, *Trans. Amer. Microscop. Soc.*, **65** (1946), 119.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U(\xi, \eta) = U_0(\xi, \eta) + U_1(\xi, \eta), \tag{63}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= C_1 \iint_{\mathscr{A}} e^{-\frac{ik}{f}[\xi x+\eta y]} dx dy, \\ U_1 &= C_1 \iint_{\mathscr{A}} [F(x,y) - 1] e^{-\frac{ik}{f}[\xi x+\eta y]} dx dy. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

U_0 代表没有物体时后焦面 $\mathscr{F}'$ 上应有的光分布，而 U_1 代表衍射效应。"直接光" U_0（对应于图 8.32 的中心序 S_0）将仅仅集中在 $\mathscr{F}'$ 平面上轴点 $\xi = \eta = 0$ 周围一个很小的地区 $\mathscr{B}_0$。相反，衍射光一般将只有极小部分到达这个地区，而大部分被衍射到这个平面的其他地区[1]。

现在假设用一块相板挡住直接光所通过的 $\mathscr{B}_0$ 区。板的作用可用下列透射函数来描述：

$$A = a e^{i\alpha}. \tag{65}$$

如果板仅仅使入射到它上面的光发生滞后或超前，则 $a = 1$；如果板同时对光还有吸收，则 $a < 1$。从孔 $\mathscr{B}$ 射出来的光将由下式代表：

$$U'(\xi, \eta) = AU_0(\xi, \eta) + U_1(\xi, \eta), \tag{66}$$

因而，根据 (36) 式，像平面上复振幅的分布为

$$V(x', y') = V_0(x', y') + V_1(x', y'), \tag{67}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= AC_2 \iint_{\mathscr{B}} U_0(\xi,\eta) e^{-\frac{ik}{D'}[x'\xi+y'\eta]} d\xi d\eta, \\ V_1 &= C_2 \iint_{\mathscr{B}} U_1(\xi,\eta) e^{-\frac{ik}{D'}[x'\xi+y'\eta]} d\xi d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

由于孔 $\mathscr{B}$ 大小大大超过 $\mathscr{B}_0$ 区，而且我们已经看到，在 $\mathscr{B}_0$ 外边，U_0 实际为零，因此把 V_0 中的积分区扩大到整个 $\mathscr{F}'$ 平面将不致

---

1) 这一点 J. Picht 曾作了详细研究，见 *Zeitschr. f. Instrkde*, **58** (1938), 1. 亦见 F. Zernike, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **94** (1934), 382—383, 他从稍许不同的方面讨论了这个问题。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

引起多大误差．此外，如果假定 $\mathscr{A}$ 大得足以通过所有携有任何可观能量的衍射光线，则 V_1 中的积分范围同样可到无穷．最后，如果象前面一样，对于物平面上物体复盖区外边的点，定义透射函数 $F(x,y)$ 为零，则积分(64)的范围也可取无穷．这时将(64)式代入(68)式，并利用傅里叶积分定理和关系式(38)，即可得到

$$\left.\begin{aligned} V_0(x',y') &= CA, \\ V_1(x',y') &= C\left[F\left(\frac{x'}{M},\frac{y'}{M}\right)-1\right] = C[F(x,y)-1]. \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

从(67)和(69)式可知象平面上的强度

$$I(x',y') = |V(x',y')|^2 = |C|^2|A+F(x,y)-1|^2. \quad (70)$$

对于相物体，

$$F(x,y) = e^{i\phi(x,y)}, \quad (71)$$

(70)式化为[1)]

$$\begin{aligned} I(x',y') = |C|^2\{a^2 + 2\{1 - a\cos\alpha - \cos\phi(x,y) \\ + a\cos(\alpha-\phi(x,y))\}\}. \end{aligned} \quad (72)$$

因 ϕ 已假定很小，故(72)式可写成为

$$I(x',y') = |C|^2[a^2 + 2a\phi(x,y)\sin\alpha], \quad (73)$$

而且，如果相板引入的位相差代表 1/4 周期的滞后或超前，则 $\alpha = \pm\pi/2$，(73)式遂化为

$$I(x',y') = |C|^2[a^2 \pm 2a\phi(x,y)]. \quad (74)$$

当相板对入射光没有一点吸收时 ($a=1$)，结果重新得到(62)式．这时，强度变化正比于物体的位相变化．当相板对直接光有 $a^2 \times 100\%$ 的吸收时，(73)式中第二项和第一项之比为 $\pm\phi/a$，因而象的衬比增加．例如，使直接光减弱到原来的 1/9，方法的灵敏度即可提高 3 倍．

§ 8.7 直边菲涅耳衍射

§ 8.7.1 衍射积分

前面我们讨论了夫琅和费衍射的各种情况，现在我们转向讨

1) $a=0$ 的特殊情况相当于暗场观察法．按照(72)式，这时强度分布

$$I(x',y') = 2C^2[1-\cos\phi(x,y)].$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

论更一般的非涅耳衍射情况.

基本衍射积分 §8.3(28) 式可写成如下形式:

$$U(P)=B(C+iS), \tag{1}$$

其中

$$B=-A\frac{i}{\lambda}\cos\delta\frac{e^{ik(r'+s')}}{r's'}, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} C&=\iint_{\mathscr{A}}\cos\{kf(\xi,\eta)\}d\xi d\eta,\\ S&=\iint_{\mathscr{A}}\sin\{kf(\xi,\eta)\}d\xi d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

于是,在观察点 P, 强度 $I(P)=|U(P)|^2$ 为

$$I(P)=B^2(C^2+S^2). \tag{4}$$

现在,在 $f(\xi,\eta)$ 展开式 §8.3(31) 式中,至少须保留到 ξ 和 η 的二次项.

同前,我们取孔 $\mathscr{A}$ 平面为 xy 平面. 为简化计算,我们选直线 P_0P 在孔平面上的投影作为 x 方向(图 8.36). 这样,当点源 P_0 位置固定好时,我们的参考系一般将因观察点而异.

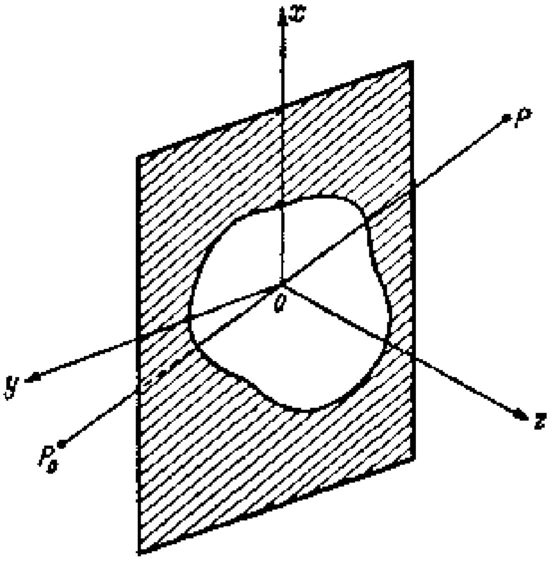


图 8.36 不透明平面屏上开孔的非涅耳衍射

根据 §8.3(30) 式,这时,$l=l_0$, $m=m_0$, 因而 $f(\xi,\eta)$ 展开式中的线性项消失. 光线 P_0O 和 OP 的方向余弦是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned} l &= l_0 = \sin\delta, \\ m &= m_0 = 0, \\ n &= n_0 = \cos\delta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

同前，其中 δ 代表直线 P_0P 与 z 轴的夹角． 于是，$f(\xi, \eta)$ 表达式 §8.3(31) 式化为

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)(\xi^2\cos^2\delta + \eta^2) + \cdots. \tag{6}$$

如果我们忽略 ξ 和 η 的三次项和高次项，则积分 (3) 式变成

$$\left.\begin{aligned} C &= \iint_{\mathscr{A}} \cos\left\{\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)(\xi^2\cos^2\delta + \eta^2)\right\} d\xi d\eta, \\ S &= \iint_{\mathscr{A}} \sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)(\xi^2\cos^2\delta + \eta^2)\right\} d\xi d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这时，方便的做法是引进两个新的积分变量 u, v, 定义为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)\xi^2\cos^2\delta &= \frac{\pi}{2}u^2, \\ \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)\eta^2 &= \frac{\pi}{2}v^2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

于是，

$$d\xi d\eta = \frac{\lambda}{2}\frac{du dv}{\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)\cos\delta},$$

而积分 (7) 变成

$$\left.\begin{aligned} C &= b\iint_{\mathscr{A}'} \cos\left\{\frac{\pi}{2}(u^2 + v^2)\right\} du dv, \\ S &= b\iint_{\mathscr{A}'} \sin\left\{\frac{\pi}{2}(u^2 + v^2)\right\} du dv, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中

$$b = \frac{\lambda}{2\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)\cos\delta}. \tag{10}$$

现在积分范围是 (u, v) 平面上的 $\mathscr{A}'$ 区，系由孔 $\mathscr{A}$ 区经 (8) 式

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

变换而来.

§ 8.7.2 菲涅耳积分

若 $\mathscr{A}'$ 为一矩形，各边平行于 u 轴和 v 轴，则可借助下列恒等式使积分 (9) 进一步简化:

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right] &= \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \\
&\quad - \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right), \\
\sin\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right] &= \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \\
&\quad + \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

在此情况下，计算 (9) 式须要用到下列两个积分:

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{C}(w) &= \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau, \\
\mathscr{S}(w) &= \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

$\mathscr{C}(w)$ 和 $\mathscr{S}(w)$ 通常称为**菲涅耳积分**. 这些积分对许多衍射问题是很重要的，人们曾对之作过广泛研究. 我们必须简单讨论一下它们的某些性质[1].

首先，我们推导 $\mathscr{C}(w)$ 和 $\mathscr{S}(w)$ 的级数表达式. 将积分号内的余弦函数和正弦函数展成幂级数，并逐项积分，由而得到

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{C}(w) &= w\left[1-\frac{1}{2!5}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^2+\frac{1}{4!9}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^4-\cdots\right], \\
\mathscr{S}(w) &= w\left[\frac{1}{1!3}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)-\frac{1}{3!7}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^3+\frac{1}{5!11}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^5-\cdots\right].
\end{aligned}\right\} \tag{13}
$$

---

1) 关于菲涅耳积分数值表，可参考下列著作: British Association Report (Oxford, 1926), 273-5. E. Jahnke and F. Emde, *Tables of Functions with Formulae and Curves* (Leipzig and Berlin, Teubner; reprinted by Dover Publications, New York, 4th Ed., 1945), p. 35. G. N. Watson, *A Trea-*

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

级数(13)对所有w值都是收敛的，但是只有当w很小时才便于计算．当w很大时，可从w的负幂级数来计算此二积分．为此，我们把(12)式改写为

$$\mathscr{C}(w)=\mathscr{C}(\infty)-\int_w^\infty \frac{d}{d\tau}\left(\sin\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\frac{d\tau}{\pi\tau}. \qquad (14)$$

经分部积分后，

$$\mathscr{C}(w)=\mathscr{C}(\infty)+\frac{1}{\pi w}\sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)+\int_w^\infty \frac{d}{d\tau}\left(\cos\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\frac{d\tau}{\pi^2\tau^3}.$$

再进行分部积分，并如此继续下去，最后得到

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{C}(w)=\mathscr{C}(\infty)-\frac{1}{\pi w}\Big[P(w)\cos\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\\ -Q(w)\sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\Big],\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

同样，

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(w)=\mathscr{S}(\infty)-\frac{1}{\pi w}\Big[P(w)\sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\\ +Q(w)\cos\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\Big],\end{aligned}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}Q(w)&=1-\frac{1\cdot3}{(\pi w^2)^3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(\pi w^2)^4}-\cdots,\\ P(w)&=\frac{1}{\pi w^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(\pi w^2)^3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{(\pi w^2)^5}\cdots.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

为计算积分$\mathscr{C}(\infty)$和$\mathscr{S}(\infty)$，我们把它们合并成一个复数积分

$$\mathscr{C}(w)+i\mathscr{S}(w)=\int_0^\infty e^{i\frac{\pi}{2}\tau^2}d\tau, \qquad (17)$$

并引入一个新的积分变量

$$\zeta=\tau\sqrt{-\frac{i\pi}{2}}=\tau\frac{i-1}{2}\sqrt{\pi},\quad \tau=-\zeta\frac{i+1}{\sqrt{\pi}}.$$

---

tise on the Theory of Bessel Functions (Cambridge University Press, 2nd Ed., 1944), p. 744. T. Pearcey, *Tables of Fresnel Integrals to Six Decimal Places* (Cambridge University Press, 1956).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

积分路线则相应地从实轴的 $0\leqslant\tau\leqslant\infty$，变换成复平面 ζ 上一条通过原点并与实轴成45°角的直线．这里很容易看出，如果积分沿平行于虚轴的直线来取，则随着离原点距离的增加，积分将趋于零．因此，从科希留数定理可知，沿过原点任意斜线取积分时，结果等于沿实轴的积分．所以

$$\mathscr{C}(\infty)+i\mathscr{S}(\infty)=\frac{i+1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\zeta^2}d\zeta=\frac{i+1}{2}.$$

（其中对 ζ 的实积分，是众所周知的高斯误差积分[1]，值为$\sqrt{\pi}/2$.）这样，

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{C}(\infty)&=\int_0^\infty\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau=\frac{1}{2},\\ \mathscr{S}(\infty)&=\int_0^\infty\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

关系式(15)，加上(16)和(18)式，把菲涅耳积分表成为 w 的负幂级数．这些级数是发散（渐近）级数，但是当 w 很大时，只要考虑其中有限几项，就可作为菲涅耳积分的良好近似值（参见附录 3）．

菲涅耳积分的特性可以用考纽(A. Cornu)的一个精致几何图象来说明[2]．这个图象以 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{S}$ 作为某点 P 的直角坐标．当 w 取所有可能值时，P 点即描绘出一条曲线．因 $\mathscr{C}(0)=\mathscr{S}(0)=0$，故此曲线通过原点；又由于

$$\mathscr{C}(-w)=-\mathscr{C}(w),\quad \mathscr{S}(-w)=-\mathscr{S}(w),\tag{19}$$

因而曲线对两个轴是反对称的．设 dl 代表曲线的元弧，则

$$\begin{aligned}dl^2=d\mathscr{C}^2+d\mathscr{S}^2&=\left[\left(\frac{d\mathscr{C}}{dw}\right)^2+\left(\frac{d\mathscr{S}}{dw}\right)^2\right](dw)^2\\ &=\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\right](dw)^2,\end{aligned}$$

即

---

1) 例如，见 R. Courant, *Differential and Integral, Calculus*, Vol. 1 (London and Glasgow, Blackie and Sons Ltd., 2nd Ed., 1942), p. 496.

2) A. Cornu, *Journ. de Phys.*, **3** (1874), 5, 44.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$(dl)^2 = (dw)^2. \tag{20}$$

因此，如果顺着 w 增大的方向来量 l，则参量 w 代表从原点量起时曲线的弧长。

设 θ 是曲线切线同 $\mathscr{C}$ 轴所成的角度，则

$$\tan\theta = \frac{d\mathscr{S}}{d\mathscr{C}} = \frac{\dfrac{d\mathscr{S}}{dw}}{\dfrac{d\mathscr{C}}{dw}} = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}w^2\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}w^2\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}w^2\right),$$

即

$$\theta = \frac{\pi}{2}w^2. \tag{21}$$

这样，θ 随 $|w|$ 单调地增大。当 $w=0$ 时，$\theta=0$，所以在原点处，切线与 $\mathscr{C}$ 轴重合。当 $w^2=1$ 时，则 $\theta=\pi/2$，因而切线与 $\mathscr{C}$ 轴垂直。当 $w^2=2$ 时，$\theta=\pi$，切线再次平行于 $\mathscr{C}$ 轴，但指向为负。另外，根据(18)和(19)两式，$\mathscr{C}(\infty) = -\mathscr{C}(-\infty) = \dfrac{1}{2}$，$\mathscr{S}(\infty) = -\mathscr{S}(-\infty) = \dfrac{1}{2}$，所以曲线的两支分别趋向于坐标点

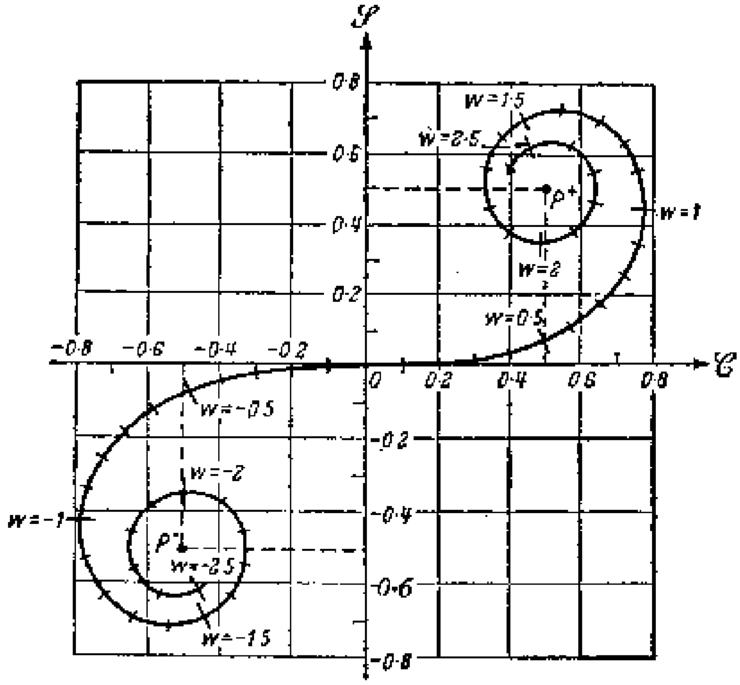


图 8.37 考纽蜷线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$P^+\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 和 $P^-\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$. 这一曲线通常称为考纽螺线(见图 8.37),它在讨论菲涅耳衍射图样的一般性质时是很有用的.

§ 8.7.3 直边菲涅耳衍射

现在我们讨论一个边界锐而直的半无限大平面上的菲涅耳衍射. 这个问题对于几何阴影边界附近场的特性特别重要. 这里只限于讨论直线 P_0P 以及它在半平面上的投影(我们的 x 轴)垂直于直边的情况(图 8.38). 设 x 是直边离原点的距离(原点在直线 P_0P 上),则积分范围为

$$-\infty < \xi < x,\quad -\infty < \eta < \infty,$$

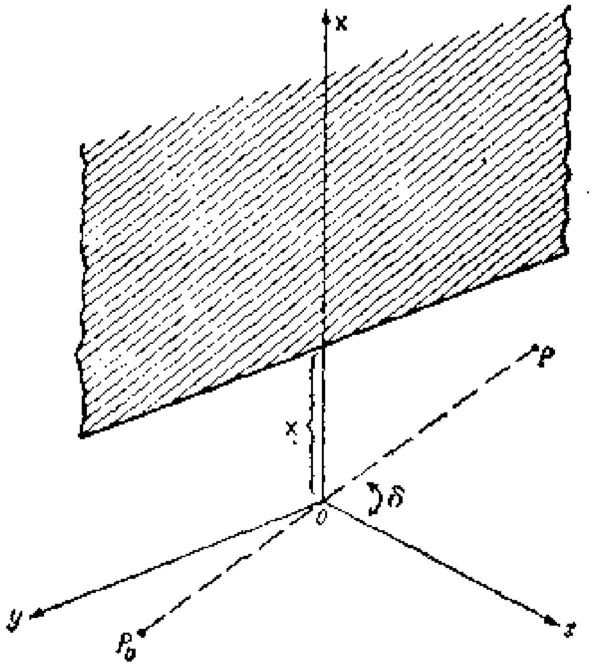


图 8.38 直边菲涅耳衍射

用 u 和 v 为变量时,积分范围为

$$-\infty < u < w,\quad -\infty < v < \infty, \tag{22}$$

其中

$$w = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)}\, x\cos\delta. \tag{23}$$

观察点 P 是在照明区内,还是在几何阴影区内,则视 $x > 0$ 还是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$x<0$ 而定。

衍射积分 (9) 变成

$$
\left.\begin{aligned}
C &= b\int_{-\infty}^{w} du\int_{-\infty}^{+\infty} dv\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right.\\
&\qquad\left.-\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right\},\\
S &= b\int_{-\infty}^{w} du\int_{-\infty}^{+\infty} dv\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

这里，我们已违反了在推导 (9) 式时所用的条件，即积分范围的线度应该比距离 P_0O 和 OP 小得多。要证明这些公式在本情况下亦近似成立，需要进一步仔细讨论误差项。然而，这里我们将略去这一步，因为关于半平面衍射问题，以后我们还将用严格的方法加以处理 [§11.5]。

从关系式 (18) 和 (19)，我们有

$$
\left.\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{w}\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau &= \int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{w}\\
&= \mathscr{C}(\infty)+\mathscr{C}(w) = \frac{1}{2}+\mathscr{C}(w),\\
\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau &= 1,
\end{aligned}\right\} \tag{25}
$$

同样，

$$
\left.\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{w}\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau &= \frac{1}{2}+\mathscr{S}(w),\\
\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)d\tau &= 1.
\end{aligned}\right\} \tag{26}
$$

因此，(24) 式变成

$$
\left.\begin{aligned}
C &= b\left\{\left[\frac{1}{2}+\mathscr{C}(w)\right]-\left[\frac{1}{2}+\mathscr{S}(w)\right]\right\},\\
S &= b\left\{\left[\frac{1}{2}+\mathscr{C}(w)\right]+\left[\frac{1}{2}+\mathscr{S}(w)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}
$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

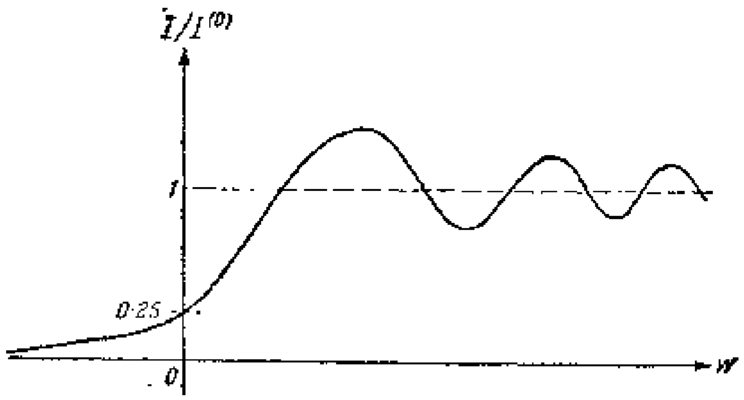


图 8.39　直边菲涅耳衍射图样的强度分布

以(27)代入(4)式,最后得到强度表达式如下:

$$I=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}+\mathscr{C}(w)\right]^2+\left[\frac{1}{2}+\mathscr{S}(w)\right]^2\right\}I^{(0)}, \quad (28)$$

式中

$$I^{(0)}=4|B|^2b^2=\frac{|A|^2}{(r'+s')^2}. \quad (29)$$

强度函数(28)的特性可从考纽螺线推得. 可以看出,$2I/I^{(0)}$这个量等于从渐近点$P^-\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$到考纽螺线上$w$点的距离平方. 这样,在照明区内($w>0$),当观察点$P$从几何阴影边界向外移动时,$I/I^{(0)}$是振荡的,但振幅逐渐减小,最后,正象从几何光学可以预期的那样,$I/I^{(0)}$渐近地趋向1. 强度的最大值并不在几何阴影边上,而是在直接照明区内稍为离开该边的地方(图8.39). 在几何阴影边上($w=0$),$I/I^{(0)}=\frac{1}{4}$. 在阴影区内,$I/I^{(0)}$单调地减小,一直到零. 人们发现,这些结论和实验结果很好地符合.

§8.8　焦点附近的三维光分布状态

在§8.3.3中,我们曾经指出,一个经过精心校正的透镜,它焦平面上的光分布本质上是由透镜孔上的夫琅和费衍射产生的. 之后,在§8.5中,我们详细研究了各种开孔的夫琅和费衍射图样. 为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

了对光学象的结构获得更加完全的了解，我们不仅须要研究几何焦平面上的光分布，而且还必须研究这个平面附近的光分布。了解焦点附近的三维(菲涅耳)光分布状态，对于估计成象系统中接收平面的装配公差，是特别重要的.

洛梅耳（E. Lommel）在一篇经典性论文[1]中，第一个详细讨论了一个点光源的单色像由圆孔衍射造成的离焦性质.他从惠更斯-菲涅耳积分出发，用贝塞耳函数的收敛级数，成功地表出了复扰动，并且还从实验上证实了根据这些计算所预期的种种现象.几乎与洛梅耳同时，斯特拉夫(H. Struve)[2]发表了一篇类似的关于圆孔的分析，虽然论述不那么广.他没有象洛梅耳那样详细地计算出数值结果，但是他给出了几何阴影边附近有用的强度近似公式，而级数展开式在阴影边附近收敛颇为缓慢. 若干年后，施瓦茨蔡耳德[3]推导了当观察点距离焦点很多个波长时有关的渐近近似表达式.

当时，洛梅耳和斯特拉夫的研究很少引人注意. 1909 年，德拜(P. Debye)[4] 再次处理了这个问题.他的讨论确定了焦点附近和远离焦点处，衍射场的某些一般特征. 最近几年，人们推广了这些作者的分析，并发表了一些线图，详细表出场在这个复杂区域内的结构；这些结果也已为光和微波(短无线电波)方面的实验所广泛证实.

在讨论焦点附近的光分布状态时，我们将以洛梅耳和斯特拉夫的分析作为起点，但是从德拜所采用的场的积分表示式来开始，将更为方便而有益.

§ 8.8.1 用洛梅耳函数计算衍射积分

考虑这样一个球面单色波，它通过一圆孔后，会聚于轴上焦点

1) E. Lommel, *Abh. Bayer. Akad.*, **15** Abth. 2, (1885), 233; 之后，另一篇论文 (ibid, **15**, Abth. 3, (1886), 531) 讨论了狭缝，不透明窄条和直边等衍射情况.

2) H. Struve, *Mém. de l'Acad. de St. Petersbourgh* (7), **34** (1886), 1.

3) K. Schwarzschild, *Sitzb. München. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.*, **28** (1898), 271.

4) P. Debye, *Ann. d. Physik.* (4), **30** (1909), 775.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

O. 我们将讨论焦点 O 附近某代表点 P 处的扰动 $U(P)$. 设以矢量 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{OP}$ 表明 P 点相对于 O 点的位置，并假定距离 $R=OP$ 和圆孔半径 $a\,(\gg\lambda)$ 比波阵面 W（正充满圆孔）的半径 $f=CO$ 都小得多(图 8.40).

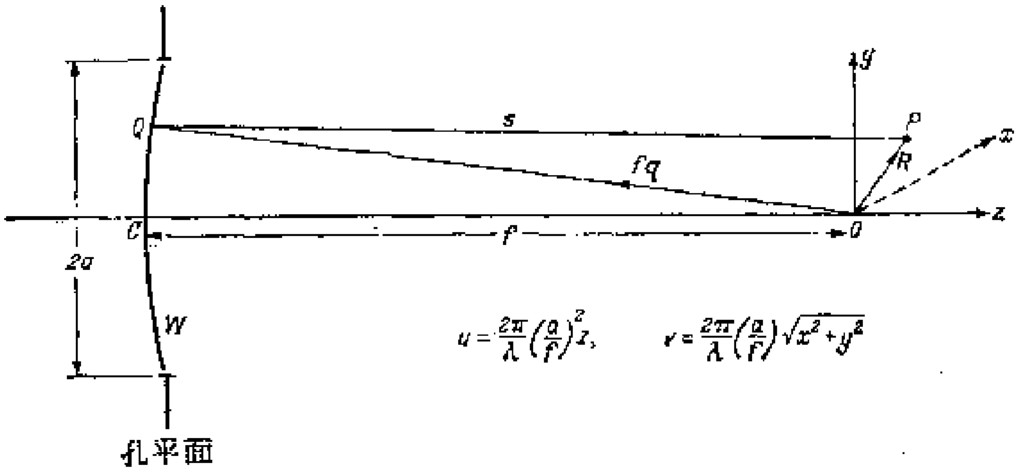


图 8.40　会聚球面波在圆孔上的衍射：符号

设观察点 P 至波阵面 W 上某点 Q 的距离为 s，入射波在 Q 点的振幅为 A/f，应用惠更斯-菲涅耳原理，则

$$U(P)=-\frac{i}{\lambda}\frac{Ae^{-ikf}}{f}\iint_{W}\frac{e^{iks}}{s}dS, \tag{1}$$

这里，由于所包括的角度都很小，因而式中忽略了波阵面上倾斜因子的变化. 设 $\boldsymbol{q}$ 代表 OQ 方向上的单位矢量，则在良好近似程度上，有

$$s-f=-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}. \tag{2}$$

又，波阵面 W 的面元

$$dS=f^2d\Omega, \tag{3}$$

其中 $d\Omega$ 是 dS 对 O 点所张的元立体角. 此外，在被积函数的分母中，用 f 代替 s，可不致产生显著误差. 于是，方程(1)变为

$$U(P)=-\frac{i}{\lambda}A\iint_{\Omega}e^{-ik\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}}d\Omega, \tag{4}$$

这时积分遍及圆孔对焦点所张的立体角 Ω. 方程(4)是**德拜积分**，它把场表成为不同传播方向的平面波的叠加（传播方向由 Ω 内各

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

q 矢量确定)

在讨论德拜积分的计算之前，我们指出下列重要事实：这一积分作为一系列基解(平面波)之和，代表了波动方程的一个严格解，它在 $f\to\infty$ (圆孔在无穷远)极限时，在整个空间都是有效的。当然，(4)式不是我们原题的严格解，因为其中没有考虑屏的性质，而只是用基尔霍夫衍射理论的边界条件，作为恰当边界条件的近似。我们问题的真正解，不仅应包括在各个入射几何光线方向上传播的那些平面波的贡献，而且还应包括在所有可能方向上传播的各个平面波的贡献[1]。然而，如果上述条件 ($f\gg a\gg\lambda, f\gg R$) 得到满足，则只有(4)式中所包括的那些平面波才有显著贡献。

为计算(4)式，我们首先将被积函数表成更明显的形式。在 O 点取一组笛卡儿坐标轴，令 z 轴沿 CO 方向。设 P 点的坐标为 (x, y, z)，Q 点的坐标为 (ξ, η, ζ)，并令

$$\left.\begin{aligned}\xi &= a\rho\sin\theta, & x &= r\sin\phi,\\ \eta &= a\rho\cos\theta, & y &= r\cos\phi.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

因 Q 点在球面波阵面 W 上，故

$$\zeta = -\sqrt{f^2 - a^2\rho^2} = -f\left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2\rho^2}{f^2} + \cdots\right].\tag{6}$$

于是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R} &= \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{f}\\ &= \frac{a\rho r\cos(\theta-\phi)}{f} - z\left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2\rho^2}{f^2} + \cdots\right].\end{aligned}\tag{7}$$

现在，引进下列两个无量纲变量 u 和 v，加上原有的 ϕ，来表示 P 点的位置，将更为有益：

$$u = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{f}\right)^2 z,\quad v = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{f}\right)r = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{f}\sqrt{x^2+y^2}.\tag{8}$$

可以注意，当 $|v/u| < 1$ 时，P 点在直接光束之中，而当 $|v/u| > 1$

---

1) 这相当于用所谓平面波角谱来表示场，参见 §11.4.2。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，P 点在几何阴影区内.

由 (7) 和 (8) 式，如果 $a\rho/f$ 二次幂以上各项和 1 相比可予略去，则

$$kq\cdot R = v\rho\cos(\theta-\psi) - \left(\frac{f}{a}\right)^2 u + \frac{1}{2}u\rho^2. \tag{9}$$

再者，元立体角

$$d\Omega = \frac{dS}{f^2} = \frac{a^2\rho d\rho d\theta}{f^2}. \tag{10}$$

因此，(4) 式变为

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda}\frac{a^2A}{f^2}e^{i\left(\frac{f}{a}\right)^2u}\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{-i\left[v\rho\cos(\theta-\psi)+\frac{1}{2}u\rho^2\right]}\rho d\rho d\theta. \tag{11}$$

式中对 θ 的积分，和我们在夫琅和费圆孔衍射(§8.5.2)中所遇到的相同。它等于 $2\pi J_0(v\rho)$，其中 $J_0(v\rho)$ 是零级贝塞耳函数。由此，(11) 式变为

$$U(P) = -\frac{2\pi i a^2 A}{\lambda f^2}e^{i\left(\frac{f}{a}\right)^2u}\int_0^1 J_0(v\rho)e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}\rho d\rho. \tag{12}$$

把这一积分实部和虚部分开计算较为方便。令

$$2\int_0^1 J_0(v\rho)e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}\rho d\rho = C(u,v) - iS(u,v), \tag{13}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} C(u,v) &= 2\int_0^1 J_0(v\rho)\cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)\rho d\rho,\\ S(u,v) &= 2\int_0^1 J_0(v\rho)\sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)\rho d\rho. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这些积分可借用下列洛梅耳函数 $U_n(u,v)$ 和 $V_n(u,v)$ 计算之：

$$\left.\begin{aligned} U_n(u,v) &= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{u}{v}\right)^{n+2s}J_{n+2s}(v),\\ V_n(u,v) &= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{v}{u}\right)^{n+2s}J_{n+2s}(v), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

这些函数是洛梅耳为计算积分 (14) 而引进的[1]。利用关系式 §8.5 (11)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{d}{dx}[x^{n+1}J_{n+1}(x)] = x^{n+1}J_n(x),$$

$C(u,v)$ 可写成为

$$C(u, v) = \frac{2}{v}\int_0^1 \frac{d}{d\rho}[\rho J_1(v\rho)]\cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)d\rho,$$

经分部积分后，

$$C(u, v) = \frac{2}{v}\left[J_1(v)\cos\frac{1}{2}u + u\int_0^1 \rho^2 J_1(v\rho)\sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)d\rho\right]. \tag{16}$$

再次利用关系式 § 8.5(11)，并进行分部积分，如此继续下去，最后得到

$$C(u, v) = \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[\left(\frac{u}{v}\right)J_1(v) - \left(\frac{u}{v}\right)^3 J_3(v) + \cdots\right]$$

$$+ \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[\left(\frac{u}{v}\right)^2 J_2(v) - \left(\frac{u}{v}\right)^4 J_4(v) + \cdots\right]$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_1(u, v) + \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_2(u, v). \tag{17a}$$

用同样方法可以得到

$$S(u,v) = \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_1(u, v) - \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_2(u, v). \tag{17b}$$

---

1) 关于这些函数，比较完全的讨论可参考 Lommel 论文(同前)和下列书籍：G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1922), pp. 537-50; A Gray, G. B. Mathews, and T. M. MacRobert, *A Treatise on Bessel Functions* (London, Macmillan, 2nd ed. 1922), Chapter XIV; 和 J. Walker, *The Analytical Theory of Light*(Cambridge University Press, 1904), p. 396.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这些公式对焦点附近的所有点都是适用的，但是只有当 $|u/v|<1$，即观察点在几何阴影内时，它们才便于计算。当 $|u/v|>1$，即观察点在照明区内时，采用 v/u 正幂次展开式就更为合适。用类似的方法，对三角函数项进行分部积分，即可导出这些展开式。第一步得到

$$C(u,v)=\frac{2}{u}\int_0^1 J_0(v\rho)\frac{d}{d\rho}\left[\sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)\right]d\rho$$

$$=\frac{2}{u}\left[J_0(v)\sin\frac{1}{2}u+v\int_0^1 J_1(v\rho)\sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)\rho d\rho\right], \tag{18}$$

其中使用了关系式 §8.5(15)

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x).$$

再进行分部积分，并利用上一关系和下列共知公式(可从 $J_n(x)$ 的级数展开式导出)

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_n(x)}{x^n}=\frac{1}{2^n n!}, \tag{19}$$

可以得到

$$C(u,v)=\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[J_0(v)-\left(\frac{v}{u}\right)^2 J_2(v)+\cdots\right]$$

$$-\frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[\left(\frac{v}{u}\right)J_1(v)-\left(\frac{v}{u}\right)^3 J_3(v)+\cdots\right]$$

$$+\frac{2}{u}\left[\frac{v^2}{2u}-\frac{1}{3!}\left(\frac{v^2}{2u}\right)^3+\cdots\right].$$

前两个方括弧里的级数就是洛梅耳函数 V_n 的 V_0 和 V_1，第三个方括弧里的级数则是我们所熟悉的 $\sin(v^2/2u)$ 展开式。因此，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$C(u, v) = \frac{2}{u}\sin\frac{v^2}{2u} + \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_0(u, v) - \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_1(u, v). \tag{20a}$$

用同样方法可得到另一积分的表达式为

$$S(u, v) = \frac{2}{u}\cos\frac{v^2}{2u} - \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_0(u, v) - \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_1(u, v), \tag{20b}$$

这就完成了我们问题的形式解．现在我们来讨论这些公式的某些内容．

§8.8.2 强度分布

根据(12),(13),(17)和(20)各式，焦点附近的强度 $I = |U|^2$ 由下列两个等效表达式给出：

$$I(u, v) = \left(\frac{2}{u}\right)^2 [U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v)] I_0. \tag{21a}$$

和

$$I(u, v) = \left(\frac{2}{u}\right)^2 \Big[1 + V_0^2(u, v) + V_1^2(u, v) - 2V_0(u,v)\cos\left\{\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right\} - 2V_1(u,v)\sin\left\{\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right\}\Big] I_0, \tag{21b}$$

式中

$$I_0 = \left(\frac{\pi a^2 |A|}{\lambda f^2}\right)^2 \tag{22}$$

是几何焦点 $u = v = 0$ 处的强度．

从(15)式可知，$U_1(-u,v) = -U_1(u,v)$，$U_2(-u,v) = U_2(u,v)$，$V_0(-u, v) = V_0(u, v)$，$V_1(-u, v) = -V_1(u, v)$．因此，当

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

u 换成 $-u$ 时，强度 $I(u, v)$ 保持不变。所以，在焦点附近，强度分布对几何焦平面是对称的。自然，这分布对 u 轴 ($v=0$) 也是对称的。

洛梅耳从公式(21)出发，计算了焦点附近一些特定接收平面上的强度分布，并从实验上证实了某些预期结果[1]。根据洛梅耳数据，可作出焦点附近的等强度线（称为等照线 (isophotes)），结果如图 8.41 所示[2]。

特别重要的是，衍射象的亮中心部分具有管状结构，这在图中可以清楚地看到，而泰勒[3]在 1894 年就已根据实验提出过它。正是这个结构，决定着成象系统中接收面的装配公差。

现在我们来讨论几种重要的特别情况。

(a) 几何焦平面上的强度分布

当观察点在几何焦平面上时，$u=0$，(21a) 化为

$$I(0, v) = 4 \lim_{u \to 0}\left[\frac{U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v)}{u^2}\right] I_0, \qquad (23)$$

---

1) 有关实验在下列文章中亦有报导：M. E. Hufford and H. T. Davis, *Phys. Rev.*, **33** (1926), 589; C. A. Taylor and B. J. Thompson, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48** (1958), 844. 在微波方面，也有人作了类似实验，圆孔情况的，见 M. P. Bachynski and G. Bekefi, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47** (1957) 428，矩孔情况的，见 P. A. Mathews and A. L. Cullen, *Proc. Inst. Elect. Engrs. Pt. C.*, **103** (1956), 449.

2) M. Berek (*Z. Phys.*, **40** (1926), 421) 曾发表过一个类似的、但不太详细的线图．这图在一些书中转载有误(几何阴影区位置不对，两个轴也弄颠倒了)．F. Zernike 和 B. R. A. Nijboer 在一篇专稿(见 *La Théorie des Images Optiques*, Paris, *Revue d'Optique* (1949), p. 227) 中给出了另一种线图，式样虽异，但实际与图 8.41 一致．他们的讨论是根据一个不同的，但是是等效的衍射积分展开式(见本书§9.4，方程 (12)) A. Boivin 等人则根据电磁理论，计算了相应的电能密度和能流，作出了它们的恒值线图，见 A. Boivin and E. Wolf, *Phys. Rev.* **138** (1965), B.1561 和 A. Boivin, J. Dow and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **57** (1967), 1171.

E. H. Linfoot 和 E. Wolf (*Proc. Phys. Soc.*, B, **66** (1953), 145)，报导了环孔情况的同类线图．A. Boivin (*J. Opt. Soc. Amer.*, **42** (1952), 60) 讨论了把 Lommel 的分析推广到一组同心环孔所产生的衍射．

3) H. D. Taylor, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **54** (1894), 67.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

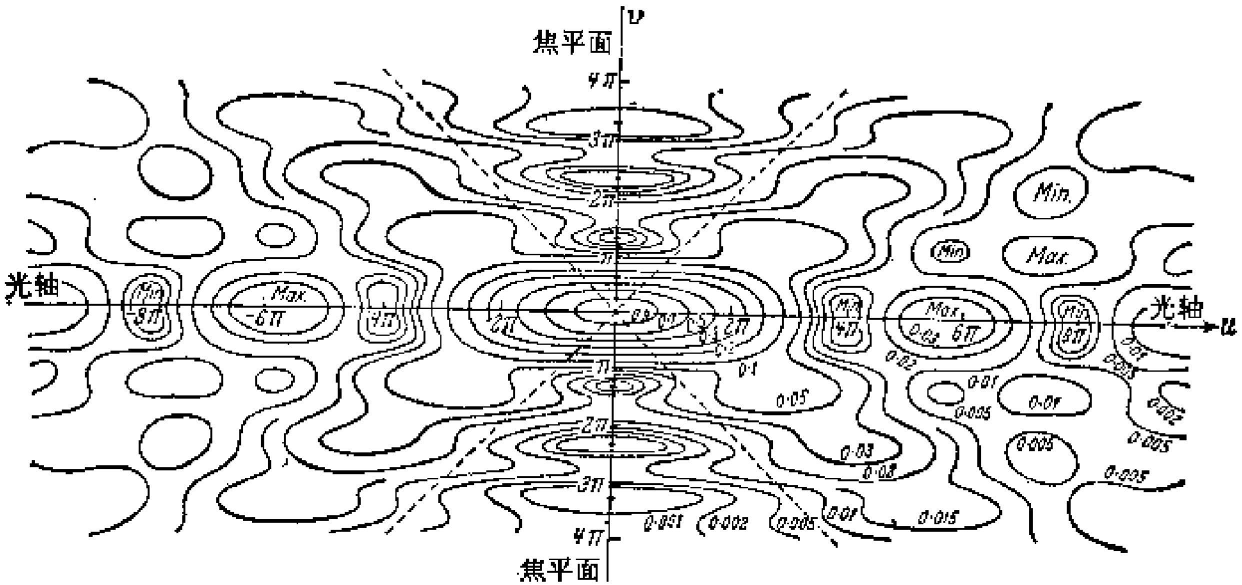


图 8.41 圆孔衍射会聚球面波子午面上焦点附近的等照线 [强度 $I(u, v)$ 的恒值线]。焦点的强度取作 1 (归一化). 虚线代表几何阴影区的边界. 当图形绕 u 轴转动时，v 轴上的各极小值即产生爱里暗环. 图中 max 代表极大，min 代表极小

[引自 E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **69** (1956), 823 改作.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

从函数 U_n 的定义方程可以得出

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{U_1(u,v)}{u}\right]=\frac{J_1(v)}{v},\quad \lim_{u\to 0}\left[\frac{U_2(u,v)}{u}\right]=0,\qquad (24)$$

所以

$$I(0,v)=\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 I_0.\qquad (25)$$

这样,我们就得到以前圆孔夫琅和费衍射的爱里公式,这是理所当然的。

(b) 轴上的强度分布

当观察点在轴上时,$v=0$,(21b) 中的两个 V_n 函数化为

$$V_0(u,0)=1,\quad V_1(u,0)=0.$$

因此

$$I(u,0)=\frac{4}{u^2}\left[2-2\cos\frac{1}{2}u\right]I_0=\left(\frac{\sin u/4}{u/4}\right)^2 I_0.\qquad (26)$$

这样，轴上的强度分布是由函数 $(\sin x/x)^2$ 来表征的。 这个函数我们在 §8.5.1 矩孔夫琅和费衍射中已经讨论过了。轴上强度的第一个零值由 $u/4=\pi a^2 z/2\lambda f^2=\pm\pi$ 来决定，即它离焦点的距离 $z=\pm f^2\lambda/2a^2$。

通常认为,强度比象斑中心低大约 20% 还是可允许的。因为当接收面从中心位置 ($u=0$) 移到 $u\sim 3.2$ 时，$\left(\frac{\sin u/4}{u/4}\right)^2$ 即减小 20%，所以焦点公差 Δz 近似为

$$\Delta z=\pm 3.2\frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{f}{a}\right)^2\sim\pm\frac{1}{2}\left(\frac{f}{a}\right)^2\lambda.\qquad (27)$$

例如,对于一个 $f/10$ 的光线锥 ($f/a=20$)，当光的波长 $\lambda=5\times 10^{-5}$ 厘米时,焦点公差约为 $\pm 0.5\times 20^2\times 5\times 10^{-5}$ 厘米 $=\pm 0.1$ 毫米。

(c) 几何阴影边界上的强度分布

当观察点在几何阴影边界上时,$u=\pm v$。因为强度分布对几

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

何焦平面是对称的，所以我们可取 $u=+v$ 而不有失一般性．于是，函数 U_n 化为

$$U_1(u,u)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s J_{2s+1}(u),\quad U_2(u,u)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s J_{2s+2}(u). \tag{28}$$

这里要用到共知的雅科毕(Jacobi)恒等式[1]：

$$\left.\begin{aligned}\cos(u\cos\theta)&=J_0(u)+2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s J_{2s}(u)\cos 2s\theta,\\ \sin(u\cos\theta)&=2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s J_{2s+1}(u)\cos(2s+1)\theta.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

令 $\theta=0$，并同(28)式相比较，得到

$$\left.\begin{aligned}U_1(u,u)&=\frac{1}{2}\sin u,\\ U_2(u,u)&=\frac{1}{2}[J_0(u)-\cos u],\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

因而(21a)化为

$$I(u,v)=\frac{1-2J_0(u)\cos u+J_0^2(u)}{u^2}I_0. \tag{31}$$

这函数的曲线如图 8.42 所示。

§8.8.3　积分强度

现在设在接收面($u=$常数)上，以轴点为中心，以预定的 r_0 为半径，作一小圆，试求落在此小圆内的(时间平均)能量百分数 L．设

$$E=\pi a^2\left(\frac{A}{f}\right)^2 \tag{32}$$

代表在单位时间内入射到圆孔上的总能量，则所求的能量百分数

$$L(u,v_0)=\frac{1}{E}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}I(u,v)r\,dr\,d\phi$$

1) 例如，见 G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1922) p. 22.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

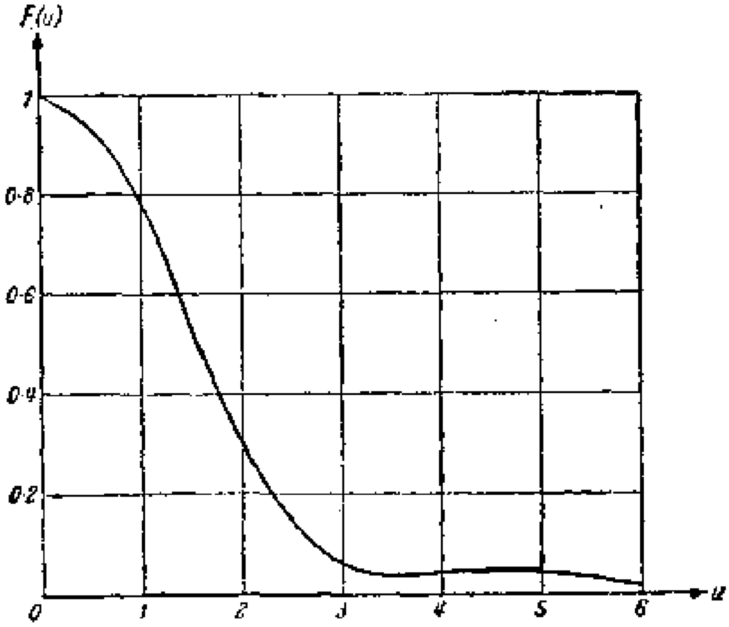


图 8.42 沿几何阴影边界上的强度变化

函数 $F(u) = \dfrac{1 - 2J_0(u)\cos u + J_0^2(u)}{u^2}$

$$= \frac{1}{2I_0}\int_0^{v_0} I(u, v)v\,dv, \tag{33}$$

式中

$$v_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{f}\right)r_0. \tag{34}$$

如果把洛梅耳的强度表达式(21)代入(33)式，则可将此积分展开成贝塞耳函数组成的级数。这推导是冗长的，因此我们将仅仅给出沃耳夫[1]计算的最后结果。

结果仍旧包含两个形式不同的表达式，一个适用于小圆边界在几何阴影区内，另一个则适用于小圆边界在直接光束中。如取消下标 0，即以 v 代替 v_0，则在第一种情况下 $(|v/u| \geqslant 1)$，

$$L(u, v) = 1 - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1}\left(\frac{u}{v}\right)^{2s} Q_{2s}(v), \tag{35a}$$

式中

1) E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A, **204** (1951), 533. J. Focke, *Optica Acta*, **3** (1956), 161 推导了 $L(u, v)$ 的渐近近似式。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$Q_{2s}(v)=\sum_{p=0}^{2s}(-1)^p[J_p(v)J_{2s-p}(v)+J_{p+1}(v)J_{2s+1-p}(v)].\quad(36)$$

在第二种情况下（$|v/u|\leqslant 1$），

$$L(u,v)=\left(\frac{v}{u}\right)^2\left[1-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\left(\frac{v}{u}\right)^{2s}Q_{2s}(v)\right]$$
$$-\frac{4}{u}\left[Y_1(u,v)\cos\frac{1}{2}\left(u+\frac{v^2}{u}\right)\right.$$
$$\left.+Y_2(u,v)\sin\frac{1}{2}\left(u+\frac{v^2}{u}\right)\right],\quad(35b)$$

式中 $Q_{2s}(v)$ 仍由(36)式给出，而 Y_1 和 Y_2 是下列函数 Y_n 中的两个：

$$Y_n(u,v)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(n+2s)\left(\frac{v}{u}\right)^{n+2s}J_{n+2s}(v)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{u}V_{n-1}(u,v)+uV_{n+1}(u,v)\right].\quad(37)$$

从这些公式可计算 $L(u,v)$ 的恒值线，结果如图 8.43 所示。可以认为它们和几何光学的光线有几分类似。

可以注意，在特别情况下，当接收面同焦平面（$u=0$）重合时，(35a) 化为

$$L(0,v)=1-Q_0(v)=1-J_0^2(v)-J_1^2(v),\quad(38)$$

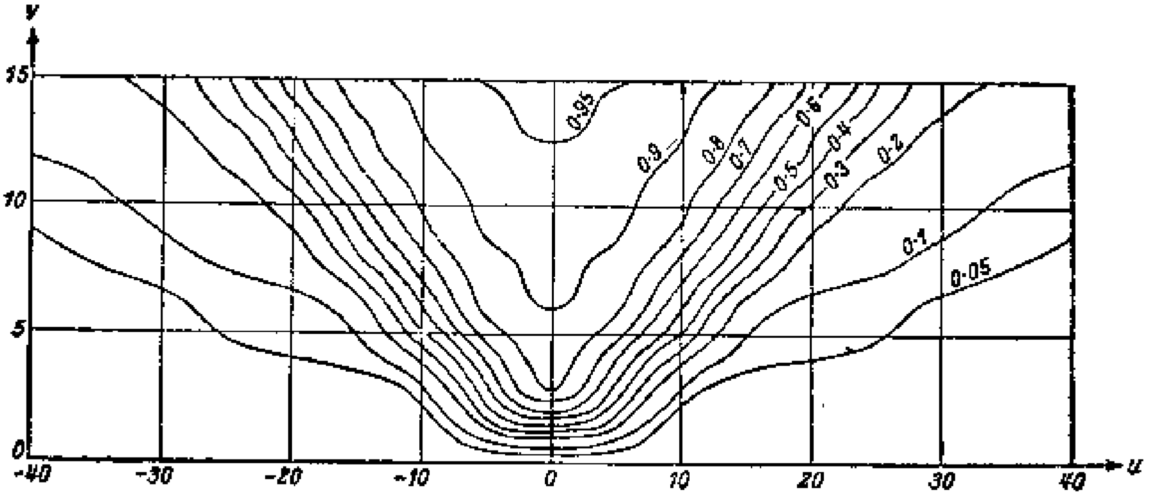


图 8.43　在选定接收面（$u=$ 常数）上，轴心小圆所接收到的能量百分数 $L(u,v)$ 的恒值线

[引自 E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A **204** (1951), 542.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

和瑞利公式 § 8.5(18) 一致.

特别有意义的情况是,(33) 式的圆积分区和几何光锥的横截面相重合. 这时,$|v/u| = 1$,并且(35a)和(35b)式中的级数可行求和,结果[1]

$$L(u, v) = 1 - J_0(u)\cos u - J_1(u)\sin u, \tag{39}$$

所以,在接收面(u = 常数)上,落在几何阴影区的能量百分数为

$$\varepsilon(u) = J_0(u)\cos u + J_1(u)\sin u. \tag{40}$$

图 8.44 画出了函数 $\varepsilon(u)$;它并非单调地减小,而是,当 $J_1(u) = 0$ 时具有极大($u = 0$ 除外),当 $\sin u = 0 (u \neq 0)$ 时具有极小.

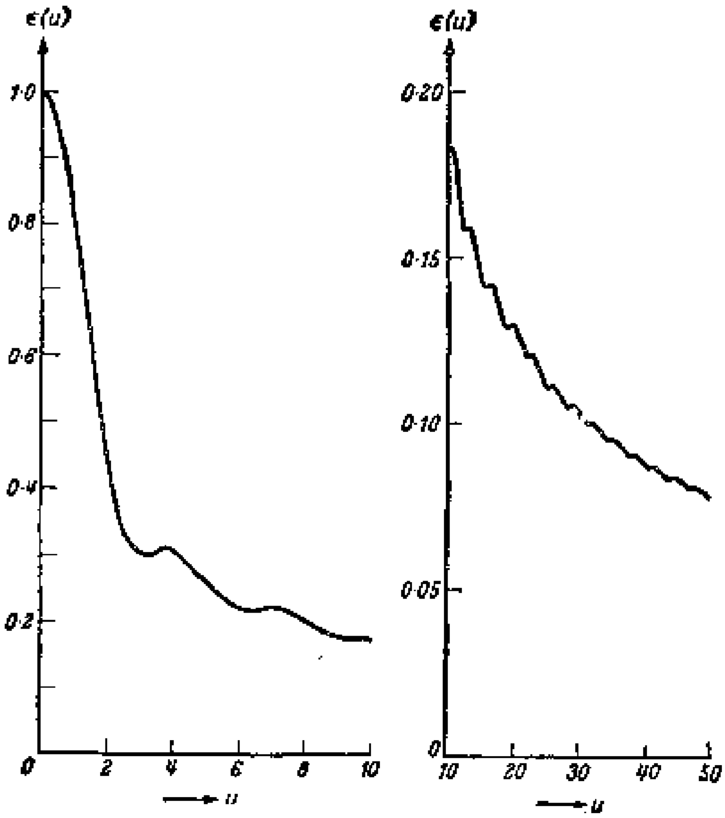


图 8.44 几何阴影区内所接收到的能量百分数 $\varepsilon(u)$
[引自 E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A **204** (1951), 544.]

§ 8.8.4 位相特性

最后,我们讨论焦点附近扰动的位相特性. 按照(12)和(13)

1) E. Wolf, *loc. cit.*, p. 539.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

两式，如果不管附加项 $(-\omega t)$，则位相[1)]

$$\phi(u, v) = \left(\frac{f}{a}\right)^2 u - \chi(u, v) - \frac{\pi}{2}, \quad (\bmod\ 2\pi), \tag{41}$$

式中

$$\cos\chi = \frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}}, \quad \sin\chi = \frac{S}{\sqrt{C^2 + S^2}}, \tag{42}$$

在(42)式中，平方根取正号.

可以注意，位相分布和强度分布不一样，它不能只用 u 和 v 来表示，而是具有一个和几何光锥角孔径有关的结构. 此外，还可以看出，在强度不为零的那些点，多值函数 $\phi(u, v)$ 的每一"分支"都是 u 和 v 的连续函数，而在强度为零的那些点，它是不确定的. 在焦点 $u = v = 0$ 处，它的一个值是 $-\pi/2$.

当然，等相面（ϕ = 常数的面）是绕 u 轴的旋转面. 现在，我们来证明这些等相面还具有另外一种对称性，由下列关系表出：

$$\phi(-u, v) + \phi(u, v) = -\pi \quad (\bmod\ 2\pi). \tag{43}$$

由(14)式，

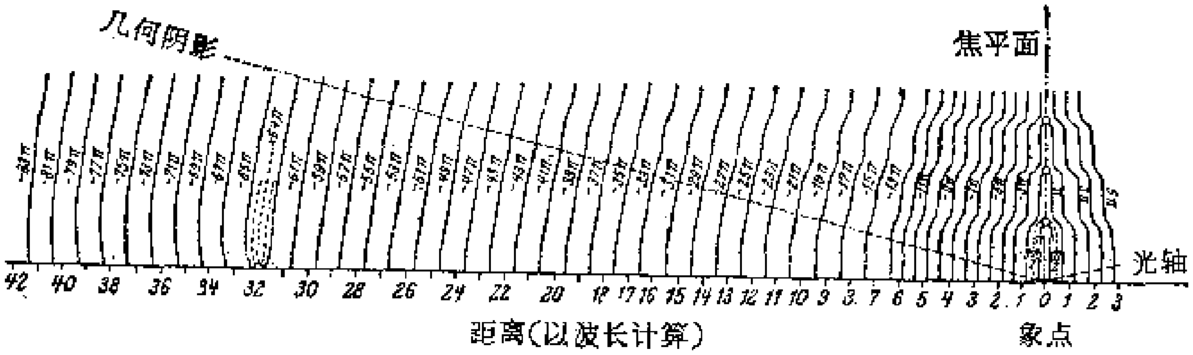


图 8.45　几何焦点附近等相面 $\phi(u,v)$ = 常数的断面图，计算数据：$\lambda = 5\times10^{-5}$ 厘米，$a = 2.5$ 厘米，$f = 10$ 厘米.

[引自 G. W. Farnell, *Canad. J. Phys.*, **35** (1957), 780.][2)]

---

1) 一个方程，右边加上符号 mod 2π 时，表示这方程两边可差一常数 $2m\pi$，m 是任意整数.

2) 图 8.45 中各等相面上的数值，和 Farnell 论文中的差 π. 这是因为要使此图和我们的分析一致，故按照(51)式将焦点的位相取为 $-\pi/2$，而法内耳(Farnell)论文中取为 $+\pi/2$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$C(-u,v)=C(u,v),S(-u,v)=-S(u,v). \qquad (44)$$

于是由(42)式可知

$$\cos\chi(-u,v)=\cos\chi(u,v),\ \sin\chi(-u,v)=-\sin\chi(u,v), \qquad (45)$$

所以

$$\chi(-u,v)=-\chi(u,v). \qquad (46)$$

从(46)和(41)式即可得到(43)式. 因此,等相面 $\phi=\phi_0$ 和 $\phi=-\pi-\phi_0$(ϕ_0 任意)以平面 $u=0$ 为反射对称面.

图 8.45 是一个 $f/2$ 共心光锥的等相面断面图. 在远离焦点处,这些面和几何光学的球面波阵面相重合,但是当接近焦点区时,这些面就畸变得越来越厉害. 在紧靠几何焦平面处,等相面的断面如图 8.46 所示. 可以看到,在贴近焦点时,等相面实际上是平面;然而,它们的间距只是同波长平行光束中等相面间距的 $(1-a^2/4f^2)$ 倍. 此外(见图 8.41),在每个等相面上,强度并不是均匀的.在紧靠爱里暗环(在图 8.46 中,用 R_1 和 R_2 表示)处,等相面显示有更复杂的特性.从几何焦点向 v 方向看去,在任何两个联号暗环之间,位相都是常数,但是在通过每个暗环时,位相陡然改变 π. 从几何焦平面上复扰动 $U(0,v)$ 的表达式可以看出,这必须如此. $U(0,v)$ 表达式很容易借助(24),(41)和(46)式推出,结果如下:

$$U(0,v)=\frac{1}{i}\frac{2J_1(v)}{v}\sqrt{I_0}. \qquad (47)$$

此式对于所有 v 值都是纯虚式,所以 $U(0,v)$ 的位相只能等于 $-\pi/2$ 或 $+\pi/2(\mathrm{mod}\ 2\pi)$,而在通过每个暗环时,$U(0,v)$ 改变符号,所以位相这时必定受到 π 的突变. 位相的这种不连续——π的突变,在通过强度为零的每一轴点时也都发生.

现在来研究,当观察点沿着通过焦点的每条光线移动时,场的位相如何改变,这也是有意义的. 把这位相变化同一个球面波(它在 $z<0$ 半空间中会聚于焦点,在 $z>0$ 半空间中发散于焦点)的相应位相变化相比较,更为方便. 如果这个比较波的位相 $\tilde{\phi}$ 在焦点处取为零,则

$$\tilde{\phi}(u,v)=\left.\begin{aligned}&-kR \quad 当\ u\leqslant 0,\\&+kR \quad 当\ u\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

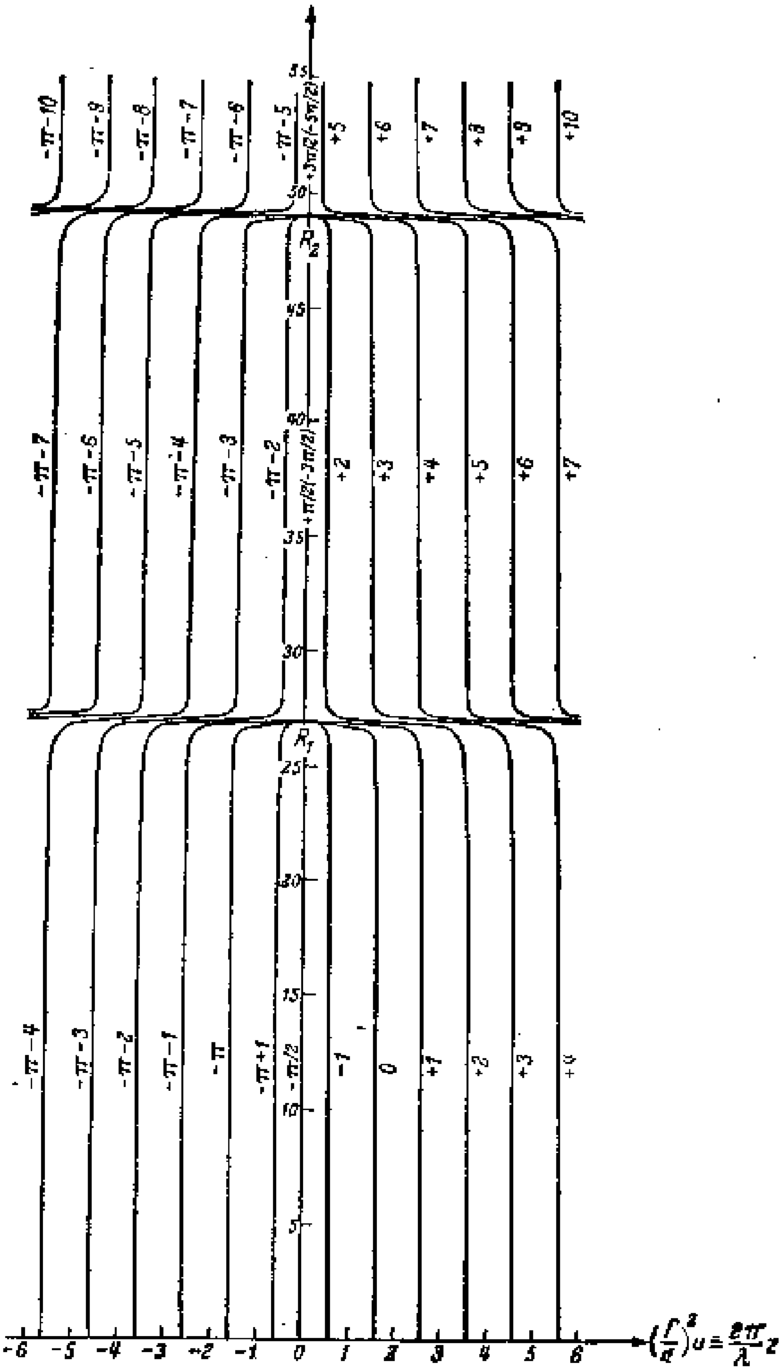


图 8.46 $f/3.5$ 共心光锥在紧靠几何焦平面区域的等相面断面图．
OR_1 和 OR_2 分别是第一和第二爱里暗环的半径

[引自 E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **69** (1956), 827.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

同前，式中 $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ 是观察点离焦点的距离．ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 之差

$$\delta(u, v)=\phi(u, v)-\tilde{\phi}(u, v) \tag{49}$$

称为**位相异常**．

由(43)，(48)和(49)式得到

$$\delta(-u, v)+\delta(u, v)=-\pi \pmod{2\pi}, \tag{50}$$

而在焦点本身地方，

$$\delta(0, 0)=\phi(0, 0)=-\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \tag{51}$$

图 8.47 示出了一个 $f/3.5$ 共心光锥沿六条选定光线(均通过光锥

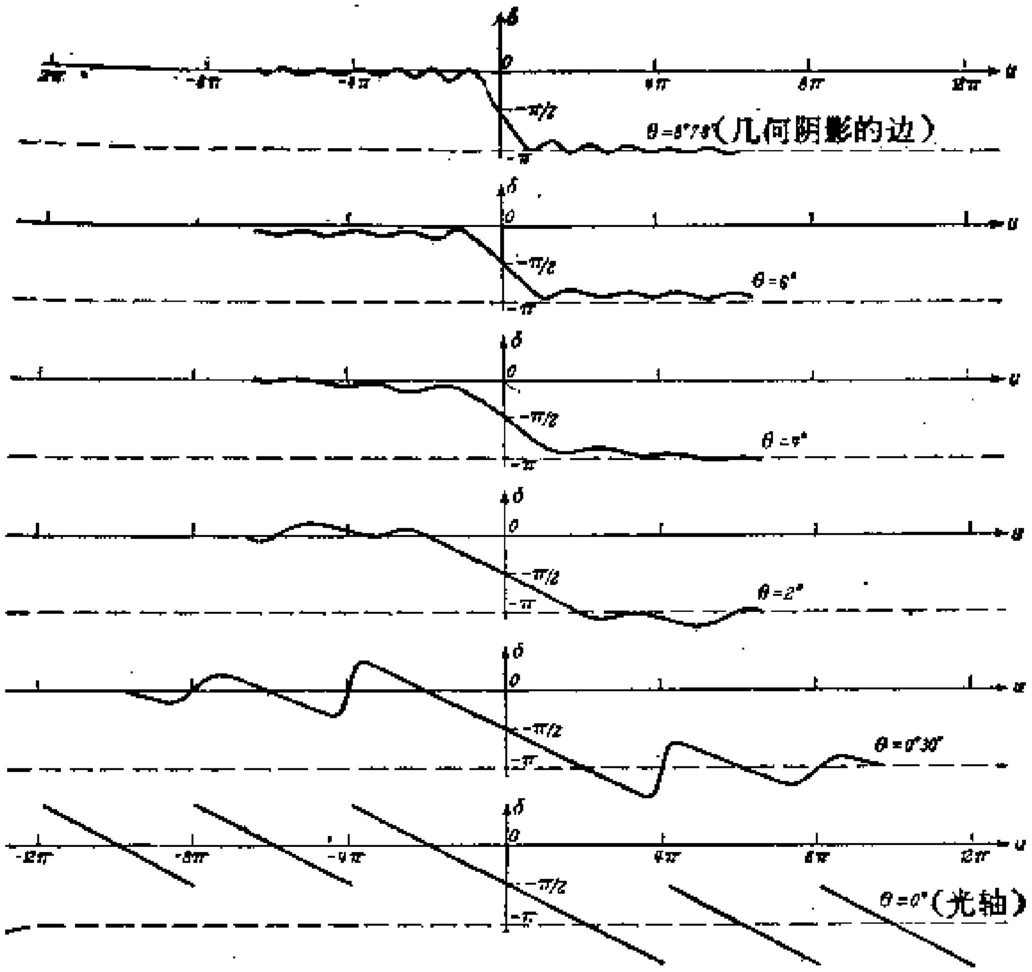


图 8.47 $f/3.5$ 共心光锥沿六条几何光线(均通过光锥焦点)的位相异常，θ 角代表光线对光轴的倾角

[引自 E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B **69** (1956), 827.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

焦点)的位相异常特性.

此图表明,除轴向光线外,其它光线在通过焦点时,δ 都经受一个急速但是连续的 π 的位相变化. 戈维(L. G. Gouy)[1] 在很早以前就观察到了这一效应,之后它成为许多研究的课题[2]. 沿光轴方向,位相异常具有奇特的性质: 它在 0 和 $-\pi$ 之间周期地变动.

如果对 k 很大(波长很小)时惠更斯-菲涅耳积分的渐近近似式进行分析,则可证明,当光沿某一光线前进,通过相关波阵面的两个主曲率中心之一时,位相将突然改变 $\pi/2$[3]. 上面我们所讨论的情况,相当于两个曲率中心重合时的特殊情形. 这样,位相的半周期改变,即使在几何光学的解中,也是存在的[4]. 图 8.47 说明,当考虑了波长的有限大小时,几何光学的不连续性如何转变成连续的过渡. 最后,可提及法内耳的一篇论文[5],这篇论文介绍了对微波透镜焦点区域位相分布结构的实验研究;所得结果和理论预期相符极好.

§8.9 边界衍射波

如果从衍射孔或障碍物的几何阴影区内去观察它的边,可看到它是发亮的. 这个结果托马斯·杨那时已经知道了[6]. 还在菲涅耳之前,他就曾试图根据波动理论来解释衍射现象. 杨氏相信,入射光在衍射物体的边上受到了某种反射,他认为衍射图样就是

---

1) L. G. Gouy, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **110** (1890), 1251; *Ann. Chem. (Phys.)* (6), **24** (1891), 145.

2) 有关文献一览,见 F. Reiche, *Ann. d. Physik*, (4), **29** (1909), 56, *ibid.*, 401. 关于近代研究的参考资料,见 E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc*, B **69** (1956), 827.

3) H. Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière*, II (Paris, Georges Carré, (1892)), pp. 168—74. 亦见, J. Walker, *The Analytical Theory of Light* (Cambridge University Press, 1904), pp. 91—93.

4) 关于这点的讨论,亦见 A. Rubinowicz, *Phys. Rev.*, **54** (1938), 931; 和 C. J. Bouwkamp, *Physica*, **7** (1940), 485.

5) G. W. Farnell, *Canad. J. Phys.*, **36** (1958), 935.

6) Thomas Young, Phil. *Trans. Roy. Soc.*, **20** (1802), 26.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由入射波和这反射"边界波"的干涉所产生. 然而，杨氏的见解只是定性表达的，所以没有赢得很多承认.

1894年，索末菲得到了平面波在半无限大平面反射屏上衍射的严格解（见§ 11.5），在这之后，人们才看到杨氏理论包含着正确的因素. 索末菲的解表明，在几何阴影区内，光是以柱面波形式传播的，显示从屏边发出，而在照明区内，光则被表成为这柱面波和原入射波的叠加.

于是产生了一个问题：是否在更普遍情况下，也能把衍射看成是入射波和边界波的叠加效应. 马吉（G. A. Maggi）在索末菲的论文出现之前，就曾研究过这个问题[1]，但他的结果看来已被人们忘记. 后来，鲁比诺威茨（A. Rubinowicz）又独立地而且更详尽地研究了这个问题[2]. 以后，米亚莫托（K. Miyamoto）和沃耳夫[3]进一步发展了马吉-鲁比诺威茨理论.

---

1) G. A. Maggi, *Annali di Matem.* (2), **16** (1881), 21. Maggi 的分析在下列论文和书中亦有讨论： F. Kottler, *Ann. d. Physik*, (4), **70** (1923), 413; B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 1950, 2nd ed.), p. 74.

边界波"存在"的实验证明见诸下列工作： W. Wien, *Inaug. Diss.*, *Berlin*, 1886; E. Maey, *Ann. d. Physik*. (9), **49** (1893), 69; 和 A. Kalaschnikow, *Journ. Russ. Phys. Chem. Ges.*, **44** (1912), *Phys*, *Teil*, 133. 亦见 S. Banerji, *Phil. Mag.* (6) **37** (1919), 112; 和 S. K. Mitra, *ibid.* (6), **38** (1919), 289.

2) A. Rubinowicz, *Ann. d. Physik*. (4), **53** (1917), 257; *ibid.* (4), **73** (1924); *ibid.*, **81** (1926), 153; *Acta Phys. Polonica*, **12** (1953), 225. 亦见 G. N. Ramachandran, *Proc. Indian Acad. Sci. A.*, **21** (1945), 165; L. C. Martin, *Proc. Phys. Soc.*, **55** (1943), 104; *ibid*, **62** B (1949), 713. Y. V. Kathavate, *ibid. A.*, **21** (1945), 177; R. S. Ingarden, *Acta Phys. Polon.*, **14** (1955), 77; O. Laporte and J. Meixner, *Zeitschr. f. Phys.*, **153** (1958), 129.

有关边界波的研究，在 A. Rubinowicz 的书中记述甚广，见 *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen der Beugung* (Warszawa, Polska Akademia Nauk, 1957)

3) K. Miyamoto and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52** (1962) 615, 626; K. Miyamoto, *Proc. Phys. Soc.*, **79** (1962), 617. 亦见 E. W. Marchand and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52** (1962), 761; A. Rubinowicz, *ibid.*, **52** (1962) 717; *Acta Phys. Polonica* **21** (1962), 61, 451; *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons. 1965), p. 199.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

考虑一单色光波，它从点源 P_0 发出，传播通过不透明平面屏上的一个开孔. 同前，假定孔的线度比波长大得多，但比 P_0 和观察点 P 离屏的距离又都小很多，并假定入射角和衍射角均很小. 于是，在基尔霍夫理论近似（§ 8.3.2）下，有

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathscr{A}}\left\{\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\}dS, \quad (1)$$

式中 $\mathscr{A}$ 代表衍射孔，而其它符号意义同前. 现在我们作一闭合面，它包括下列三部分：(1) 开孔 $\mathscr{A}$，(2) 截锥（锥顶在 P_0，母线通过孔边）表面 $\mathscr{B}$，(3) 以 P 点为球心的大球的部分球面 $\mathscr{C}$（图 8.48）. 设 R 代表从 P_0 到 P 的距离，则由基尔霍夫积分定理严格地得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathscr{A}+\mathscr{B}+\mathscr{C}}\left\{\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\}dS=\frac{e^{ikR}}{R}\ \text{或}\ 0, \quad (2)$$

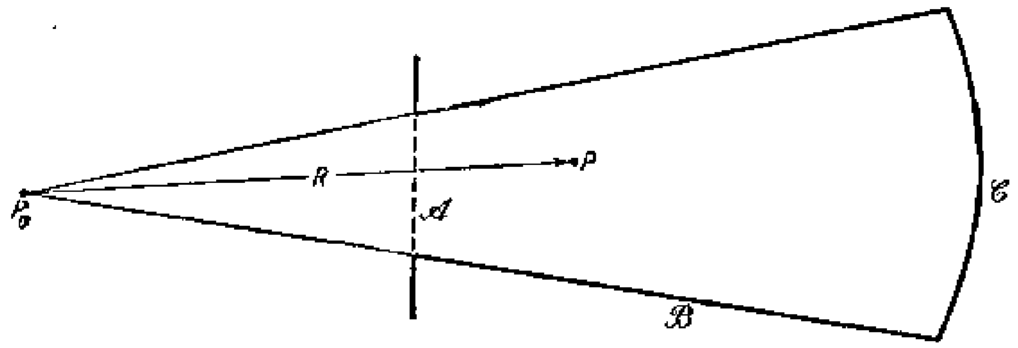


图 8.48　边界衍射波的推导

其中 e^{ikR}/R 对应于 P 点在闭合面内，O 对应于 P 点在闭合面外. 现在采取 § 8.3.2 中的方法，令球的半径足够大，则 $\mathscr{C}$ 部分的贡献可予忽略. 于是，从 (1) 和 (2) 式得到

$$U(P)=U^{(g)}(P)+U^{(d)}(P), \quad (3)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}U^{(g)}(P)&=\frac{e^{ikR}}{R}\quad \text{当 } P \text{ 点在直接光束中时},\\ &=0\quad \text{当 } P \text{ 点在几何阴影内时},\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

而

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U^{(d)}(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathscr{B}}\left\{\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\}dS. \quad (5)$$

$U^{(g)}$ 代表从几何光学来看应得的扰动，因而 $U^{(d)}$ 必须代表衍射效应。现在我们来证明，$U^{(d)}$ 可变换成一个沿孔边的线积分。

首先可以注意，$r=$ 常数的球面和截锥 $\mathscr{B}$ 垂直切割。因此，在 $\mathscr{B}$ 上，

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)=0. \quad (6)$$

此外，

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)\cos(n,s)=\left(\frac{ik}{s}-\frac{1}{s^2}\right)e^{iks}\cos(n,s). \quad (7)$$

由此(5)式化为

$$U^{(d)}(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathscr{B}}\frac{e^{ik(r+s)}}{rs}\left(ik-\frac{1}{s}\right)\cos(n,s)dS. \quad (8)$$

我们可以取图 8.49 中 $ABB'A'$ 面积作为面元 dS，其中 AB 和 $A'B'$ 是相邻两段母线，AA' 和 BB' 是 $r=$ 常数和 $r+dr=$ 常数两球面与截锥相交的两段圆弧。设 $d\phi$ 是这两条母线的夹角，则

$$dS=rdrd\phi. \quad (9)$$

设 Q 和 Q' 是该二母线和孔边 Γ 的交点，dl 是这两点间边 Γ 的元长。若以 $r_1=P_0Q$ 为半径作一球面，与截锥相交于一圆，相

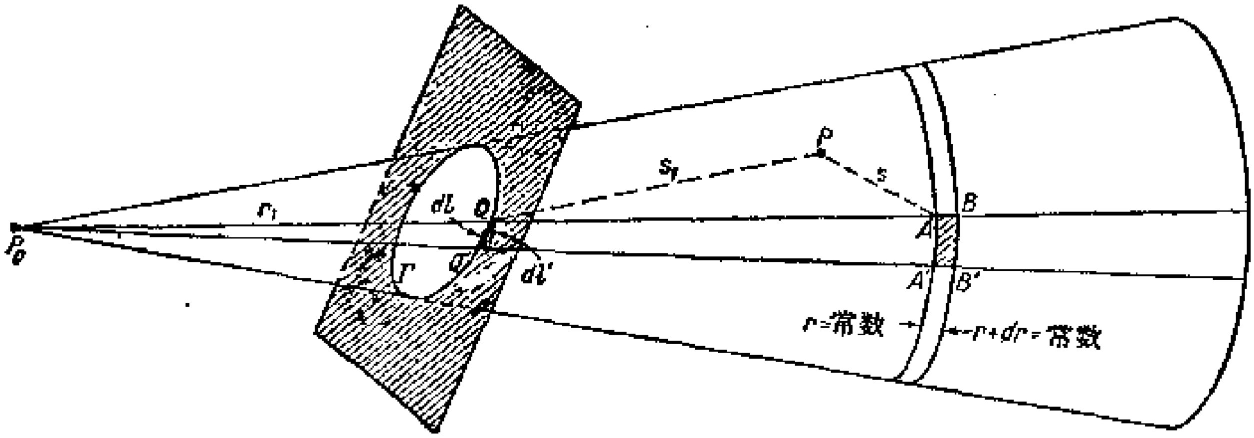


图 8.49 边界衍射波的推导

$P_0A=r$, $P_0Q=r_1$, $PA=s$, $PQ=s_1$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

应圆弧元以 dl' 代表，则

$$dl' = r_1 d\phi = dl\cos(dl, dl') = dl\sin(r_1, dl). \tag{10}$$

从(9)和(10)式，

$$dS = \frac{r}{r_1}\sin(r_1, dl)\,dr\,dl. \tag{11}$$

此外，分别取 PA、PQ 线段在 A、Q 点截锥法线上的投影（这两点的法线是平行的），得到

$$s\cos(n, s) = s_1\cos(n, s_1). \tag{12}$$

将(11)和(12)式代入(8)式，结果

$$\begin{aligned} U^{(d)}(P) &= -\frac{1}{4\pi}\iint_{\text{锥}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs}\left(ik - \frac{1}{s}\right)\frac{s_1}{s} \\ &\quad \times \cos(n, s_1)\frac{r}{r_1}\sin(r_1, dl)\,dr\,dl \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma dl\,\frac{s_1}{r_1}\cos(n, s_1)\sin(r_1, dl) \\ &\quad \times \int_r^\infty e^{ik(r+s)}\left(\frac{ik}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right)dr. \end{aligned} \tag{13}$$

下面我们来证明，(13)式中第二项积分的被积函数是一个全微分，即

$$e^{ik(r+s)}\left[\frac{ik}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right] = \frac{d}{dr}\left\{\frac{e^{ik(r+s)}}{s[s + r - r_1 + s_1\cos(s_1, r_1)]}\right\}. \tag{14}$$

计算出(14)式右边的微商，有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left\{\frac{e^{ik(r+s)}}{s[s + r - r_1 + s_1\cos(s_1, r_1)]}\right\} \\ &= \frac{e^{ik(r+s)}}{s[s + r - r_1 + s_1\cos(s_1, r_1)]}\left\{ik\left(1 + \frac{ds}{dr}\right) - \frac{1}{s}\frac{ds}{dr}\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(s + r - r_1 + s_1\cos(s_1, r_1))}\cdot\left[1 + \frac{ds}{dr}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

由三角形 APQ，

$$s^2 = s_1^2 + (r - r_1)^2 + 2s_1(r - r_1)\cos(s_1, r_1), \tag{16}$$

对 r 微商，同时令 r_1 和 s_1 保持不变，得到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$s\frac{ds}{dr}=r-r_1+s_1\cos(s_1,r_1). \qquad (17)$$

将此式代入(15)式,即得到恒等式(14). 因此

$$\int_r^\infty e^{ik(r+s)}\left(\frac{ik}{s^2}-\frac{1}{s^3}\right)dr=\left[\frac{e^{ik(r+s)}}{s(s+r-r_1+s_1\cos(s_1,r_1))}\right]_{r_1}^\infty$$

$$=-\frac{e^{ik(r_1+s_1)}}{s_1^2[1+\cos(s_1,r_1)]}, \qquad (18)$$

(13)式最后变成

$$U^{(d)}(P)=\frac{1}{4\pi}\oint_\Gamma\frac{e^{ik(r_1+s_1)}}{r_1s_1}\cdot\frac{\cos(n,s_1)}{[1+\cos(s_1,r_1)]}\sin(r_1,dl)dl. \qquad (19)$$

这个公式,加上(3)、(4)两式,是基尔霍夫衍射积分的鲁比诺威茨表示,并且可以看作是杨氏理论的数学表述. 它用入射波和边界衍射波来表达衍射效应,其中入射波按照几何光学的规律传播,而边界衍射波则可设想是入射辐射在孔边上散射所产生.

因为U是位置的连续函数,故由(4)式可知,边界衍射波$U^{(d)}$在通过几何阴影边界时是不连续的,这样才能抵消"几何波"$U^{(g)}$中的不连续性. $U^{(d)}$的这一不连续性产生于(19)式分母的$[1+\cos(s_1,r_1)]$因子.

在(19)式的积分区中,只有被积函数位相是稳定的那些点,实际才对$U^{(d)}$有贡献. 这一点我们在505页谈到衍射现象的分类时曾作过论证,附录3在说明稳定相原理的物理意义时亦有叙及.因此,在积分(19)中,实际有贡献的点应满足下列关系:

$$\frac{d}{dl}[k(r_1+s_1)]=0. \qquad (20)$$

这个关系也可以写成"反射定律"的形式,即

$$\cos(r_1,dl)=-\cos(s_1,dl). \qquad (21)$$

§8.10 加伯的波前[1]重现成象方法(全息学)

为了设法提高电子显微镜的分辨能力,加伯提出了一种两步

1) "波前"即"波阵面"(Wave-front)——译者注

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光学成象法[1]．第一步，用相干电子波或相干光波照射目的物．此物体系假定可让大部分波从其中直行穿过不受干扰[2]． 物体的存在所引起的次级波，同这强背景波发生干涉，形成一种衍射图样，称为**全息图**，记录在照相底版上．如果底版经适当处理后，再按原状置于原处，并单独由背景波照射，则底版所透过的波就含有原物体的信息，这可用光学方法从照片中取出．为了从这“代替”波中“重现”出物体，只须令这波通过适当的成象系统，这时将有一个象出现于原物体所在平面的共轭平面上．下面我们将只讨论本法所包含的光学原理[3]．

§8.10.1 正全息图的制作

考虑一单色波，它从小光源 S 发出，投射在一半透明物体 σ 上（图 8.50(a)）．设在此物体后面某距离处有一屏 $\mathscr{H}$，并设屏上某代表点的复扰动为 $U=Ae^{i\psi}$，A 为(实)振幅，ψ 为扰动的位相．我们可以把 U 看作是两项之和，即

$$U=U^{(i)}+U^{(s)}=e^{i\psi_i}[A^{(i)}+A^{(s)}e^{i(\psi_s-\psi_i)}], \tag{1}$$

式中 $U^{(i)}=A^{(i)}e^{i\psi_i}$ 代表**入射波(即相干背景波)**；它是没有物体时屏 $\mathscr{H}$ 上应产生的场．另一项 $U^{(s)}=A^{(s)}e^{i\psi_s}$ 代表**次级波**，即**衍射波**．正是这个波，包含着物体的信息．按照(1)式，总扰动 U 的振幅用分扰动的振幅和位相来表示时，可写成为

$$A=\sqrt{UU^*}=\sqrt{A^{(i)2}+A^{(s)2}+2A^{(i)}A^{(s)}\cos(\psi_s-\psi_i)}. \tag{2}$$

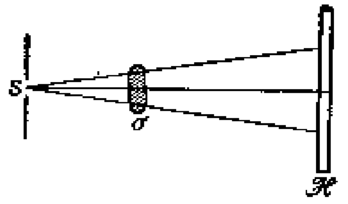
---

1) D. Gabor, *Nature*, **161** (1948), 777; *Proc. Roy. Soc.*, *A*, **197** (1949), 454; *Proc. Phys. Soc.*, *B*, **64** (1951), 449.

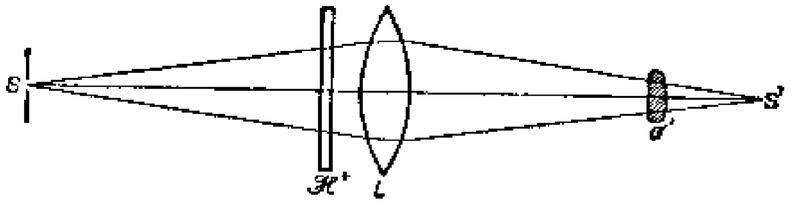
2) 此即意指，如将波表成为入射波和衍射次级波之和，则次级波的散射可予忽略．这种忽略就是通常所说的玻恩第一级近似，它在X射线散射和电子散射理论中有很多应用．关于这一近似在电子显微术和电子干涉量度学中的有效范围，见 D. Gabor, *Rev. Mod. Phys.*, **28** (1956), 260.

3) 关于这一问题的详细论述，以及关于这一技术的种种修改和应用的叙述，可参看 J. B. DeVelis and G. O. Reynolds, *Theory and Application of Holography* (Reading, Mass, Addison-Wesley Publishing Company, 1967) 和 H. M. Smith, *Principles of Holography* (New York, J. Wiley and Sons, 1969).

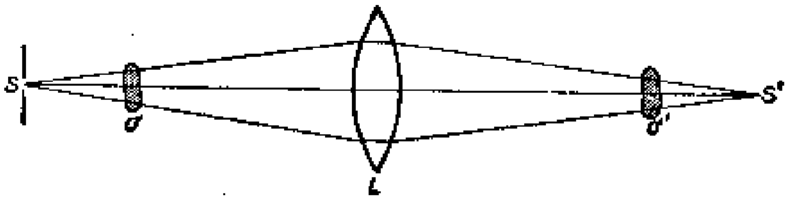
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a) 拍摄全息图



(b) 重现



(c) 等效的一步成象

图 8.50 加伯波前重现成象方法图示

和往常一样，这里我们略去了时谐因子 $e^{-i\omega t}$，这内中也就假定，物体所发的次级波是和入射波同频率的．这种物体称为**瑞利散射体**；实际上所有不发荧光的物体，都很好地近似于这种物体．

现在，假设在 $\mathscr{H}$ 平面处放上一块照相底版．设 a 是底版的**透射因子**，其定义和§ 8.6.1 中透射函数 F 相类似，即底版上出射波和入射波的复振幅之比．相应的强度透射因子为 $\tau = aa^*$；而量

$$D = -\log_{10}\tau = -\log_{10}aa^* \tag{3}$$

称为底版**黑度**．底版所接收到的光的强度 $I = A^2$ 和曝光时间 t 的乘积

$$E = It \tag{4}$$

简称为**曝光量**（或光和），而 D 对 $\log_{10}E$ 的曲线通常称为赫特-德里

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

菲耳德(Hurter-Driffield)曲线;这曲线的典型形状如图 8.51 所示.在 P、Q 两点之间,曲线实际上是一直线,设其斜率为 Γ,则负片黑度显然为

$$D = D_0 + \Gamma \log_{10} \frac{E}{E_0}, \tag{5}$$

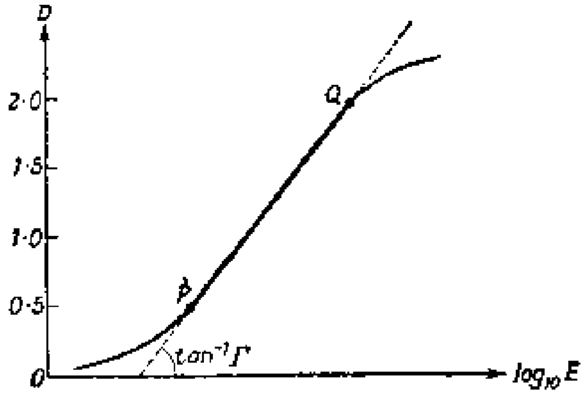


图 8.51 赫特-德里菲耳德曲线(照相响应曲线)

式中 D_0 和 E_0 是常数. 利用(3)式,得到

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\Gamma}. \tag{6}$$

对纯吸收来说,当没有位相变化时,a 是一实数,就是强度透射因子的平方根 $\sqrt{\tau}$. 在这种情况下,"负全息图"的振幅透射因子 a_n 由如下关系给出:

$$a_n = (K_n A)^{-\Gamma_n}, \tag{7}$$

式中 K_n 和曝光时间的平方根成正比.

现在假定我们从负全息图印出正片. 正片的振幅透射因子

$$a_p = [K_p(K_n A)^{-\Gamma_n}]^{-\Gamma_p} = KA^{\Gamma}, \tag{8}$$

式中 $\Gamma = \Gamma_n \Gamma_p$ 是负片-正片过程的"通计 γ"(Overall gamma),而 $K = K_p^{-\Gamma_p} K_n^{\Gamma}$.

§ 8.10.2 重现

在重现过程中(图 8.50(b)),正全息图 $\mathscr{H}^+$(其振幅透射因子由(8)式给出)单独用相干背景波 $U^{(i)}$ 照射. 这背景波很容易获

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

得，只要取走原物体而同时令其它部件布局保持不变即可．这样，底版所透过的是一个代替波 U'，按照(2)和(8)式，U' 由下式表出：

$$U' = \alpha_p U^{(i)} = KA^{(i)}e^{i\psi_i}[A^{(i)^2} + A^{(s)^2} + 2A^{(i)}A^{(s)}\cos(\psi_s - \psi_i)]^{\frac{1}{2}\Gamma}. \tag{9}$$

如若我们选取 $\Gamma = 2$，则

$$U' = KA^{(i)^2}e^{i\psi_i}\left[A^{(i)} + \frac{A^{(s)^2}}{A^{(i)}} + A^{(s)}e^{i(\psi_s-\psi_i)} + A^{(s)}e^{-i(\psi_s-\psi_i)}\right]. \tag{10}$$

比较(10)，(1)两式即可看出，如果 $A^{(i)}$ 为常数，即如果背景波是均匀的，则代替波 U' 中包含一个和 U 成正比的成分((10)式中的一、三两项)，我们叫它**重现波**．(10)式中的其余两项：一项与背景波同位相，但振幅等于背景波的振幅乘以 $A^{(s)^2}/A^{(i)^2}$．令背景波足够强，即可使此项十分小[1]．另一项的振幅和重现波的相同($KA^{(i)^2}A^{(s)}$)，但它相对于背景波有一反号相移．我们说，它代表一**共轭波**．下面我们来证明，这个共轭波可以看成是由一个和真实物体一样但处在不同平面上的假想物体所产生．

为了证明这一点，我们暂时回到图 8.50(a) 的装置，并设 O_1 代表物体 σ 上任一点，P 代表 $\mathscr{H}$ 平面上任一点(图 8.52)．当物体用点光源 S 照明时，P 点可假定是接收两条光线上来的光，一条是直接光线 SP(与相干背景波相关联)，另一条是"衍射次级光线"O_1P(相应于次级波)．首先假定，O_1 点处的衍射没有相变．于是，衍射光到达 P 点时，比直接来光落后了一段程差 $O_1P - O_1A$，其中

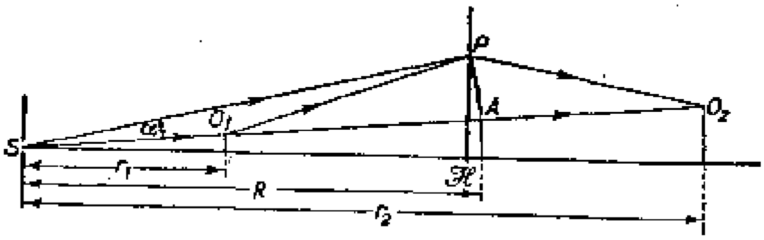


图 8.52　共轭物体位置图解

1) 在 F. Zernike 的方法中，为了显示出弱的次级干涉条纹，也利用了强的相干背景(参见 *Proc. Phys. Soc.*, **61** (1948), 158)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

A 是中心为 S 半径为 SP 的球面和 SO_1 延长线的交点. 由于共轭波超前于直接波的量和衍射次级波落后于直接波的量相同，因此共轭波在 SO_1 延长线上 O_2 点处追上直接波，O_2 点满足

$$O_1P - O_1A = PO_2 - AO_2. \tag{11}$$

设 O_1, A 和 O_2 各点离 S 点的距离分别为 r_1, R 和 r_2, SP 和直线 SO_1AO_2 的夹角为 α（见图 8.52），则方程（11）可写成为

$$\sqrt{(R\cos\alpha - r_1)^2 + R^2\sin^2\alpha} - (R - r_1)$$
$$= \sqrt{(r_2 - R\cos\alpha)^2 + R^2\sin^2\alpha} - (r_2 - R), \tag{12}$$

把方程两边各展成 α 的幂级数，并只保留其首项，结果得到

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{R}. \tag{13}$$

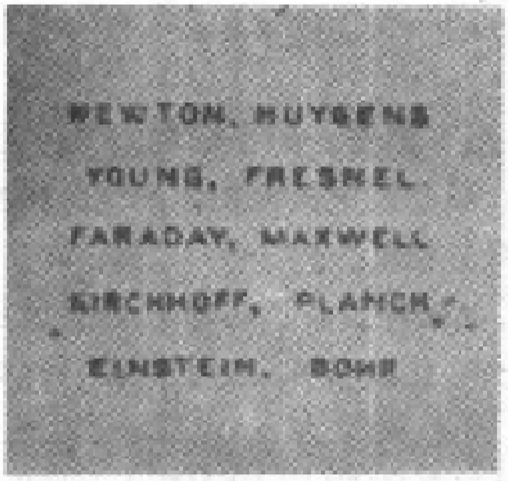
如果使全息图弯曲成一球面，半径为 R，则关系式（13）对于其上任一点都应成立. 因此这时可以认为，共轭波系由一假想物体所产生，此假想物体是原物体在以 S 为中心，R 为半径的球面镜中的像（参见 § 4.4(16) 式）. 在平面全息图情况下，只要各光线的偏轴角足够小，上述结果作为良好近似，显然也是成立的. 再者，如 $r_1/R \ll 1$，则由（13）式，$r_2 \sim -r_1$，因而共轭物体和真实物体的位置对点光源 S 是对称的.

以上我们假定，物体上的衍射没有相变. 如有相变，上面关于共轭物体位置的讨论也仍然有效，只要假定共轭物体产生的相变和真实物体所产生的大小相同而符号相反.

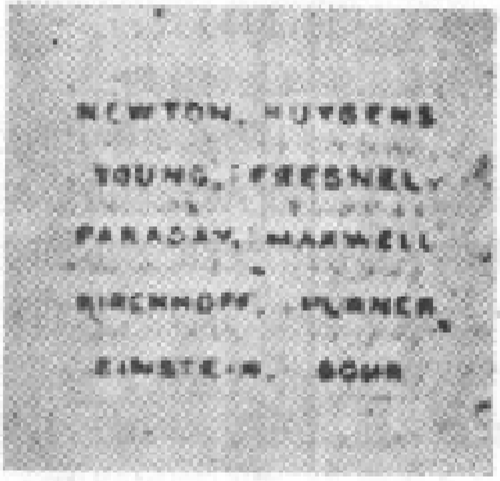
现在回到方程(10). 我们看到，如果背景波是均匀的，并且比散射波强得多，则代替波 U' 在效果上，除去那项可归之于共轭物体的贡献之外，是和原来的波一样的. 因此，如果在正全息图后面放上一个透镜 L，并单独用背景波照射这全息图（图 8.50(b)），则在原 σ 面的共轭平面上，将形成原物体的象 σ'. 但是，一般说来，这个象将为共轭物体的贡献所干扰. 我们可以找到这种干扰效应不严重的条件. 概略地说，可以期望，当原物体的象和其共轭象的间距大于成象光锥的焦点公差时，干扰效应将是很小的. 焦点公差已由公式 § 8.8(27) 式给出.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

全息图



原物



重现

图 8.53 波前重现成象

物体是一张直径 1.5 毫米的微型照片，用波长 4358 埃的光照明．光通过一个直径 0.2 毫米的小孔，而后经一显微物镜，在距物 50 毫米处，缩成一个标称直径为 5 微米的光点．几何放大率 12．重现时所用透镜的有效孔径为 0.025．噪音背景主要来自照明物镜的各种缺陷[1]．

[引自 D. Gabor, *Proc. Roy. Soc.*, A, 197 (1949), 454]

---

1) 原文说明与图不符，用了 Gabor 论文的 11 图，却引用了它 10 图的说明，而这两个图得来的条件并不一样．译文未作改正．——译者注

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

图 8.50(c) 说明等效的一步成象. 图 8.53 给出三张照片: 放大的物体,全息图和重现象. 这是早期这种实验中的一个.

最近,利思 (E. N. Leith) 和厄帕尼克斯 (J. Upatnieks)[1] 大大改进了波前重现技术,他们改变了相干背景波和物体透射光束的叠加方式. 在他们的装置中,采用了激光,并借助棱镜或反射镜系统,使背景光束以某一角度投射到全息图平面上. 结果,两个共轭象分别形成在不同的方向,因而可得到一个高质量的重现象,而另一个象不产生一点干扰[2].

全息图包含有三维信息. 这个事实也还是由利思和厄帕尼克斯证实了,图 8.54 是他们的一个实验结果.

这些结果证明了如下结论: 采用相干光时,仅仅从一个物体后面任何平面上所记录到的强度分布,就能使该物体获得高精度的重现.

要本法获得成功,光源 S 所发的波前并不必须是严格的球面,而只需令图 8.50(a) 和 8.50(b) 两装置中的背景波波前具有相同的几何形状. 另外,也不需要前后采用同一光源,或者确实说,不需要采用同波长的辐射. 正是由于这个关系,本法对电子显微镜的应用价值就很明显了. 因为,限制电子显微镜分辨本领的主要因素之一,是物镜的球面象差,而正如加伯所指出的,采用波前重现方法,原则上可消除掉,或者说得更确当些,可补偿掉球面象差的影响. 即先可用电子束产生全息图,而后再用光使物重现. 这样,就必须采用带有同等球面象差(自然,要按 $\lambda_{光}/\lambda_{电子}$ 的比例尺)的光波,来模拟电子物镜的球面象差[3]. 虽然在加伯发明这方法的时候,技术上的困难使它未能应用于电子显微学,但是他的思想的基本原理已为光波方面的实验所确证.

---

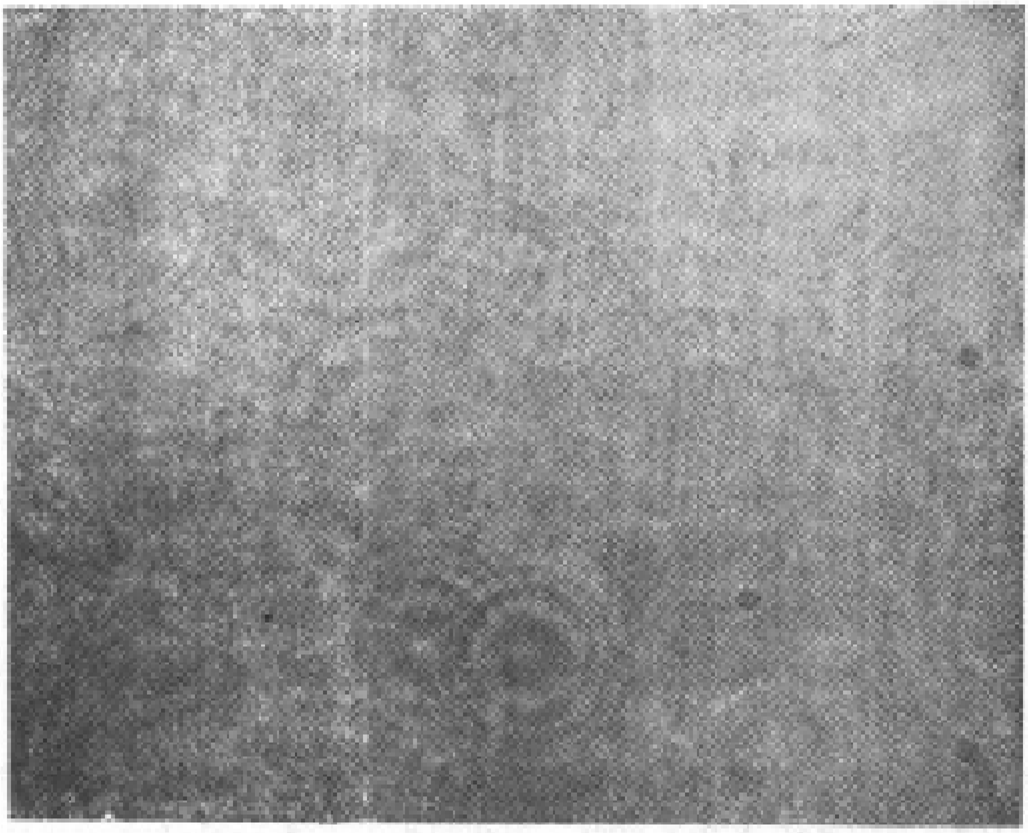
1) E. N. Leith and J. Upatnieks, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52** (1962), 1123; **53** (1963), 1377; **54** (1964), 1295.

J. B. DeVelis 和 G. O. Renolds 的书 (见前) 讨论了波前重现法的一些其他修改和方法的各个方面.

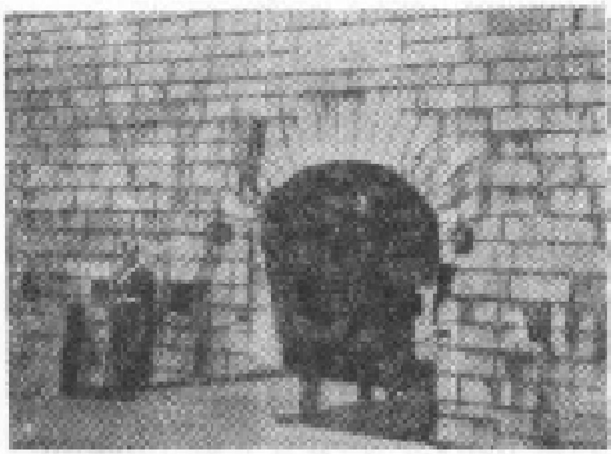
2) E. Wolf 和 J. R. Shewell 曾讨论了这种经过改进的全息方法的衍射理论,见 *J. Math. Phy.*, **11** (1970), 2254.

3) 用适当的非球面元件可产生具有规定球面象差的光波.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a)



(b)

(c)

图 8.54　波前重现成象。两个物体重现自同一张全息图。(a)全息图，(b)和(c)二张景物胶片的重现象。两张胶片用漫射相干光照明，和全息图记录底版相距 14 和 24 吋，从全息图记录底版处看去，二者互不遮挡。全息图上出现的一些明显结构，主要是尘埃粒子所产生的衍射图样

[引自 E. N. Leith and J. Upatnieks, *J. Opt. Soc. Amer.*, **54** (1964), 1297]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

两步照相术的方法，在波前重现法之前已经有了一个重要发展。这就是伯施 (H. Boersch)[1]和布喇格 (W. L. Bragg)[2]先后独立提出的，从晶体衍射图使晶体结构重现的光学傅里叶分析法。布喇格称此设计为“X射线显微镜”。如果用一束平行的X射线照射一晶体，并用照相底版把衍射光在不同偏转角上的强度分布记录下来，则此分布就是(至少对小偏转角是如此)该晶体中电子密度分布，在垂直于原光束的平面上投影的傅里叶变换的绝对值平方[3]。由于这只是记录了强度，而位相在实验中尚未用物理方法确定，因而，一般来说，这不能实现直接重现。所需数据还必须由其它照片，由事先对化学结构的了解，以及依靠猜测来收集。当照射方向是某一晶轴时，工作就比较简单；在这情况下，可以证明，如果照明是严格相干的，则所有衍射子波不是同相，就是反相，因此所观察到的每一衍射极大，这时仅仅对应于两种可能的位相；这无论如何就大大减少了所须试行组合的次数。

然而，有一些晶体，它们每个晶胞含有一个重原子，因而重原子晶格衍射成分的振幅大大超过其它，以致合振幅只能有一种符号。在这种情况下，可以说这些重原子产生了一个相干背景波。这样，对于这些晶体(为数颇少)，只需取衍射光强度的平方根，就能得到电子密度分布在垂直于晶轴(和照射方向平行的这一晶轴)的平面上投影的傅里叶变换。

现在，如果从衍射图样印出正片，并令其通计 γ 为 1，即可从它得到一个正比于强度平方根的振幅分布(见方程(8))。在X射线显微镜中，采用平面波前照射这一正片，并用透镜把它的透射光和衍射光加以聚焦。按照夫琅和费衍射理论(§ 8.3)，像平面上的振幅图样乃是正片平面上分布的傅里叶变换，因而是原电子密度分布经过接连两次傅里叶变换的结果。由傅里叶定理可知，焦平

1) H. Boersch, *Z. techn. Phys.*, **19** (1938), 337.
2) W. L. Bragg, *Nature*, **149** (1942), 470; 又见, M. J. Buerger, *J. App. Phys.*, **21** (1950), 909.
3) 可见任何关于X射线衍射理论的标准著作，例如 532 页所列各书。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

面上的分布就是这电子密度分布(一般是复量)的一个真实象．这里当然假定，所用透镜的孔径很大，足以收集进所有能量够大的衍射光线，并且所有子波同相的要求也已被满足．事实上，后一条件只有在很少情形能得到满足．

在波前重现法中，背景波是人工加上的．在对称性，甚至周期性方面，不需要满足什么条件．但这一方法不适用于X射线分析，因为它实际不可能产生强的相干背景波．不过，这方法在未来电子衍射研究中会有很好的应用．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第九章　象差的衍射理论

第五章中，我们在几何光学基础上研究了象差效应．在那一种处理中，认为象就是几何光线与象平面的交点所构成的模糊图样．由于几何光学给出的是在波长很短的极限情况下有效的近似模型，因此可以预料，当象差变小时，几何理论逐渐失效．例如，在从一个圆孔发出的理想球面会聚波的极限情况下，几何光学预言焦平面上焦点处的强度无限大，其他各处的强度为零；然而，正如在§ 8.5.2 中已经指出的，实象是由一个被一些暗环和亮环围绕着的中央亮区（爱里图样）组成的．在焦平面附近，光分布也呈现出比几何光学所设想的更为复杂的性质（参看图 8.41）．这就促使我们在衍射理论基础上研究象差效应．

这个领域内的首批研究成果是瑞利[1]提出的．他的主要贡献是用公式立出判据（在 § 9.3 中讨论），它的一种推广形式已经广泛地用于确定光学仪器所能容许的最大象差．这一课题已由于许多作者的研究进一步推进了，他们研究了各种象差效应[2]，我们可以特别提到斯图瓦尔特（Steward）、皮希特（Picht）和玻恩的一些更广泛的处理方法[3]．

---

1) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), **8** (1879), 403. 重载于他的 *Scientific Papers* (Cambridge University Press, 1899), **1**, 428.

2) E. Wolf 在 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **14** (1951), 95 中已给出象差衍射理论的历史概述.

3) G.C. Steward, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A, 225** (1925), 131；也见于他的书 *The Symmetrical Optical System* (Cambridge University Press, 1928). J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4) **77** (1925), 685. 同上 **80** (1926), 491；也见于他的 *Optische Abbildung* (Braunschweig, Vieweg, 1931). M. Born, *Naturwissenschaften*, **20** (1932), 921；以及他的 *Optik* (Berlin, Springer, 1933), p. 202.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

有象差存在时成象的广泛衍射处理方法是奈波尔[1]提出的，其中一部分在泽尼克的合作下完成．他们研究了波阵面与球面的偏离不到一个波长时的微小象差的影响．范卡本 (Van Kampen)[2] 在衍射理论的基础上，利用渐近逼近法研究了大象差的效应；这种处理方法的基础是形式上推广到稳相原理的双变量函数，它后来已首先由福克 (J. Focke) 严格地用公式作了表述（见附录 3，1002 页）．

本章主要叙述奈波尔-泽尼克理论，并考查受初级象差影响的衍射象的结构．在最后一节(§ 9.5)中，将从点状物推广到扩展物，并研究相干照明和不相干照明的成象问题．部分相干照明的成象将在第十章中讨论．

§ 9.1 有象差存在时的衍射积分

§ 9.1.1 衍射积分

考虑一个具有单色点光源 P_0 的共轴光学系统(图 9.1)．取笛卡儿坐标系，原点位于 P_0 的高斯象点 P_1^*，z 轴沿 CP_1^*，其中 C 是出射光瞳的中心，y 轴取在子午面（包含 P_0 和系统轴的平面）内．P_0 和 P_1^* 的离轴距离分别用 Y_0 和 Y_1^* 表示．

同第五章一样，出射光瞳区内波阵面的形变用象差函数 Φ 描述．设 $\overline{Q}$ 和 Q 分别是象空间内的一条光线与通过 C 的波阵面及

1) B.R.A. Nijboer（上册译作奈波），Thesis, University of Groningen, 1942．主要部分也发表于 *Physica*, **10** (1943), 679；同上，**13** (1947), 605；F. Zernike 和 B.R.A. Nijboer，撰稿于 *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227．K. Nienhuis 和 B.R.A. Nijboer 在 *Physica*, **14** (1948), 590 中讨论了理论推广到象差稍大的情况．还必须提到 K. Nienhuis 的一篇论文 (University of Groningen, 1948)，它主要涉及象差效应的实验研究．在 § 9.4 中复制了 Nienhuis 获得的几张精美的照片．

在上册 576 页所引 M.P. Bachynski 和 G. Bekefi 的论文以及 *Trans. Inst. Radio Eng.*, AP-4 (1956), 412 中描述了在微波频段有象差存在时象区结构的实验研究．

2) N.G. Van Kampen, *Physica*, **14** (1949), 575；同上，**16** (1950), 817；同上，**25** (1958), 437

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

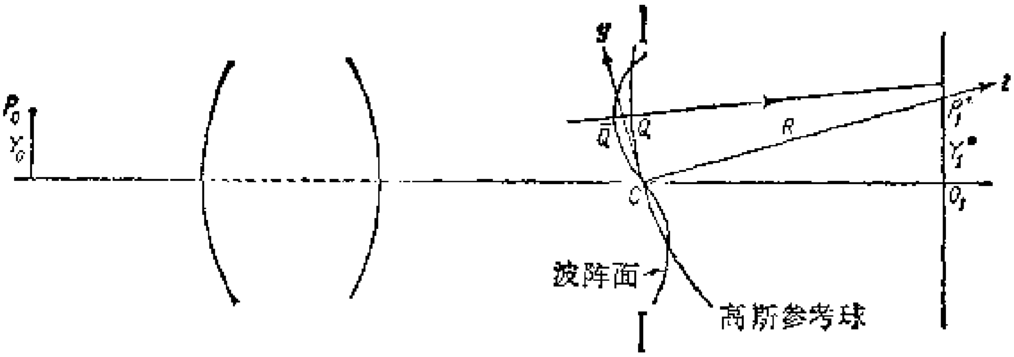


图 9.1 参考系和记号的选择

高斯参考球的交点. 假定象空间的折射率为 1，Φ（图 9.1 中取正值）表示沿光线测得的距离 $\bar{Q}Q$.

设 R 表示高斯参考球的半径 CP_1^*，s 为 Q 与象区内任一点 P 之间的距离. Q 点的扰动用 $Ae^{ik(\Phi-R)}/R$ 表示，其中 A/R 是 Q 点的振幅. 根据惠更斯-菲涅耳原理，P 点的扰动由下式给出：

$$U(P)=-\frac{i}{\lambda}\frac{Ae^{-ikR}}{R}\iint\frac{e^{ik[\Phi+s]}}{s}dS, \tag{1}$$

式中积分遍及参考球近似充满出射光瞳的那一部分. (1) 式中已假定所涉及的角度很小，因此倾斜因子在参考球上的变化可以忽略；也已假定波的振幅在波阵面上基本上是常数，因此 A 可提出积分号外.

设 (ξ,η,ζ) 是 Q 的坐标，(x,y,z) 是 P 的坐标，a 是出射光瞳的半径. 同 § 8.8 中讨论过的无象差波 $(\Phi=0)$ 的特殊情况一样，令

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a\rho\sin\theta, & x&=r\sin\psi,\\ \eta&=a\rho\cos\theta, & y&=r\cos\psi,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

与 § 8.8(2) 式和 § 8.8(9) 式一样[1]，我们有

$$k(s-R)=-v\rho\cos(\theta-\psi)-\frac{1}{2}u\rho^2+\left(\frac{R}{a}\right)^2u, \tag{3}$$

式中 u 和 v 是 P 的两个"光学坐标"：

---

1) R 现在相当于 § 8.8 的 f. 值得指出：如果应用 § 8.8 的(2)和(3)式，则衍射积分可再次用平面波的角谱形式来表示[见 J. Focke, *Optica Acta*, **3** (1956), 110].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$u=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z,\quad v=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)\sqrt{x^2+y^2}. \tag{4}$$

这时把Φ看作 Y_1^*, ρ和θ的函数是方便的,即

$$\Phi=\Phi(Y_1^*,\rho,\theta). \tag{5}$$

高斯参考球的面元是 $dS=a^2\rho d\rho d\theta$，如果 CP_1^* 与系统轴的夹角很小,则积分范围可取为 $0\leqslant\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\theta<2\pi$. 此外,对于象区内的观察点,在被积函数分母中可用R代替s. 因此,将(3)式代入,(1)式变为

$$U(P)=U(u,v,\phi)$$
$$=-\frac{i}{\lambda}\frac{Aa^2}{R^2}e^{i\left(\frac{R}{a}\right)^2 u}\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{i[k\Phi(Y_1^*,\rho,\theta)-v\rho\cos(\theta-\phi)-\frac{1}{2}u\rho^2]}$$
$$\rho d\rho d\theta, \tag{6}$$

因此,P点的强度为

$$I(P)=|U(P)|^2$$
$$=\left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2}\right)^2\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{i[k\Phi(Y_1^*,\rho,\theta)-v\rho\cos(\theta-\phi)-\frac{1}{2}u\rho^2]}\rho d\rho d\theta\right|^2. \tag{7}$$

把强度 $I(P)$ 表示为强度 I^* 的分数是方便的，如果象差不存在，I^* 就是在高斯象点 P_1^* 得到的强度. 根据(7)式,有

$$I^*=\pi^2\left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2}\right)^2, \tag{8}$$

因此归一化强度为[1)]

$$i(P)=\frac{I(P)}{I^*}$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{i[k\Phi(Y_1^*,\rho,\theta)-v\rho\cos(\theta-\phi)-\frac{1}{2}u\rho^2]}\rho d\rho d\theta\right|^2. \tag{9}$$

象差不存在时，强度在高斯象点处为极大. 当象差存在时，一般就不再是这种情况了，我们可以把强度极大的点称为衍射焦

---

1) 归一化强度所用的符号 i 与 $\sqrt{-1}$ 所用的同一符号之间不会引起混乱，因为前者总是带着自变量出现的，例如 $i(P)$, $i(u,v,\phi)$，等等.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

点[1]. 通常人们感兴趣的只是特定观察平面内的强度极大值;这个值[按 (9) 式那样归一化时]就称为斯特列耳 (Strehl) 强度[2].

由 (9) 式可立即导出以后必需的一些简单结果.

§ 9.1.2 位移定理. 参考球的变化

设 Φ 和 Φ' 是两个象差函数,使得

$$\Phi' = \Phi + H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M, \tag{10}$$

式中 H, K, L 和 M 都是与 λ 同数量级的常数. 又设 $i(u, v, \psi)$ 和 $i'(u, v, \psi)$ 是相应的归一化强度,则由 (9) 式得出

$$i(u, v, \psi) = \frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi} e^{if(u, v, \psi;\, \rho, \theta)}\, \rho\, d\rho\, d\theta\right|^2, \tag{11}$$

式中

$$f(u, v, \psi;\, \rho, \theta) = k\Phi - v\rho\cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2, \tag{12}$$

对于 i' 有类似的表达式. 现在根据 (10) 式, 则后一式也可写成如下形式:

$$\begin{aligned} f(u, v, \psi;\, \rho, \theta) &= k\Phi' - k[H\rho^2 + K\rho\sin\theta \\ &\qquad + L\rho\cos\theta + M] - v\rho\cos(\theta - \psi) \\ &\qquad - \frac{1}{2}u\rho^2 \\ &= k\Phi' - v'\rho\cos(\theta - \psi') - \frac{1}{2}u'\rho^2 - kM \\ &= f'(u', v', \psi';\, \rho, \theta) - kM, \end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned} u' &= u + 2kH, \quad v'\sin\psi' = v\sin\psi + kK, \\ v'\cos\psi' &= v\cos\psi + kL. \end{aligned} \tag{14}$$

---

1) 当然,一般说来可能有不止一个衍射焦点,但如果象差充分小,衍射焦点就是唯一的.

2) 这个概念出自 K. Strehl, *Z. f. Instrumkde.*, 22 (1902), 213, 他称之为 "Definitionshelligkeit". 在英文文献中常采用不大恰当的术语 ("definition") (清晰度).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

根据 (2) 和 (4) 式，(14) 式表示如下变换：

$$z' = z + 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 H, \quad x' = x + \left(\frac{R}{a}\right) K,$$

$$y' = y + \left(\frac{R}{a}\right) L. \tag{15}$$

由 (11) 和 (13) 式得出

$$i(u, v, \psi) = i'(u', v', \psi'). \tag{16}$$

由此我们已证明了如下的位移定理：象差函数加上一项 $H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M$，其中 H，K，L 和 M 都是与 λ 同数量级的常数，并不引起焦点附近三维强度分布的变化，只是整个分布按照变换(15)有一位移；即沿主方向 CP_1^* 离出射光瞳的位移量为 $2(R/a)^2H$，在正 x 和 y 方向的位移量分别为 $(R/a)K$ 和 $(R/a)L$.

(10)式右方的附加项可以解释为代表参考球的变化．假定我们选择一个新参考球，球心在象区 $P'(x', y', z')$ 点上，而半径为 R'，使得它至多偏离高斯球几个波长．设光线 $\bar{Q}Q$ 与新参考球相交于 N 点．于是以这个新球作参考的波象差 Φ' 为(见图 9.2)

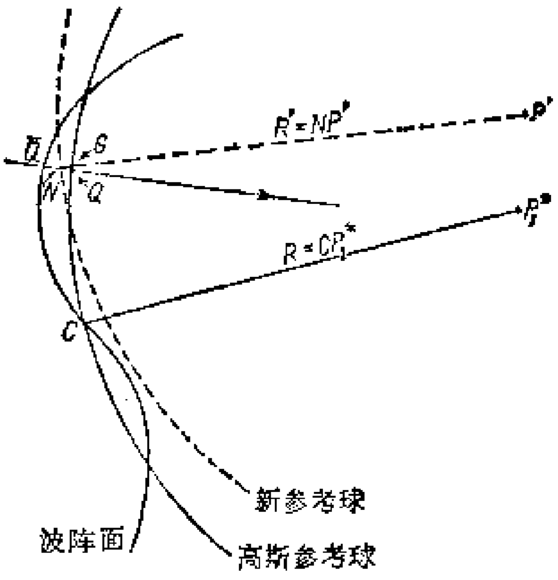


图 9.2　参考球的变化

$$\Phi' = \bar{Q}N = \bar{Q}Q - NQ$$

$$\sim \bar{Q}Q - NG, \tag{17}$$

式中 G 是 NP' 线与高斯参考球的交点，和前面一样，假定象空间的折射率为 1．这时 $\bar{Q}Q = \Phi$ 就是以高斯球作参考的波象差，$NG = NP' - GP' = R' - s$，式中 s 表示从 G 到 P' 的距离．因此 (17) 式可写成

$$\Phi' \sim \Phi + s - R'$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$= \Phi + \frac{\lambda}{2\pi}\left[-v\rho\cos(\theta-\phi) - \frac{1}{2}u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u\right] + (R - R'), \tag{18}$$

式中已用了 (3) 式. 这里 u, v 和 ϕ 由 (3) 和 (4) 式给出,其中以 x', y', z' 代替 x, y, z. 取

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z', \qquad K = -\left(\frac{a}{R}\right)x',$$

$$L = -\left(\frac{a}{R}\right)y', \qquad M = z' + R - R', \tag{19}$$

可将 (18) 式写成 (10) 式那样的形式.

§ 9.1.3 强度与波阵面平均形变之间的关系

当象差很小时，可用波象差的均方值表示参考球中心处的强度. 设 Φ_P 是以象区内 P 点为中心的参考球作参考的波象差. 于是,根据 (9) 和 (18) 式, P 点的归一化强度可表示为如下形式:

$$i(P) = \frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi} e^{ik\Phi_P}\rho\, d\rho\, d\theta\right|^2$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[1 + ik\Phi_P + \frac{1}{2}(ik\Phi_P)^2 + \cdots\right]\rho\, d\rho\, d\theta\right|^2. \tag{20}$$

设 $\overline{\Phi_P^n}$ 表示 Φ_P 的 n 次幂的平均值,即

$$\overline{\Phi_P^n} = \frac{\int_0^1\int_0^{2\pi}\Phi_P^n\rho\, d\rho\, d\theta}{\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\, d\rho\, d\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\Phi_P^n\rho\, d\rho\, d\theta. \tag{21}$$

如果假定象差小到足以忽略 (20) 式中 $k\Phi_P$ 的三次及更高次幂,则 P 点的强度可写成

$$i(P) \sim \left|1 + ik\overline{\Phi_P} - \frac{1}{2}k^2\overline{\Phi_P^2}\right|^2$$

$$= 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left[\overline{\Phi_P^2} - (\overline{\Phi_P})^2\right]. \tag{22}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

右边括号中的量是波阵面的"均方形变" $(\Delta\Phi_P)^2$，即

$$(\Delta\Phi_P)^2 = \frac{\int_0^1\int_0^{2\pi}(\Phi_P - \overline{\Phi_P})^2\rho d\rho d\theta}{\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho d\rho d\theta} = \overline{\Phi_P^2} - (\overline{\Phi_P})^2, \qquad (23)$$

因此 (22) 式可写成

$$i(P) \sim 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2(\Delta\Phi_P)^2. \qquad (24)$$

这个公式的意思是，当象差很小时，焦区内参考球中心处的归一化强度与象差的性质无关，并且它小于理想值 1，其差值正比于波阵面的均方形变。

§9.2　象差函数的展开

§9.2.1　泽尼克圆多项式

在几何光学基础上讨论象差效应时(第五章)，我们曾将象差函数 Φ 展开为幂级数．在现在这种处理中，必须在单位圆上作积分，因此更适宜于用在单位圆内部相互正交的多项式完备集来展开 Φ[1]．可以构成许多个具有这种性质的多项式的集；不过，由泽尼克[2] 引入的这样一个集具有某些简单的不变性．在附录 7 中将表明这些泽尼克圆多项式可以用什么方法导出，并且讨论它们的一些特性；这里仅概述本章所需的公式．

泽尼克圆多项式是两个实变量 X，Y 的多项式 $V_n^l(X, Y)$，用极坐标 $(X = \rho\sin\theta,\ Y = \rho\cos\theta)$ 表示时，它的形式是

$$V_n^l(\rho\sin\theta,\ \rho\cos\theta) = R_n^l(\rho)e^{il\theta}, \qquad (1)$$

式中，$l \gtrless 0$ 和 $n \geqslant 0$ 均为整数，$n \geqslant |l|$，并且 $n - |l|$ 为偶

---

1) 术语"完备"的含义是任一性能适当良好的函数均能展开为该集的一系列函数．这一术语更精确的定义，例如可参看 R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I (1st English Edition, New York, Interscience Publishers, 1953), pp. 51—54.

2) F. Zernike, *Physica*, **1** (1934), 689.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数，正交和归一化性质由下式表示：

$$\iint_{X^2+Y^2\leqslant 1} V_n^{l*}(X, Y)V_{n'}^{l'}(X, Y)dXdY$$

$$= \frac{\pi}{n+1}\delta_{ll'}\delta_{nn'}, \tag{2}$$

式中 δ_{ij} 是克朗内克符号，星号表示复共轭．径向函数 $R_n^l(\rho)$ 是含有 ρ^n，ρ^{n-2}，$\cdots\rho^{|l|}$ 等幂的 ρ 的多项式，如附录 7 所述，它们与雅科毕多项式（有尽超几何级数）有密切关系．由 (1) 和 (2) 式可以看出，径向多项式满足关系式

$$\int_0^1 R_n^l(\rho)R_{n'}^l(\rho)\rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)}\delta_{nn'}. \tag{3}$$

这些径向多项式由下列公式给出（$m = |l|$），

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\rho^m}\left\{\frac{d}{d(\rho^2)}\right\}^{\frac{n-m}{2}}$$

$$\times\left\{(\rho^2)^{\frac{n+m}{2}}(\rho^2-1)^{\frac{n-m}{2}}\right\} \tag{4}$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}}(-1)^s$$

$$\times\frac{(n-s)!}{s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!}\rho^{n-2s}. \tag{5}$$

已选择了归一化，使得对于所有的 n 和 m 的允许值，有

$$R_n^{\pm m}(1) = 1. \tag{6}$$

径向多项式具有生成函数

$$\frac{\left[1+z-\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}\right]^m}{(2z\rho)^m\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} z^s R_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \tag{7}$$

当 $m = 0$ 时，左边化为自变量为 $2\rho^2-1$ 的勒让德多项式的生

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 21　$m\leqslant 8$，$n\leqslant 8$ 的径向多项式 $R_n^m(\rho)$

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1		$2\rho^2-1$		$6\rho^4-6\rho^2+1$		$20\rho^6-30\rho^4+12\rho^2-1$		$70\rho^8-140\rho^6+90\rho^4-20\rho^2+1$
1		ρ		$3\rho^3-2\rho$		$10\rho^5-12\rho^3+3\rho$		$35\rho^7-60\rho^5+30\rho^3-4\rho$	
2			ρ^2		$4\rho^4-3\rho^2$		$15\rho^6-20\rho^4+6\rho^2$		$56\rho^8-105\rho^6+60\rho^4-10\rho^2$
3				ρ^3		$5\rho^5-4\rho^3$		$21\rho^7-30\rho^5+10\rho^3$	
4					ρ^4		$6\rho^6-5\rho^4$		$28\rho^8-42\rho^6+15\rho^4$
5						ρ^5		$7\rho^7-6\rho^5$	
6							ρ^6		$8\rho^8-7\rho^6$
7								ρ^7	
8									ρ^8

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

成函数[1)]，因此

$$R_{2n}^{0}(\rho)=P_n(2\rho^2-1). \tag{8}$$

表 21 中给出了头几个 n 和 m 值的径向多项式的显式.

在奈波尔-泽尼克理论中，下列关系式(也在附录中证明)是很重要的：

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho d\rho=(-1)^{\frac{n-m}{2}}\frac{J_{n+1}(v)}{v}, \tag{9}$$

式中 J 是第一类贝塞耳函数.

可以用实多项式

$$\left.\begin{aligned} U_n^m&=\frac{1}{2}[V_n^m+V_n^{-m}]=R_n^m(\rho)\cos m\theta,\\ U_n^{-m}&=\frac{1}{2i}[V_n^m-V_n^{-m}]=R_n^m(\rho)\sin m\theta, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

来代替复多项式 V. 在我们的应用中只需要多项式 $U_n^m=R_n^m(\rho)\times\cos m\theta$. 这是因为波畸变是对于子午面 $\theta=0$ 对称的，所以象差函数是 θ 的偶函数.

§ 9.2.2 象差函数的展开

仿照奈波尔的方法，用泽尼克圆多项式展开象差函数 Φ. 同 § 5.1 一样，由对称性得出，变量只以其组合 Y_1^{*2}, ρ^2 和 $Y_1^*\rho\cos\theta$ 出现于展开式中，因此该展开式必具有以下的形式：

$$\Phi(Y_1^*, \rho, \theta)=\sum_l\sum_n\sum_m a_{lnm}Y_1^{*2l+m}R_n^m(\rho)\cos m\theta, \tag{11}$$

式中 l, n 和 m 是非负的整数，$n\geqslant m$, $n-m$ 是偶数，并且这些 a 都是常数.

由于下面主要涉及到一个固定物点的衍射象 (Y_1^* 是常数)，因此方便的做法是不写出 Φ 对 Y_1^* 的明显依赖关系，而把 (11) 式改写为以下的形式：

---

1) 例如参看 R. Courant 和 D. Hilbert, 上述引文，p. 85.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\Phi = A_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=2}^{\infty} A_{n0}R_n^0(\rho)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta. \qquad (12)$$

系数 A_{nm} 是 Y_1^* 的函数，并已在第二项中引入因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，以便简化最后的公式。

如果象差充分小，则高斯焦点的归一化强度可用这些系数 A 表示为简单形式。将 (12) 式代入 § 9.1(21) 式，并用正交关系式 (3)，则有

$$\bar{\Phi} = A_{00},$$

$$\overline{\Phi^2} = A_{00}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{A_{nm}^2}{n+1}. \qquad (13)$$

第一个关系式意味着 A_{00} 代表波阵面落后于高斯参考球的平均推迟。第二个关系式是正交函数集 $R_n^m(\rho)\cos m\theta$ 的"帕塞瓦公式"。将 (13) 式代入 § 9.1(22) 式，得出高斯焦点的归一化强度为

$$i(P_1^*) = 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{A_{nm}^2}{n+1}. \qquad (14)$$

用圆多项式展开的显著优点，与不同级的象差彼此"平衡"以便获得最大强度这一重要问题有关。假定用单个"幂级数"项

$$\Phi = A'_{nm}\rho^n\cos^m\theta \qquad (15)$$

代表象差，式中 A'_{nm} 是一个波长数量级或更小的常数。我们要问是否可能通过引入较低级的象差来增加强度 $i(P_1^*)$。更确切地说，我们希望在表达式

$$\Phi' = A'_{nm}\rho^n\cos^m\theta + \sum_{p<n}\sum_{q\leqslant p} A'_{pq}\rho^p\cos^q\theta \qquad (16)$$

中选择常数 A'_{pq}，使得高斯焦点的强度尽可能大。

有了对这些常数 A'_{pq} 的任意一种特定选择，还可以把象差函数 (16) 式用圆多项式表示为以下的形式：

$$\Phi' = \varepsilon_{nm}A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$+\sum_{p<n}\sum_{q\leqslant p}\varepsilon_{pq}A_{pq}R_p^q(\rho)\cos q\theta, \qquad (17)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{nm}&=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 当\ m=0,\ n\neq 0时,\\ &=1, \quad 其他.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

这时根据(5)式,(17)式中 ρ 的最高次幂即 ρ^n 的系数为 $\dfrac{n!}{\left[\frac{1}{2}(n+m)\right]!\left[\frac{1}{2}(n-m)\right]!}$,因此通过比较(16)和(17)式中 ρ^n 的系数得出,

$$\frac{n!}{\left[\frac{1}{2}(n+m)\right]!\left[\frac{1}{2}(n-m)\right]!}\varepsilon_{nm}A_{nm}=A'_{nm}. \qquad (19)$$

这时因 A'_{nm} 已定,从而 A_{nm} 亦已定,由(14)式得出,取(17)式中求和号下的所有系数恒为零就得到 P_1^* 点的最大强度. 于是象差函数变为

$$\Phi'=\varepsilon_{nm}A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta, \qquad (20)$$

这时 P_1^* 点的强度为

$$i(P_1^*)=1-\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\frac{A_{nm}^2}{n+1}, \qquad (21)$$

A_{nm} 由(19)式用系数 A'_{nm} 给出. 这时很明显,**在展开式(12)的单个象差项 $A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta$ 中,已经将若干个 $A'_{pq}\rho^p\cos^q\theta$ 形式的项(其中 $p=n, n-2, \cdots m$; $q=m, m-2, \cdots 1$ 或 0)按这样一种方式结合起来,使得对于一个给定的(充分小的)$\rho^n\cos^m\theta$ 系数值,高斯焦点的归一化强度为极大值.**

我们用一个简单例子说明这个结果. 假定一个系统有小量的六级球面象差 $[\Phi=A'_{60}\rho^6]$,并且假定我们能够引入数值可以控制的四级球面象差 $[A'_{40}\rho^4]$ 和散焦 $[A'_{20}\rho^2]$. 我们寻找系数 A'_{40} 和 A'_{20} 的值,使得衍射焦点的强度尽可能大. 这一类问题首先由

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

里西脱（Richter）[1] 研究过了，他指出，当选择这两个系数使得

$$\frac{A'_{40}}{A'_{60}} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{A'_{20}}{A'_{60}} = \frac{3}{5}, \tag{22}$$

就得到最大值. 一看 612 页的表 21 就知道，这正好是多项式 $R_6^0(\rho)$ 中相应系数的比值：

$$R_6^0(\rho) = 20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1. \tag{23}$$

可见，在上述解释的意义上，只要象差充分小，引入泽尼克圆多项式就自动解决了象差的平衡问题；而且利用位移定理还能确定衍射焦点的位置.

§9.3 初级象差的容限条件

考虑有象差存在时确定衍射象中强度分布这一困难问题以前，先讨论估计一个光学系统所能容许的最大象差这一简单得多的问题.

由上一节的讨论明显看出，当存在象差时，衍射象中最大强度小于具有相同孔径和焦距的无象差系统中高斯焦点（爱里图样中心）处的强度. 瑞利[2] 首先证明，一个系统因有初级球面象差而使得出射光瞳处的波阵面偏离高斯参考球不到四分之一波长时，高斯焦点处的强度减弱不到百分之二十——光的这种损失通常是可以容许的. 以后一些作者发现，有寻常出现的其他象差存在时，若波阵面形变小于四分之一波长，则象的质量同样不会受到严重影响. 这个结果已成为通常所说的**瑞利四分之一波长定则**，它是成象系统中所能容许的象差数值的一个有效判据. 当然，就一个系统校正到合乎需要的状态而言，这个定则只不过是个粗略的指引，因为象上的光分布不仅取决于波阵面的最大形变，而且取决于波阵面的形状（象差的类型）. 此外，所容许的光损失当然取决于仪

---

1) R. Richter, *Z. f. Instrumkde.*, **45** (1925), 1.

2) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), 8 (1879), 403. 重载于他的 *Scientific Papers* (Cambridge University Press, 1899), **1**, 432—435.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

器的特定用途,在某些情况下必须施加更严格的容限.

将条件 $|\Phi_{max}|=\lambda/4$ 用于不同类型的象差时，得出衍射焦点处的强度值稍有不同. 看来更恰当的是用公式表示相应于衍射焦点处强度规定值的容限判据. 马雷夏尔 (Maréchal)[1] 研究过这类判据，他利用了参考球中心处的强度和波阵面偏离球面的方均根偏差之间存在的关系.

当象差充分小时,根据 § 9.1(24) 式，象区内 P 点处的强度可表示为

$$i(P)\sim 1-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2(\Delta\Phi_P)^2. \tag{1}$$

仿照马雷夏尔,当衍射焦点 F 处的归一化强度大于或等于 0.8 时,我们就认为系统已校正好. 这时,由 (1) 式,当 $|\Delta\Phi_F|\lesssim\lambda/14$ 时, $i(F)\geqslant 0.8$，因此这一条件等价于下述要求: 波阵面偏离以衍射焦点为中心的参考球的方均根偏差不超过 $\lambda/14$[2].

现在让我们来确定衍射焦点的位置和初级(赛德耳)象差的容限. 在本章的记法中,每一初级象差代表一种具有

$$\Phi=a'_{lnm}Y_1^{*2l+m}\rho^n\cos^m\theta \tag{2}$$

---

1) A. Maréchal, *Rev. d'Optique*, **26** (1947), 257.

2) 实际上，Maréchal 条件是根据稍有不同的不等式得出的. 由 §9.1(20) 式得出，

$$i(F)=\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{ik\Phi_F}\rho d\rho d\theta\right|^2$$
$$\geqslant\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}\cos(k\Phi_F)\rho d\rho d\theta\right|^2.$$

这时若 $k|\Phi_F|<\pi/2$，即若 $|\Phi_F|<\lambda/4$，则在此不等式中显然可用 $1-1/2\times(k\Phi_F)^2$ 代替 $\cos(k\Phi_F)$. 此外，若选择参考球半径使得 $\overline{\Phi}_F=0$，则 $(\Delta\Phi_F)^2=\overline{\Phi_F^2}$，而不等式变为

$$i(F)\geq\left[1-\frac{2\pi^2}{\lambda^2}(\Delta\Phi_F)^2\right]^2. \tag{1a}$$

马雷夏尔判据是根据不等式(1a) 得出的,但如果象差很小,这种差别显然没有多大实际意义. 对我们来说，使用 (1) 式比用 (1a) 式有利之处在于它更直接与泽尼克圆多项式的极值性质有关.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

形式的波阵面形变[1]，式中 $2l+m+n=4$。令

$$A'_{lnm}=a'_{lnm}Y_1^{*2l+m} \tag{3}$$

是方便的，(2) 式变为

$$\Phi=A'_{lnm}\rho^n\cos^m\theta. \tag{4}$$

常数 A' 不难用第五章所引入的赛德耳系数 B, C, D, E 和 F 表示。如果取 § 5.2(7) 和 (8) 式中的任意常数 λ_0 等于 1，则 λ_1 表示光瞳平面之间的放大率，并且如果回想起这时有 $n_1=1$，则 § 5.3(7) 式中的变量 ρ 和 y_0 相应于本节的 $a\rho/\lambda_1$ 和 $-\lambda_1 Y_1^*/R$；比较 (4) 式与 § 5.3(7) 式，得出

$$\left.\begin{aligned}
A'_{040}&=-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^4 B,\\
A'_{031}&=-\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^3\left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right)F,\\
A'_{022}&=-\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right)^2 C,\\
A'_{120}&=-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right)^2 D,\\
A'_{111}&=-\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_1 Y_1^*}{R}\right)^3 E.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在用圆多项式展开的式子中，一个典型项代表象差[2]

$$\Phi=\varepsilon_{nm}A_{lnm}R_n^m(\rho)\cos m\theta. \tag{6}$$

l，m 和 n 值满足 $2l+m+n=4$ 的项(初级象差)在表 22 最后一行中示出。可以看到这时某些赛德耳项伴随有较低次的项，根据位移定理 (§ 9.1.2)，它们引起强度分布的整体位移。这时根据 § 9.2.2 的定理，受到(6)式所示的象差影响的象，在高斯焦点处有

---

1) 我们对幂级数表示法的系数加撇，而对用泽尼克圆多项式表示法的系数不加撇。

2) 为了与 § 9.2 的公式一致，这里保留了因子 ε_{nm}，除了 $m=0$，$n\neq 0$ 时 ε_{nm} 等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 外，ε_{nm} 均等于 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 22　初级象差的表示

象差类型	l	n	m	用 (4) 的形式表示	用 (6) 的形式表示
球面象差	0	4	0	$A'_{040}\rho^4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}A_{040}R_4^0(\rho)=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{040}(6\rho^4-6\rho^2+1)$
彗差	0	3	1	$A'_{031}\rho^3\cos\theta$	$A_{031}R_3^1(\rho)\cos\theta=A_{031}(3\rho^3-2\rho)\cos\theta$
象散	0	2	2	$A'_{022}\rho^2\cos^2\theta$	$A_{022}R_2^2(\rho)\cos 2\theta=A_{022}\rho^2(2\cos^2\theta-1)$
象场弯曲	1	2	0	$A'_{120}\rho^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}A_{120}R_2^0(\rho)=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{120}(2\rho^2-1)$
畸变	1	1	1	$A'_{111}\rho\cos\theta$	$A_{111}R_1^1(\rho)\cos\theta=A_{111}\rho\cos\theta$

最大强度。因此，比较表 22 最后两行中的对应项，就可立即确定受到初级象差影响的象的衍射焦点坐标。我们通过仔细考虑初级球面象差来说明这一点。这一象差表示为

$$\Phi=A'_{040}\rho^4. \tag{7}$$

相应的表达式 (6) 为

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{040}R_4^0(\rho)=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{040}(6\rho^4-6\rho^2+1). \tag{8}$$

这时如果

$$A'_{040}=\frac{6}{\sqrt{2}}A_{040}, \tag{9}$$

则根据位移定理，在两种情况中强度分布相同；但根据 § 9.1 (15) 式，其中

$$H=\frac{6A_{040}}{\sqrt{2}}=A'_{040},\quad K=L=0,$$

$$M=-\frac{A_{040}}{\sqrt{2}}=\frac{A'_{040}}{6},$$

即根据下述变换：

$$x'=x,\qquad y'=y,\qquad z'=z+2\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{040}, \tag{10}$$

(7) 式相应的分布对 (8) 式相应的分布有一位移。因为与 (8) 式

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

相联系的衍射象在原点 $x=y=z=0$ 处具有最大强度，所以对于 (7) 式所示的初级球面象差，衍射焦点 F 位于

$$x_F = y_F = 0, \qquad z_F = 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{040} \tag{11}$$

这一点处.

(11) 式所确定的点 F 有一种简单的几何解释. 设 ΔY 和 ΔZ 分别是横向和纵向的球面象差，当光线与轴相交于高斯焦点的正侧时它们取正值. 由 § 5.1 (17) 式，取 $\Phi = A'_{040}\rho^4$，$\rho = Y/a$，$D_1 \sim -R \sim -R'$，$X_0 = X = 0$，$n_1 = 1$，得

$$\Delta Y = Y_1 - Y_1^* = 4\left(\frac{R}{a}\right)\left(\frac{Y}{a}\right)^3 A'_{040}, \tag{12a}$$

因此，由初等几何并应用上述关系，得

$$\Delta Z = Z_1 - Z_1^* \sim \frac{R}{Y}\Delta Y = 4\left(\frac{R}{a}\right)^2\left(\frac{Y}{a}\right)^2 A'_{040}. \tag{12b}$$

对于边缘光线 $(Y=a)$，上式给出 $(\Delta Z)_{\max} = 4\left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{040}$，由此可见，(11) 式意味着[1] 有小量的初级球面象差存在时，衍射焦点位于近轴焦点和边缘焦点二者的中央.

其次，让我们确定初级球面象差的容限. 对于 (6) 式所表征的任一象差，根据 § 9.2 (14) 式，如果

$$1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\frac{A_{lnm}^2}{n+1} \geqslant 0.8,$$

即只要

$$|A_{lnm}| \lesssim \frac{\lambda\sqrt{n+1}}{10}, \tag{13}$$

则高斯焦点处的归一化强度将大于或等于 0.8. 特别是对于初级球面象差，上式给出

$$|A_{040}| \lesssim 0.22\lambda,$$

---

1) 这里忽略了由于 § 5.1 和本节讨论中选择不同的 z 方向而引起的微小影响.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

或者由 (9) 式,

$$|A'_{040}| \lesssim 0.94\lambda. \tag{14}$$

这就是初级球面象差所要求的容限条件，它意味着波阵面偏离高斯参考球的最大偏差必须小于波长的 0.94 倍.

对于其他初级象差，可用严格类似的方法求出衍射焦点的位置和该象差的容限. 特别是,有小量的初级象散存在时,求出衍射焦点的坐标是

$$x_F = y_F = 0, \quad z_F = \left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{022}. \tag{15}$$

这个结果也有一种简单的物理解释. 根据 (5) 式和 § 5.3(18) 式，切向焦面和弧矢焦面的半径 R_t 和 R_s 由下式给出 (仍假定 $n_1 = 1$):

$$\frac{1}{R_t} = -\frac{4}{a^2}\left(\frac{R}{Y_1^*}\right)^2 A'_{022}, \quad \frac{1}{R_s} = 0, \tag{16}$$

因此,两焦线的横坐标 Z_t 和 Z_s 为

$$Z_t = -\frac{Y_1^{*2}}{2R_t} = 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{022}, \quad Z_s = 0. \tag{17}$$

表 23　初级象差的衍射焦点位置和容限条件

象差类型	衍射焦点 F 的坐标			容限条件 $[i(F) \geqslant 0.8]$
	x_F	y_F	z_F	
球面象差	0	0	$2\left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{040}$	$\lvert A'_{040}\rvert \lesssim 0.94\lambda$
彗　　差	0	$\frac{2}{3}\left(\frac{R}{a}\right) A'_{031}$	0	$\lvert A'_{031}\rvert \lesssim 0.60\lambda$
象　　散	0	0	$\left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{022}$	$\lvert A'_{022}\rvert \lesssim 0.35\lambda$
象场弯曲	0	0	$2\left(\frac{R}{a}\right)^2 A'_{110}$	—
畸　　变	0	$\left(\frac{R}{a}\right) A'_{111}$	0	—

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以(15)式意味着,有小量的初级象散存在时,衍射焦点位于切向焦线和弧矢焦线二者的中央.

由于初级象场弯曲和初级畸变分别用 ρ 的二次项和一次项来表示,因此根据位移定理得出,这些象差的唯一影响是与无象差的象相联系的三维分布"整体移动". 所以有小量的初级象场弯曲或初级畸变存在时,衍射焦点处的归一化强度 i 为 1,但衍射焦点与高斯象点不重合.

表 23 中概括了有关初级象差的一些结果.

§ 9.4 与单一象差相联系的衍射图样

现在考虑存在 § 9.2(11) 展开式中某一单项

$$\Phi = a_{lnm} Y_1^{*2l+m} R_n^m(\rho) \cos m\theta \tag{1}$$

所表示的象差时的衍射象. 同前,我们不写出对 Y_1^* 的明显依赖关系,而令

$$\alpha_{lnm} = \frac{2\pi}{\lambda} a_{lnm} Y_1^{*2l+m} = \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_{nm} A_{lnm}. \tag{2}$$

又令

$$C = -\frac{i\pi A}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)^2 e^{i\left(\frac{R}{a}\right)^2 u}. \tag{3}$$

于是 § 9.1(6) 式的衍射积分变为

$$U(u, v, \psi) = \frac{C}{\pi} \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i\left[-v\rho\cos(\theta-\psi)-\frac{1}{2}u\rho^2+\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)\cos m\theta\right]} \rho d\rho d\theta. \tag{4}$$

(4)式的积分可展开为无穷级数,其方法是利用雅科毕恒等式[§ 8.8 (29) 式]

$$e^{iz\cos\phi} = J_0(z) + 2\sum_{s=1}^{\infty} i^s J_s(z) \cos s\phi, \tag{5}$$

把 $e^{-iv\rho\cos(\theta-\psi)}$ 和 $e^{i\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)\cos m\theta}$ 两项都展开. 将这两个展开式相乘,得到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$e^{i[-v\rho\cos(\theta-\psi)+\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)\cos m\theta]}$$

$$= 4\sum_{s=0}^{\infty}{}'\sum_{s'=0}^{\infty}{}' i^s(-i)^{s'}J_s[\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)]J_{s'}(v\rho)\cos ms\theta \times \cos[s'(\theta-\psi)], \tag{6}$$

式中求和号上带撇的意思是 $s=0$ 和 $s'=0$ 的项应各带有因子 1/2. 将这个二重级数代入 (4) 式,并对 θ 逐项积分. 这就得出

$$U(u, v, \psi) = 4C\sum_{s=0}^{\infty}{}'(-i)^{(m-1)s}\cos ms\psi \times \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}J_s[\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)]J_{ms}(v\rho)\rho d\rho, \tag{7}$$

$s=0$ 的项仍带有因子 1/2.

由于我们对小的象差 (α 小) 感兴趣, 因此把积分号内的 $J_s[\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)]$ 项展开为幂级数, 并按照 α_{lnm} 的幂重新整理所得到的表达式. 这就得出

$$U(u, v, \psi) = C[U_0 + i\alpha_{lnm}U_1 + (i\alpha_{lnm})^2U_2 + (i\alpha_{lnm})^3U_3 + (i\alpha_{lnm})^4U_4 + \cdots], \tag{8a}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
U_0 &= 2\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}J_0(v\rho)\rho d\rho,\\
U_1 &= 2(-i)^m\cos m\psi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho d\rho,\\
U_2 &= \frac{1}{2!}\Big\{\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}[R_n^m(\rho)]^2J_0(v\rho)\rho d\rho\\
&\quad + i^{2m}\cos 2m\psi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}[R_n^m(\rho)]^2J_{2m}(v\rho)\rho d\rho\Big\},\\
U_3 &= \frac{1}{2\cdot 3!}\Big\{3(-i)^m\cos m\psi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}[R_n^m(\rho)]^3J_m(v\rho)\rho d\rho\\
&\quad + (-i)^{3m}\cos 3m\psi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}[R_n^m(v\rho)]^3J_{3m}(v\rho)\rho d\rho\Big\},\\
U_4 &= \frac{1}{2^2\cdot 4!}\Big\{3\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}[R_n^m(\rho)]^4J_0(v\rho)\rho d\rho\\
&\quad + 4i^{2m}\cos 2m\psi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}[R_n^m(\rho)]^4J_{2m}(v\rho)\rho d\rho\\
&\quad + i^{4m}\cos 4m\psi\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}[R_n^m(\rho)]^4J_{4m}(v\rho)\rho d\rho\Big\}.
\end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

奈波尔已发现，式中 u 和 α_{lnm} 都是 1 的数量级，展开式 (8a)中约四项强度就足以精确到百分之几的范围以内.

求 (8b) 式中积分值可如下进行： 我们可用径向多项式表示因子 $e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}$，其方法是利用下述熟知的出自包尔 (Bauer)[1] 的公式

$$e^{iz\cos\phi}=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}\sum_{s=0}^{\infty}i^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}(z)P_s(\cos\phi), \qquad (9)$$

式中所有的 P 都是勒让德多项式. 如果令 $\cos\phi=2\rho^2-1$，并利用关系式 $P_s(2\rho^2-1)=R_{2s}^0(\rho)$[§ 9.2(8)]，由此得出

$$\begin{aligned}e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}&=e^{-\frac{1}{4}iu}e^{-\frac{1}{4}iu(2\rho^2-1)}\\&=e^{-\frac{1}{4}iu}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(-i)^s(2s+1)\\&\quad\times J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}u\right)R_{2s}^0(\rho).\end{aligned} \qquad (10)$$

把(10)式代入 (8b) 式中，得到一些积分，其中每一个积分由径向多项式的乘积再乘以一个贝塞耳函数组成. 这时，只要每一个上述径向多项式的乘积均可表示为线性组合 $\sum_p A_pR_p^m(\rho)$ 的形式，其中 m 等于此乘积所乘的贝塞耳函数的阶，则上述积分可用 § 9.2 的公式(9)

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho d\rho=(-1)^{\frac{n-m}{2}}\frac{J_{n+1}(v)}{v} \qquad (11)$$

求值. 要得出系数 A_p 的一般表达式是不容易的，但以后从某些例子中将看到，如果 m 和 n 不太大，利用 612 页的表 21 就不难建立这样的线性关系. 关于更普遍情况的方法讨论，我们介绍读者参看奈波尔的论文.

在无象差的波的特殊情况下，把 (10) 式代入 (7) 式，得出

---

1) 例如参看 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 2nd Ed., 1944), p. 368.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U(u, v, \psi) = 2Ce^{-\frac{1}{4}iu}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(-i)^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}u\right)$$

$$\times \int_0^1 R_{2s}^0(\rho)J_0(v\rho)\rho d\rho$$

$$= 2Ce^{-\frac{1}{4}iu}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(i)^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}u\right)$$

$$\times \frac{J_{2s+1}(v)}{v}, \tag{12}$$

式中已用了(11)式. 虽然形式上不同，但这个展开式与§8.8.1给出的洛梅耳级数展开式等价.

由展开式(8)可立即导出衍射象的某些普遍性质. 可以看出，以 $\psi + 2\pi\mu/m\ (\mu = 1, 2, \cdots m)$ 代 ψ 时 U 保持不变；所以 z 轴是 m 重对称轴. 而且通过 z 轴并与 $x = 0$ 平面夹角为 $\pi\mu/m$ 的平面是对称面. 当然，$m = 0$ 时有旋转对称性.

其次，考虑相对于 $z = 0$ 平面的对称性. 我们看到以 $-u$ 代 u 时，(8)式中所有积分都变为它们的共轭. 这时，如果 m 是奇数，则这些积分所乘的系数都是实数. 所以在这种情况下，$U(u, v, \psi)$ 变为它的共轭，结果强度保持不变. 因此，如果 m 是奇数，则强度分布相对于 $z = 0$ 平面对称. 另一方面，如果 m 是偶数(但 $m \neq 0$)，则那些含有因子 $\cos 2\mu m\psi$ (μ 是整数)的系数都是实数，而其他含有因子 $\cos(2\mu + 1)m\psi$ 的系数都是纯虚数. 所以，如果以 $-u$ 代 u 并且同时以 $\psi + \pi/m$ 代 ψ，则这时 U 变为它的共轭. 因此，如果 m 是偶数但不为零，则 $z =$ 常数的平面内任一点处的强度与经 $z = 0$ 平面反射再绕 z 轴转 π/m 角度而得出的那一点处的强度相同. 由此得出，虽曾指出 z 轴一般是 m 重对称轴，但 m 是偶数时，它却是相对于 $z = 0$ 平面内图样的 $2m$ 重对称轴. $m = 0$ (球面象差)时，衍射象相对于 $z = 0$ 平面是不对称的.

最后，我们看到，当象差常数 α_{lnm} 的符号改变时，如果 m 是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

偶数时以 $-u$ 代 u，以及 m 是奇数时以 $\phi+\pi$ 代 ϕ，则强度分布不变.

下面简单研究一下当系统有小量的初级象差时象的结构.

§9.4.1 初级球面象差

在这种情形中，$l=m=0$ 和 $n=4$. 象差函数与 θ 无关，并且三维衍射象对于主方向 $v=0$ 具有旋转对称性.

根据(8)式，衍射积分按 α 的幂的展开式为

$$U(u,v,\phi)=C[U_0+i(\alpha_{040})U_1+(i\alpha_{040})^2U_2+\cdots], \quad (13)$$

式中 U_0 代表无象差的象的扰动，U_1, U_2, $\cdots$ 由(8b)式中其他表达式给出，其中 $m=0$, $n=4$. 特别是

$$U_1=2\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}R_4^0(\rho)J_0(v\rho)\rho d\rho. \quad (14)$$

以(10)式代替 $e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2}$，得出

$$U_1=2e^{-\frac{1}{4}iu}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(-i)^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}u\right)$$
$$\times\int_0^1 R_{2s}^0(\rho)R_4^0(\rho)J_0(v\rho)\rho d\rho. \quad (15)$$

为了求出右方积分的值，如前所述，径向多项式的乘积将由上标等于贝塞耳函数的阶(此时为零)的径向多项式的线性组合来代替. 利用§9.2(8)式

$$R_{2s}^0(\rho)=P_s(2\rho^2-1), \quad (16)$$

和某些涉及勒让德多项式的熟知关系，不难求出这种线性组合. 我们有

$$R_{2s}^0(\rho)R_4^0(\rho)=P_s(2\rho^2-1)P_2(2\rho^2-1). \quad (17)$$

现在 $P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1)$，因此(17)式右方可写为

$$P_s(t)P_2(t)=\frac{3}{2}t^2P_s(t)-\frac{1}{2}P_s(t). \quad (18)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

多次应用递推关系式[1]

$$tP_s(t) = \frac{1}{2s+1}[(s+1)P_{s+1}(t) + sP_{s-1}(t)], \qquad (19)$$

由此得出

$$P_2(t)P_s(t) = a_sP_{s+2}(t) + b_sP_s(t) + c_sP_{s-2}(t), \qquad (20)$$

式中

$$a_s = \frac{3}{2}\frac{(s+2)(s+1)}{(2s+3)(2s+1)}, \quad b_s = \frac{(s+1)s}{(2s+3)(2s-1)},$$

$$c_s = \frac{3}{2}\frac{s(s-1)}{(2s+1)(2s-1)}. \qquad (21)$$

因此(17)式变为

$$R^0_{2s}(\rho)R^0_4(\rho) = a_sR^0_{2s+4}(\rho) + b_sR^0_{2s}(\rho) + c_sR^0_{2s-4}(\rho). \qquad (22)$$

最后,把(22)式代入(15)式中,并利用(11)式,由此得出

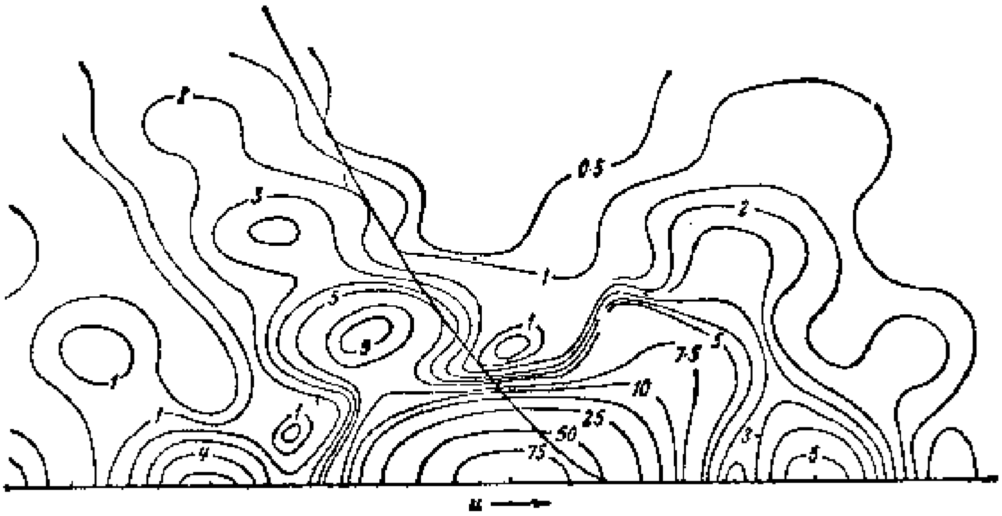


图9.3 存在初级球面象差 $\Phi = 0.48\lambda\rho^4$ 时在一子午面内的等照度线. 粗线表示几何焦散. 无象差的象的中心处强度已归一化为100. 在最佳接收平面内的斯特列耳强度为0.95 [引自 F. Zernike 和 B. R. A. Nijboer, 撰稿于 *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 232.]

1) 例如参看 E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, fourth ed. 1940), p. 308.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U_1 = 2e^{-\frac{1}{4}iu}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\frac{1}{v}\sum_{s=0}^{\infty}(i)^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}u\right)$$
$$\times [a_sJ_{2s+5}(v) + b_sJ_{2s+1}(v) + c_sJ_{2s-3}(v)]. \qquad (23)$$

用类似的方法[1]可得出 $U_2, U_3, \cdots$ 的级数展开式。然后可利

(a)
(b)

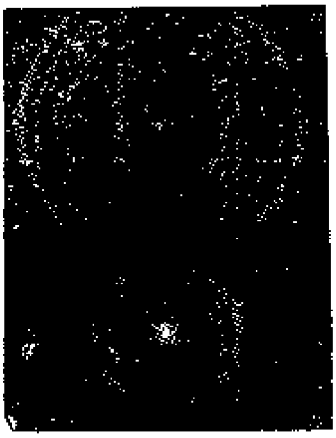
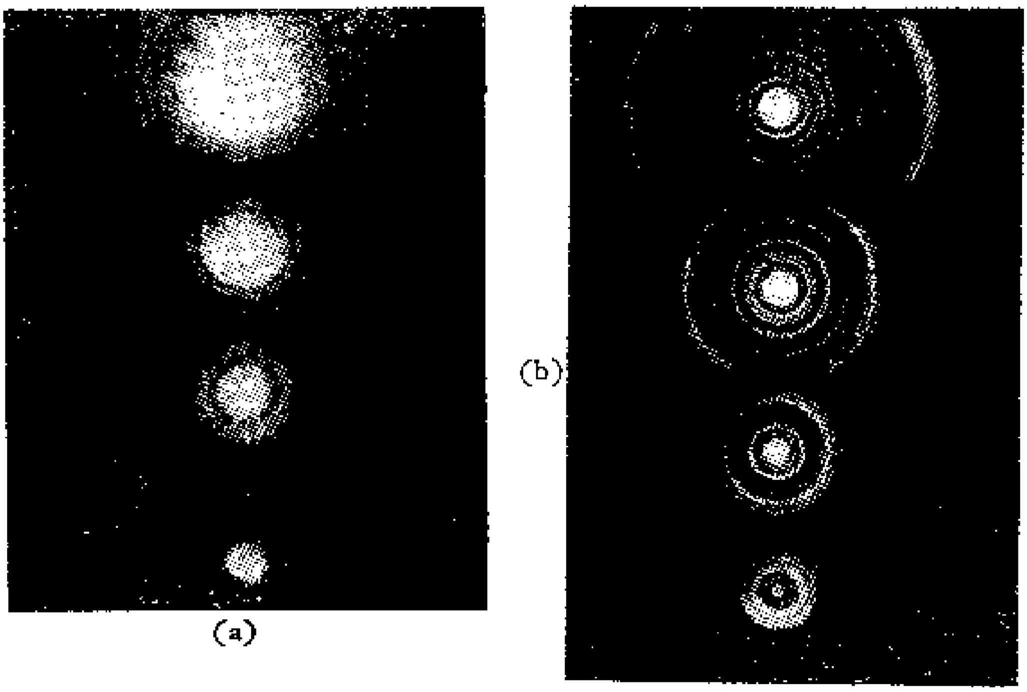


图 9.4 存在初级球面象差 $\Phi = 16\lambda\rho^4$ 时在边缘焦平面内 [(a)] 和在几何明晰圈的平面内 [(b)] 的象 (引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen 1948, p. 56.)



(a) (b)

图 9.5 存在初级球面象差 $\Phi = 17.5\lambda\rho^4$, $8.4\lambda\rho^4$, $3.7\lambda\rho^4$ 和 $1.4\lambda\rho^4$ 时在高斯焦平面内 [(a)] 和在几何明晰圈的平面内 [(b)] 的象 [(b) 的标度是 (a) 的三倍](引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 56.)

1) 详细讨论见 F. Zernike 和 B. R. A. Nijboer, 撰稿于 *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

用这些展开式计算象区内若干点处的强度 $I=|U|^2$，并作出等照度线(等强度线)。当然，在垂直于主方向 $v=0$ 的任一平面内，等照度线是一些圆。

图 9.3 画出了初级球面象差 $\Phi=0.48\lambda\rho^4$ 时在一子午面内的等照度线，而图 9.4 和图 9.5 中的复制照片显示出球面象差稍大时在不同的接收平面内的象的外貌[1]。

§ 9.4.2 初级彗差

这时有 $l=0$，$n=3$，$m=1$。根据 621 页的表 23，衍射焦点在 $z=0$ 平面内，而在此平面内的扰动由下式给出，

$$U(0,v,\psi)=C[U_0(0,v,\psi)+(i\alpha_{031})U_1(0,v,\psi)+(i\alpha_{031})^2U_2(0,v,\psi)+\cdots]. \tag{24}$$

有了 $u=0$，由 (8b) 式定义的积分 U_0 就代表在无象差系统的焦平面内的扰动 $2J_1(v)/v$ (爱里图样)，而 U_1 的值可用 (11) 式立即求出。为了求出 $U_2, U_3\cdots$ 的值，必须再一次把圆多项式的乘积表示为这种多项式的适当线性组合。特别是，可利用 621 页的表 21 来证实

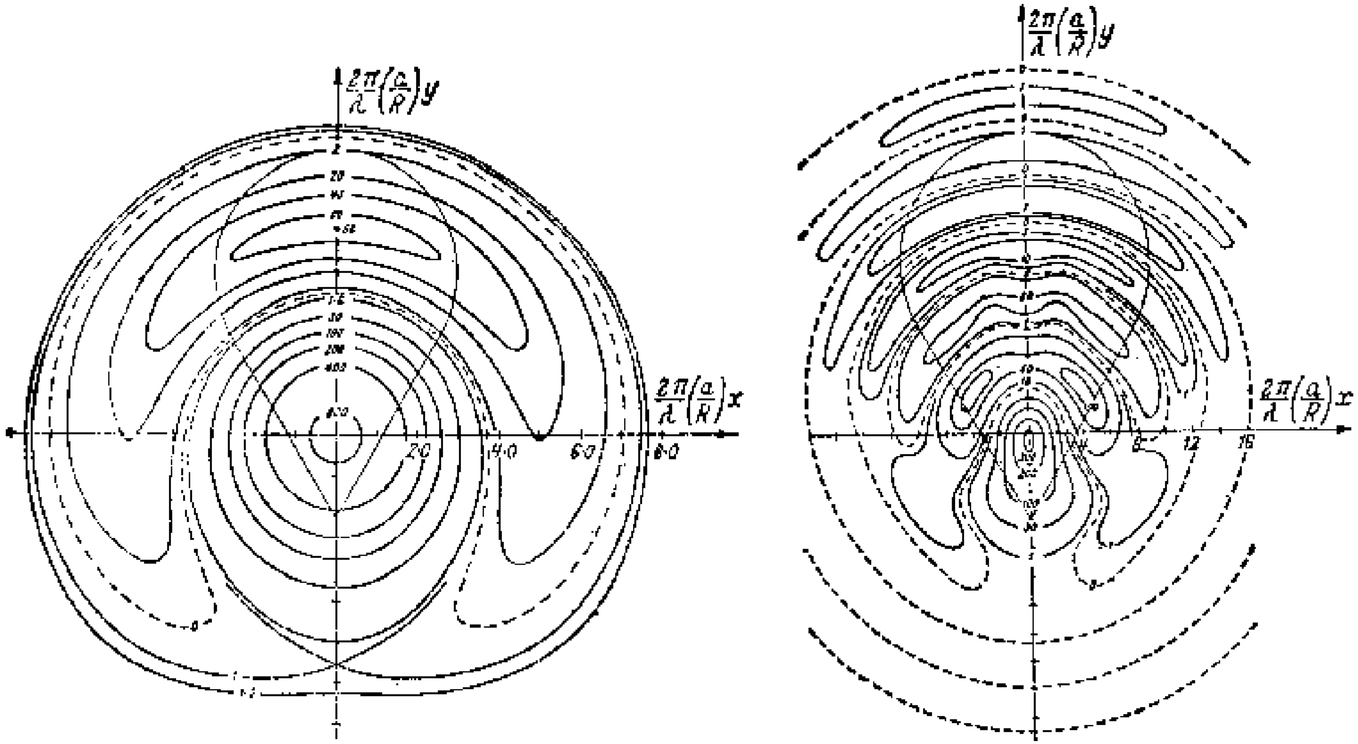
$$\begin{aligned}(R_3^1)^2&=\frac{1}{4}R_0^0+\frac{1}{20}R_2^0+\frac{1}{4}R_4^0+\frac{9}{20}R_6^0\\&=\frac{2}{5}R_2^2+\frac{3}{5}R_6^2.\end{aligned} \tag{25}$$

把这些关系式用于 (8b) 的 U_2 表达式中，并应用 (11)式，即可求出 U_2 的积分值，我们总共有

---

1) 当象差与波长相比并不小时，展开式(13)不适于计算强度。对于初级球面象差为几个波长时在一子午面内的等照度线，A. Maréchal 曾利用机械积分器确定，并发表于 E. H. Linfoot, *Recent Advances in Optics* (Oxford, Clarendon Press, 1955), pp. 60—61，和 M. Françon，撰稿于 *Encyclopedia of Physics*, XXIV (Ed. S. Flügge, Berlin, Springer, 1956), pp. 321—322；J. Focke 用渐近逼近法确定，见 *Optica Acta* **3** (1956), 110. 又见 J. Picht, Ann. d. Physik, (4), **77** (1925), 685.

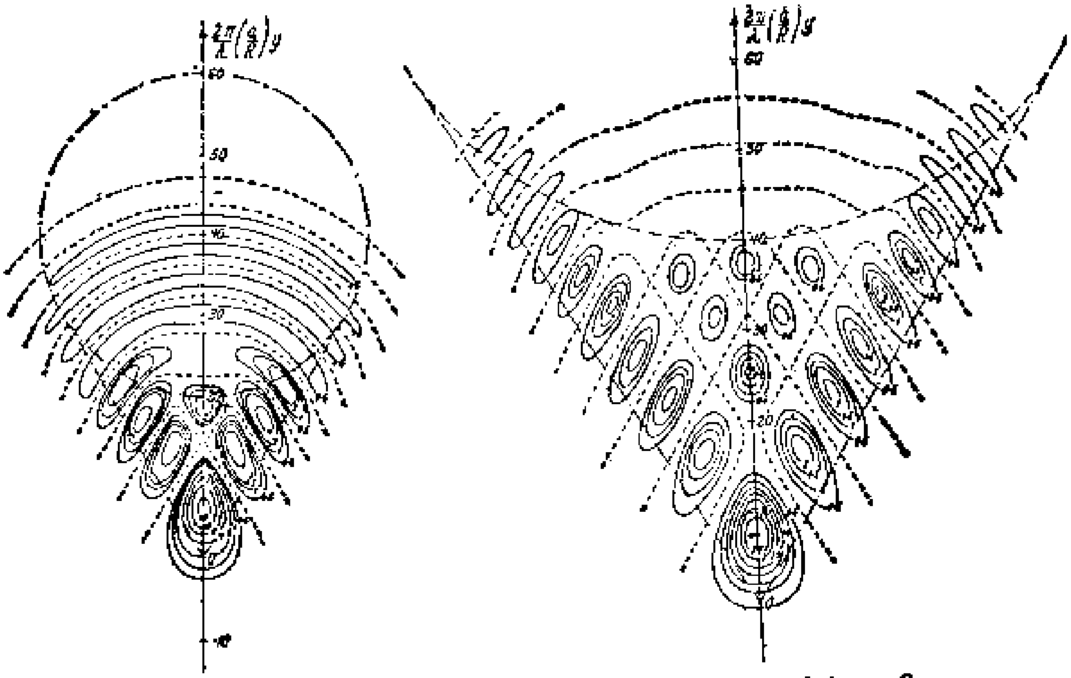
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a): $\Phi = 0{\cdot}43\lambda(\rho^3 - \frac{2}{3}\rho)\cos\theta$　　(b): $\Phi = 1{\cdot}4\lambda(\rho^3 - \frac{2}{3}\rho)\cos\theta$

图 9.6　存在初级彗差时在 $z=0$ 平面内的等照度线．虚线代表零强度线．还画出几何模糊图的边界．在无象差的象的中心处强度已归一化为1000．斯特列耳强度：(a)0.879；(b)0.306 [图 (a) 引自 B. R. A. Nijboer, Thesis, University of Groningen, 1942, p. 62；图 (b) 引自 K. Nienhuis and B. R. A. Nijboer, *Physica* **14** (1949), 599.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a): $\Phi = 3{\cdot}2\lambda\rho^3 \cos\theta$　　(b): $\Phi = 6{\cdot}4\lambda\rho^3 \cos\theta$

图 9.7　存在初级彗差时在 $z=0$ 平面内的等照度线.
在无象差的象的中心处强度已归一化为 100[引自 R. Kingslake, *Proc. Phys. Soc.* **61** (1948), 147.]

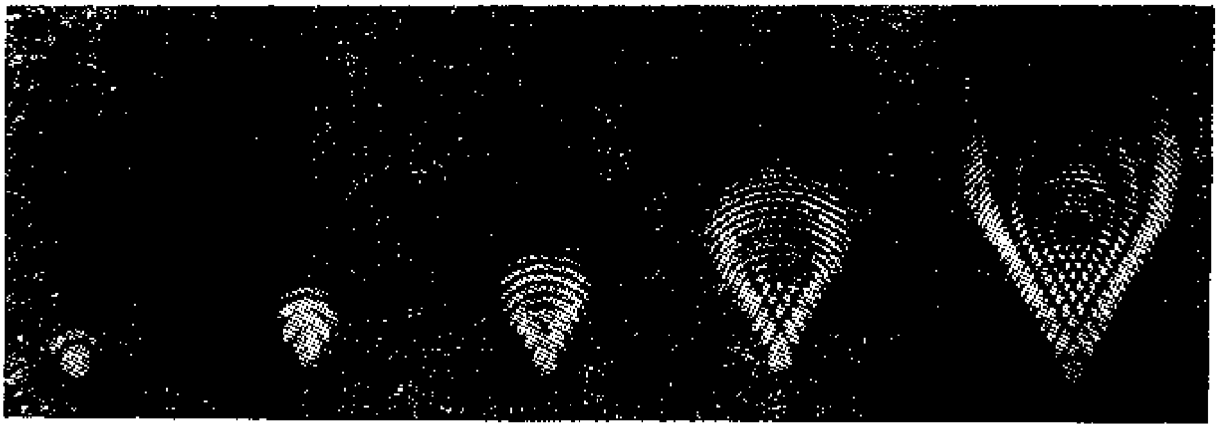


图 9.8　存在彗差 $\Phi = 0.3\lambda\rho^3\cos\theta$, $\lambda\rho^3\cos\theta$, $2.4\lambda\rho^3\cos\theta$, $5\lambda\rho^3\cos\theta$, $10\lambda\rho^3\cos\theta$ 时在高斯焦平面内的象 (引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 40.)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
U_0(0, v, \phi) &= \frac{2J_1(v)}{v}, \\
U_1(0, v, \phi) &= i\cos\phi\,\frac{2J_4(v)}{v}, \\
U_2(0, v, \phi) &= \frac{1}{2v}\left\{\frac{1}{4}J_1(v) - \frac{1}{20}J_3(v) + \frac{1}{4}J_5(v)\right. \\
&\quad - \frac{9}{20}J_7(v) - \cos 2\phi \\
&\quad \left.\times\left[\frac{2}{5}J_3(v) + \frac{3}{5}J_7(v)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{26}
$$

有不同数值的初级彗差时的等照度线如图 9.6 和 9.7 所示。图 9.6 的数据是由级数展开算出的，图 9.7 的数据是用数值积分算出的。图 9.8 给出了受初级彗差影响的象的照片。这些图形表明，当象差具有波长的数量级时，这些象既不类似于爱里图样，也不类似于几何光学所预示的图样。当象差增大时，真实的象很快变成几何光学所示的形状，但是被一系列的暗带所分割；这可解释为由孔的直径上相对的点所衍射的光线干涉而引起的。

图 9.6 也说明了 § 9.2 所确立的一般结果，即一个小的象差用圆多项式表示时，强度图样有位移以致在坐标原点处有其最大值。

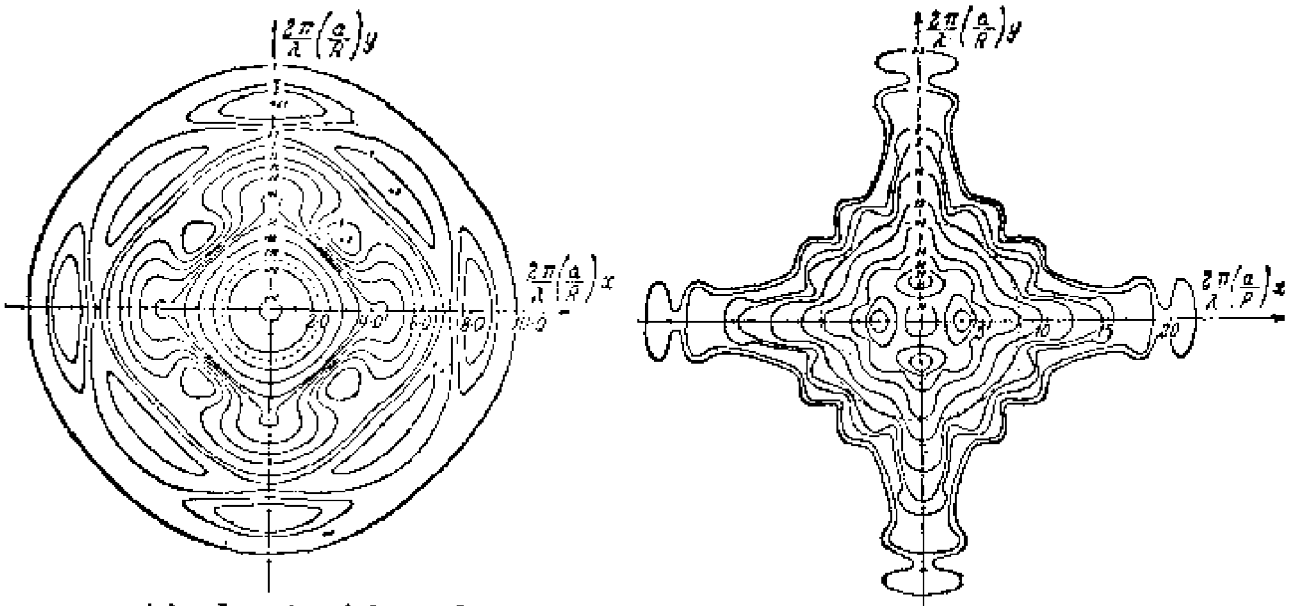
§ 9.4.3 初级象散

有小量初级象散的效应可用类似的方法来研究。这时有 $l=0$，$n=m=2$，如 § 9.3 所述，衍射焦点在两焦线的中央。考虑在中央平面即过该点并垂直于主方向的平面内的光分布。当象差用适当的圆多项式 $[A_{022}R_2^2(\rho)\cos 2\theta]$ 表示时，中央平面就是 $u=0$ 平面。

中央平面内的扰动由下式给出，

$$
\begin{aligned}
U(0, v, \phi) = C[U_0(0, v, \phi) &+ (i\alpha_{022})U_1(0, v, \phi) \\
&+ (i\alpha_{022})^2 U_2(0, v, \phi) + \cdots],
\end{aligned} \tag{27}
$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(a): $\Phi = 0{\cdot}16\lambda\rho^2 \cos 2\theta$　　(b): $\Phi = 0{\cdot}64\lambda\rho^2 \cos 2\theta$

图 9.9　存在初级象散时在中央平面内的等照度线．虚圆代表几何模糊图的边界．在无象差的象的中心处强度已归一化为 1000．斯特列耳强度：(a) 0.84；(b) 0.066［图 (a) 引自 B. R. A. Nijboer, Thesis University of Groningen, 1942, p. 55；图 (b) 引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 13.］

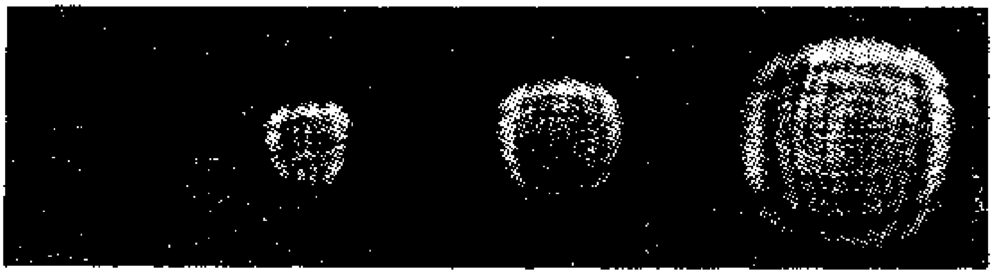


图 9.10　存在初级象散 $\Phi = 1.4\lambda\rho^2 \cos 2\theta$, $2.7\lambda\rho^2 \cos 2\theta$, $3.5\lambda\rho^2 \cos 2\theta$, $6.5\,\lambda\rho^2 \cos 2\theta$ 时在中央平面内的象（引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p. 32.）

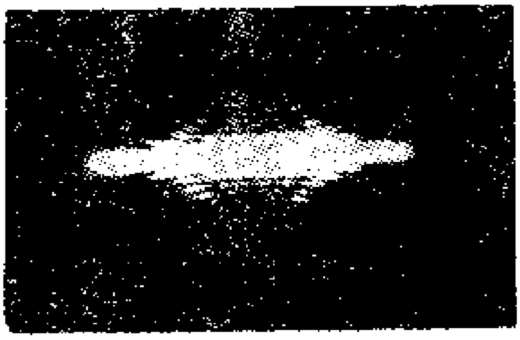


图 9.11　存在初级象散 $\Phi = 2.7\lambda\rho^2 \cos 2\theta$ 时，在包含一焦线的平面内的象（引自 K. Nienhuis, Thesis, University of Groningen, 1948, p 32.）

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $U_0(0, v, \psi)$ 同以前一样代表爱里图样分布，而 $U_1(0, v, \psi)$ 的值可用(11)式立即求出．为了求出 U_2 的值，我们利用恒等式

$$\left.\begin{aligned}(R_2^2)^2 &= \frac{1}{3}R_0^0 + \frac{1}{2}R_2^0 + \frac{1}{6}R_4^0,\\ &= R_4^4,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

并同以前一样进行计算．总共得到

$$\left.\begin{aligned}U_0(0, v, \psi) &= \frac{2J_1(v)}{v},\\ U_1(0, v, \psi) &= -2\cos 2\psi\,\frac{2J_3(v)}{v},\\ U_2(0, v, \psi) &= \frac{1}{2v}\left\{\frac{1}{3}J_1(v) - \frac{1}{2}J_3(v)\right.\\ &\quad \left.+ \frac{1}{6}J_5(v) + \cos 4\psi J_5(v)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

图 9.9 中画出了有象散的象的等照度线图．图 9.9(a) 是由展开式(27)算出的，其中已计及直至包含 α 四次幂的项．图 9.10 和图 9.11 给出了有象散的象的照片．可以看出，只有小量象散存在时，中央平面内的等照度线在中心附近是圆形的，但在象的外围部分有更复杂的形状．当象散增大时，象具有类似软垫的外貌，并且被一些干涉条纹跨于其上．

至于其余两种初级象差(象场弯曲和畸变)，我们已经知道它们不影响三维象的结构，而仅影响衍射焦点的位置．所以在焦区内的等照度线图与无象差的象的等照度线图(图 8.41)相同，但相对于高斯焦点有一位移，其数值如 621 页的表 23 所示．

§9.5 扩展物的成象

前面一直涉及的是点源的象．现在将在傅里叶变换法的基础

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上描述有关扩展物成象的某些一般方法. 这些方法主要是由迪菲厄 (Duffieux)[1] 而部分是在朗斯罗 (Lansraux) 的合作下发展起来的,后来许多作者[2] 已推广并应用于一些特殊问题.

我们分别考虑相干光成象和不相干光成象.

§ 9.5.1 相干照明

我们分别用两套坐标轴彼此平行并且原点在同一轴的两点上的笛卡儿坐标 (x_1, y_1) 和 (ξ, η) 表示高斯象平面和出射光瞳平面内的点. 物平面内的点可方便地用标度已归一化的坐标 (x_0, y_0) 来表示,即如果 (x_0, y_0) 是某一物点的笛卡儿坐标,M是横向放大率,则

$$x_0 = MX_0, \quad y_0 = MY_0, \tag{1}$$

因此,这时一个物点和它的高斯象点有相同的坐标数值[3].

系统的成象特性可用**透射函数** $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 来表征,它定义为 x_0y_0 平面每单位面积由于物点 (x_0, y_0) 处的单位振幅和零位相的扰动在高斯象平面内 (x_1, y_1) 点处引起的复振幅. 当然,透射函数也取决于光的波长 λ,但因将只涉及到单色光,所以不必考虑这种依赖关系.

设 $U_0(x_0, y_0)$ 代表物平面内的复扰动. (x_0, y_0) 处的面元对于象平面内 (x_1, y_1) 点处扰动所作的贡献为 $dU_1(x_1, y_1) = U_0(x_0, y_0)K(x_0, y_0; x_1, y_1)dx_0dy_0$. 因而 (x_1, y_1) 处的总扰动为

$$U_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0)K(x_0, y_0; x_1, y_1)dx_0dy_0. \tag{2}$$

---

1) P. M. Duffieux, *L'Intégrale de Fourier et ses Applications à l'Optique* (Rennes, 1946); P. M. Duffieux and G. Lansraux, *Rev. d'Optique*, **24** (1945), 65, 151, 215.

2) 例如参看 A. Blanc-Lapierre, *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, **13** (1953), 245; H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.* A, **217** (1953), 408; 同上, A, **231** (1955), 91; *Proc. Phys. Soc.* B, **69** (1956), 562; K. Miyamoto, *Progress in Optics*, Vol. I ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland, Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1961), 41.

3) (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 可看作是 § 5.2 中选任意常数 $l_1 = C = 1$ 时的赛德耳变量.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

积分只是在形式上遍及无穷域，因为在那些没有光传送到系统的象空间中去的面积上，U_0K 为零.

这时讨论的是一些点源，我们用出射光瞳内的复扰动来说明系统的特性，它是由象差函数和一个振幅因子表征的，后者在有适中孔径的系统内假定为常数. 利用这些量不难找到透射函数的表达式. 为此，首先考虑光源简化为一个在点 $x_0=x_0'$, $y_0=y_0'$ 处具有单位强度及零位相的点源，即

$$U_0(x_0,y_0)=\delta(x_0-x_0')\delta(y_0-y_0') \tag{3}$$

时(2)式的极限形式，式中 δ 是狄喇克 δ 函数[参看附录 4]. 于是由(2)式给出

$$U_1(x_1,\ y_1)=K(x_0',\ y_0';\ x_1,\ y_1), \tag{4}$$

即透射函数 K 表示由点源(3)引起的扰动. 取中心在高斯象点 $x_1'=x_0'$, $y_1'=y_0'$ 处的高斯参考球. 设 R 为这个参考球的半径，并设

$$H(x_0',\ y_0';\ \xi,\ \eta)=\frac{i}{\lambda}G(x_0',\ y_0';\ \xi,\ \eta)\frac{e^{-ikR}}{R} \tag{5}$$

为点源(3)在这个球上某一点 (ξ,η) 处所引起的扰动. 除了一个附加因子 $\pi/2$ 以外，G 的位相就是系统的象差函数 Φ，而 G 的振幅则是成象的波振幅中不均匀性的量度. 在(5)式右方已引入了因子 i/λ 以便简化后面的公式. 现在根据惠更斯-菲涅耳原理，象平面内的扰动同高斯参考球上的扰动按下述公式相联系(假定衍射角很小)：

$$U_1(x_1,\ y_1)=-\frac{i}{\lambda}\iint H(x_0',\ y_0';\ \xi,\ \eta)\frac{e^{iks}}{s}d\xi d\eta, \tag{6}$$

式中 s 是该球的 (ξ,η) 点到高斯象平面内的 (x_1,y_1) 点的距离，积分遍及参考球大致充满孔径的那一部分. 根据 § 8.8 的(2)和(7)式，其中 $x=x_1-x_0'$, $y=y_1-y_0'$, $z=0$, 并用 R 代替 f，则还有

$$s\sim R-\frac{(x_1-x_0')\xi+(y_1-y_0')\eta}{R}. \tag{7}$$

由公式(4)至(7)得出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$K(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{1}{(\lambda R)^2}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x_0, y_0; \xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda R}[(x_1-x_0)\xi+(y_1-y_0)\eta]} d\xi d\eta, \qquad (8)$$

在孔径以外的 (ξ, η) 点处 G 取为零。这就是系统的透射函数 K 与“光瞳函数” G 之间所要求的关系式.

因为 K 可看作一个点源的象上的扰动，所以把它看作 x_1，y_1 的函数时，在高斯象点 $x_1 = x_0$，$y_1 = y_0$ 或其近旁，它具有相当锐的极大值，而随着与该点距离的增大，它很快地但一般非单调地下降. 在一个经过很好校正的系统中，仅在一块其大小为爱里图样第一个暗环数量级的区域内，K 才可看得出来. 把透射函数看作 (x_0, y_0) 的函数，则该点沿物表面考察时，透射函数变化缓慢. 更确切地说，可以把工作领域分成若干区，每一区都比系统所能分辨的最精细的细节大得多，其特性是在每一个这样的区 A 内，作为良好的近似，K 是一个起自高斯象点但不包括象点本身位置的位移矢量的函数. 例如，在一个经过很好校正的系统中，$K(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 代表以 (x_0, y_0) 的高斯象点为中心的爱里图样（除了一个常数因子以外）. 在这种情形中，可写出

$$K(x_0, y_0; x_1, y_1) = K_A(x_1 - x_0, y_1 - y_0). \qquad (9)$$

具有这种特性的区 A 称为系统的等晕区. 我们将限于讨论那些小到落在这样一个等晕区范围内的物体[1]. 在这种情况下，(2)和(8)式可用下列式子替换，

$$U_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) dx_0 dy_0, \qquad (2a)$$

和

$$K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \frac{1}{(\lambda R)^2}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda R}[(x_1-x_0)\xi+(y_1-y_0)\eta]} d\xi d\eta, \qquad (8a)$$

---

1) 关于(9)式成立的条件的透彻讨论已由 P. Dumontet 发表于 *Optica Acta*, **2** (1955), 53.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这时函数G与物点无关.

让我们把 U_0, U_1 和K表示为下列傅里叶积分:

$$U_0(x_0, y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{U}_0(f, g)e^{-2\pi i[fx_0+gy_0]}dfdg, \quad (10a)$$

$$U_1(x_1, y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{U}_1(f, g)e^{-2\pi i[fx_1+gy_1]}dfdg, \quad (10b)$$

$$K(x, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{K}(f, g)e^{-2\pi i[fx+gy]}dfdg. \quad (10c)$$

于是,由傅里叶反演公式,

$$\mathscr{U}_0(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U_0(x_0, y_0)e^{2\pi i[fx_0+gy_0]}dx_0dy_0, \quad (11a)$$

$$\mathscr{U}_1(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U_1(x_1, y_1)e^{2\pi i[fx_1+gy_1]}dx_1dy_1, \quad (11b)$$

$$\mathscr{K}(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x, y)e^{2\pi i[fx+gy]}dxdy. \quad (11c)$$

根据(2a)式,U_1 是 U_0 与K的卷积(也称为褶积);关于傅里叶反演,由卷积定理[1]得到简单关系式

$$\mathscr{U}_1(f, g)=\mathscr{U}_0(f, g)\mathscr{K}(f, g). \quad (12)$$

上式意味着,如果把物平面内的扰动和象平面内的扰动各自看成是所有可能的"空间频率" f, g 的空间谐波分量的叠加,则象的每一分量只取决于物的相应分量,并且这两个分量的比值为 $\mathscr{K}$. 因此从物到象的变换与一个**线性滤波器**的作用等效. 而且,比较(10c)和(8a)两式得出,

$$\mathscr{K}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}\right)=G(\xi, \eta), \quad (13)$$

因此**对于相干照明,频率响应函数**(也称为**透射因子**)$\mathscr{K}(f, g)$**等于光瞳函数G在高斯参考球的**

$$\xi=\lambda Rf, \quad \eta=\lambda Rg \quad (14)$$

点处的值.

---

1) 参看 I. N. Sneddon, *Fourier Transforms* (New York, McGraw-Hill, 1951), p. 23.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因为在 $\xi\eta$ 平面上孔的边界以外各点处，G 为零，所以系统不透过频率大于某一值的频谱振幅．如果孔呈圆形，其半径为 a，则显然不透过

$$f^2+g^2>\left(\frac{a}{\lambda R}\right)^2 \tag{15}$$

这样的一对对频率．为了说明这个结果，考虑一个一维物体，其特性在 x 方向上不变．设 Δy_0 是属于频率 g 的周期．于是由(15)式，系统只能透过满足

$$\Delta y_0=\frac{1}{g}>\frac{\lambda}{\sin\theta_1} \tag{16}$$

的那些频谱分量的信息，式中 $\sin\theta_1\sim a/R$ 是在象方的半孔径角(已假定它很小)．这时 $y_0=MY_0$，式中 M 是单向放大率．如果我们假定系统遵从正弦条件，则(参看§4.5.1) $\dfrac{n_0\sin\theta_0}{n_1\sin\theta_1}=M$，并且(16)式可写成

$$\Delta Y_0>\frac{\lambda_0}{n_0\sin\theta_0}, \tag{17}$$

式中 $\lambda_0=n_1\lambda$ 是真空波长，$n_0\sin\theta_0$ 是系统的数值孔径．因此，如果横跨物平面的扰动随位移作正弦变化，则仅当周期超过(17)式右方所给的值时，才能在象平面内获得有关它的信息．

§9.5.2 不相干照明

现在考虑从物平面不同面元发出的光是不相干的，例如物体是初级光源时的情况．用同前面一样的坐标，设 $I_0(x_0, y_0)$ 是物平面内某一点处的强度．从中心在物点(x_0, y_0)的面元 dx_0dy_0 到达象平面上点(x_1, y_1)的光强度是 $dI_1(x_1, y_1)=I_0(x_0, y_0)\times|K(x_0, y_0; x_1, y_1)|^2dx_0dy_0$，式中 K 仍是系统的透射函数．因为假定物体是不相干的，来自物平面不同面元的强度应相加，所以(x_1, y_1)处的总强度由下式给出，

$$I_1(x_1, y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}I_0(x_0,y_0)|K(x_0,y_0;x_1,y_1)|^2dx_0dy_0. \tag{18}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果仍限于讨论充分小的物体，则可用下式替换(18)式[1]：

$$I_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0)|K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|^2 dx_0 dy_0. \tag{19}$$

(19)式表明，对于不相干照明成象，象上的强度分布是物上的强度分布与透射函数模的平方的卷积。把这些函数表示为形如(10)式的傅里叶积分，并且用 $\mathscr{I}_0(f, g)$，$\mathscr{I}_1(f, g)$ 和 $\mathscr{L}(f, g)$ 来表示它们的"空间频谱"。于是，由傅里叶反演定理，代替(11)式，得出

$$\mathscr{I}_0(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0) e^{2\pi i[fx_0+gy_0]} dx_0 dy_0, \tag{20a}$$

$$\mathscr{I}_1(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_1(x_1, y_1) e^{2\pi i[fx_1+gy_1]} dx_1 dy_1, \tag{20b}$$

$$\mathscr{L}(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)|^2 e^{2\pi i[fx+gy]} dx dy. \tag{20c}$$

由(19)式利用卷积定理得出

$$\mathscr{I}_1(f, g) = \mathscr{I}_0(f, g)\mathscr{L}(f, g). \tag{21}$$

因此，从物到象的变换仍是一个线性滤波器，但这时按此法变换的是强度的空间频谱，而不是复振幅的空间频谱。频率响应函数是函数 $\mathscr{L}(f, g)$，由(20c)，(10c)和卷积定理，它可表示为以下的形式：

$$\mathscr{L}(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(f' + f, g' + g)\mathscr{K}^*(f', g')df'dg'. \tag{22}$$

---

1) 我们注意到，用(19)式替换(18)式并不需要K满足完全等晕条件(9)式；只要K的模满足此条件，即物体占有整个区 $\mathscr{A}$，这就足够了，作为良好的近似，我们有

$$|K(x_0, y_0; x_1, y_1)| = |K_A(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|.$$

Dumontet (上述引文)的分析表明，通常这个条件在物平面比(9)式所要求的更大得多的区域内在良好的近似程度上成立。因此光学成象表示为线性滤波器，这对于不相干照明比对于相干照明有更宽的有效范围。然而为了能够通过比较简单的公式(后面的(22)式)用系统的光瞳函数来表示频率响应函数，我们仍限于讨论那些小到完全等晕条件能成立的物体。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(22)式右方的积分通称为(函数 $\mathscr{K}$ 的)自相关函数,它出现于许多具有统计性质的物理问题分析中. 以后在有关部分相干性理论中还将遇到它.

我们曾经指出, $\mathscr{K}(f, g)$ 是光瞳函数 G 在高斯参考球上一适当点处的值. 如果把(13)式代入(22)式,则得出

$$\mathscr{L}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}\right)=\frac{1}{(\lambda R)^2}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi'+\xi, \eta'+\eta)G^*(\xi', \eta')d\xi'd\eta', \quad (23)$$

由此确立了下述重要结果: 除了一个常数因子以外, 对于不相干照明, 频率响应函数 $\mathscr{L}(f, g)$ 是系统光瞳函数的自相关函数.

设 $\mathscr{A}$ 是出射光瞳的面积. 因为光瞳函数 $G(\xi', \eta')$ 在孔的边界以外各点处处为零,所以 $\xi'\eta'$ 平面内(23)式的被积函数不为零的区域, 就是孔径 $\mathscr{A}$ 与同一孔径相对于 $\mathscr{A}$ 作一平移后二者所共有的面积, 该平移量 ξ 和 η 分别在负的 ξ' 和 η' 方向上(见图 9.12). 当 ξ 和 η 大到那两块面积不重叠时,响应函数的值显然为零;因此, 同相干情况类似, 系统只透过不大于某一极大值的空间频率. 特别是对于半径为 a 的圆孔, 当 $\xi^2+\eta^2 \geqslant (2a)^2$, 即

$$f^2+g^2>\left(\frac{2a}{\lambda R}\right)^2 \quad (24)$$

时, 那两块面积就没有公共的区域. 通过与上述由(15)式导出(17)式同样的论证,这意味着,用不相干照明时, 不晕系统只能透过其周期 ΔY_0 满足

$$\Delta Y_0>\frac{0.5\lambda_0}{n_0 \sin\theta_0} \quad (25)$$

的频谱分量的信息. 可以看出, 这个极限值正好是用相干光成象时所得值的一半.

虽然一个给定系统的响应函数 $\mathscr{L}$ 取决于两个变量 f 和 g, 但原则上有可能从包含一维试验物的实验导出它的全部信息. 为了看出这一点, 考虑一对频率 (f, g), 并引入极坐标, 使得

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$f = h\sin\theta$, $g = h\cos\theta$. 现在假定轴在其本身平面内沿 θ 正方向旋转一角度 $\bar{\theta}$. 于是 f 和 g 变换到 $\bar{f} = h\sin(\theta - \bar{\theta})$ 和 $\bar{g} = h\cos(\theta - \bar{\theta})$, 但 $\mathscr{L}$ 的值显然保持不变. 这时可选择转角 $\bar{\theta}$ 等于 $\tan^{-1}f/g$, 它相当于沿 OO 线取新的 η 轴 $(O\bar{\eta})$, (见图 9.12). 因此 $\bar{f} = 0$, $\bar{g} = \sqrt{f^2 + g^2}$; 由此得出,一对频率 (f, g) 的光学系统响应函数 $\mathscr{L}$ 的值等于频率 $\sqrt{f^2 + g^2}$ 的一维结构的该函数值,其周期性方向对子午面 $\theta = 0$ 的倾角为 $\tan^{-1}f/g$. 这个结果大大简化了在任一给定情况下响应函数的解析求值. 关于相干物的响应函数 $\mathscr{K}(f, g)$, 类似的结果显然成立,但这个结果较少有直接的实际意义.

现在考虑一个无象差但聚焦不足 (defect of focus[1]) 的共轴系统的频率响应. 由 § 9.1.2 的讨论得出,接收平面在 z 正方向上的小量位移 z, 形式上等效于引入数值为

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z\rho^2 \quad \left(\rho^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} \leqslant 1\right), \tag{26}$$

的波象差, 因此, 如果波的振幅在整个高斯参考球上为常数,则除了一个常数因子外,光瞳函数为

$$G(\xi, \eta) = e^{ik\Phi(\xi,\eta)} = e^{i\frac{1}{2}k\left(\frac{a}{R}\right)^2 z\rho^2}. \tag{27}$$

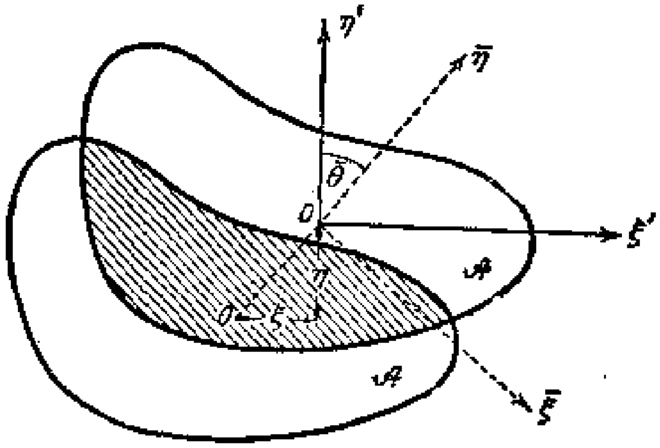


图 9.12 对于一对频率 $f = \xi/\lambda R$, $g = \eta/\lambda R$, 在不相干照明时响应函数 $\mathscr{L}(f, g)$ 求值的积分区域(用阴影线示出)

1) 可参看上册 578 页的焦点公差. ——译者注

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

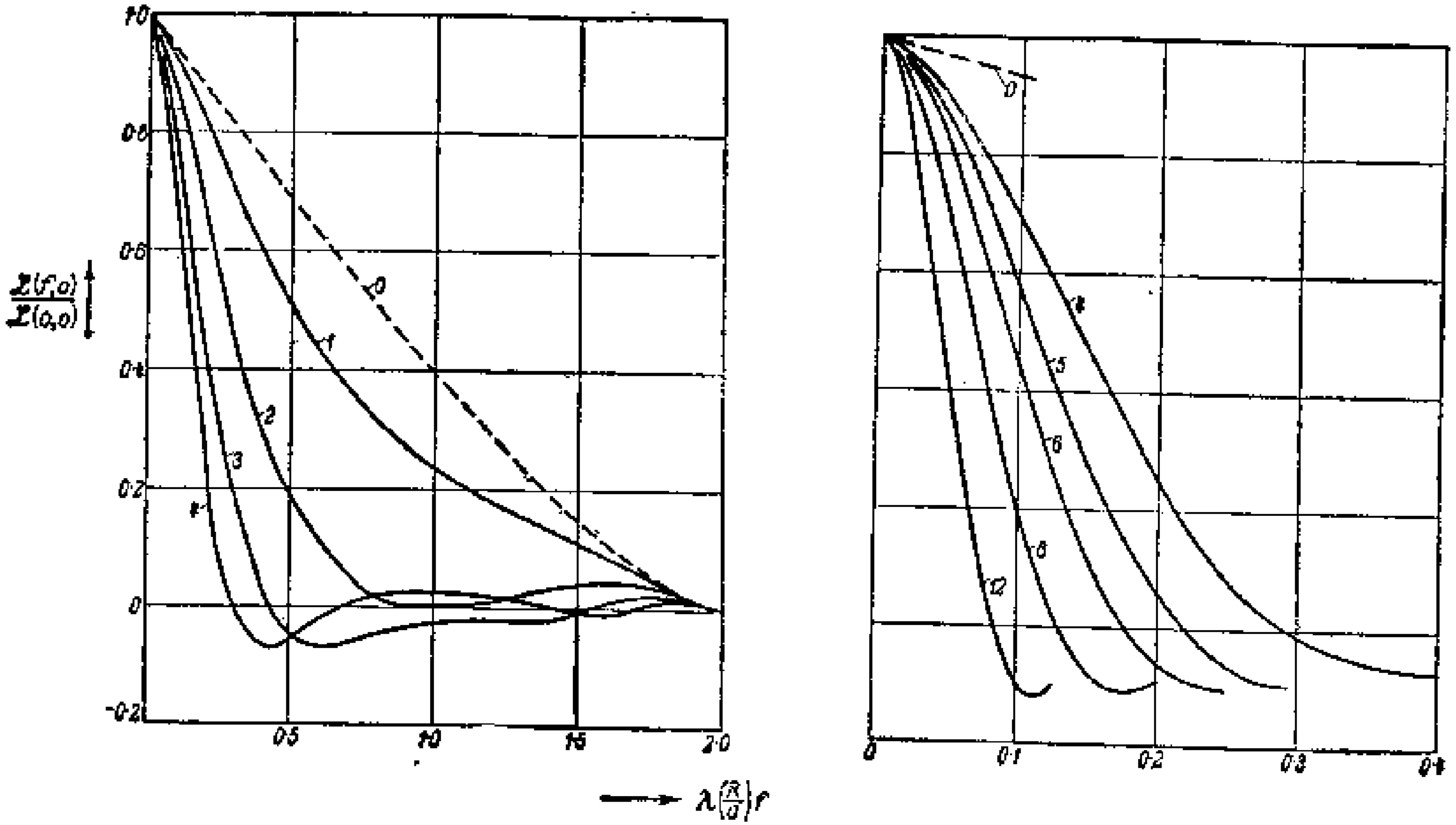


图 9.13 一个无几何象差但是聚焦不足的系统不相干照明时的归一化频率响应曲线. $\Phi=\frac{m\lambda}{\pi}\rho^2$, $|G|=1$. 每一条曲线上的数字是参量 $m=\frac{\pi}{2\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z$ 的值, z 是观察平面与高斯焦平面之间的距离 [引自 H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A, **231** (1955), 98.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

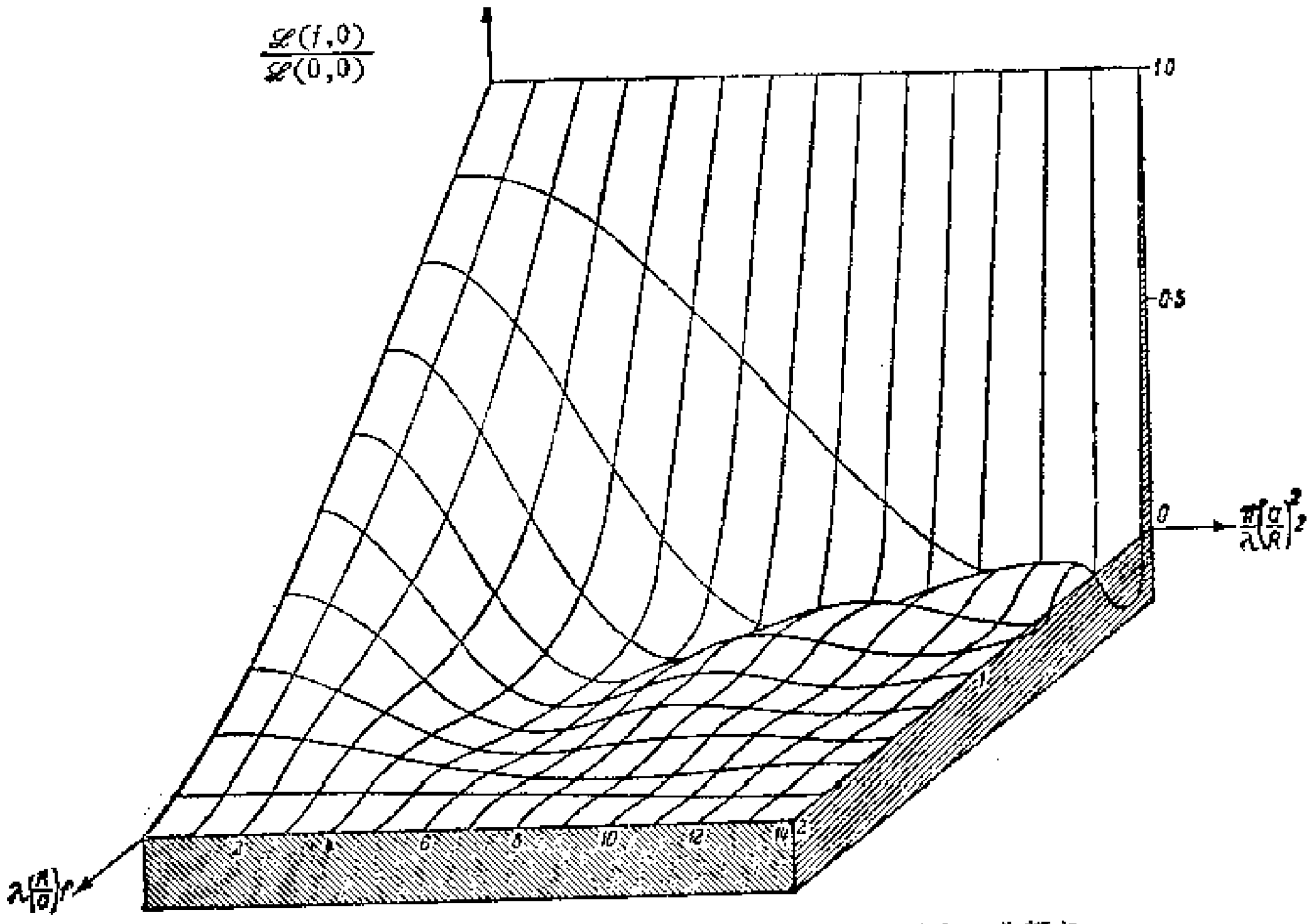
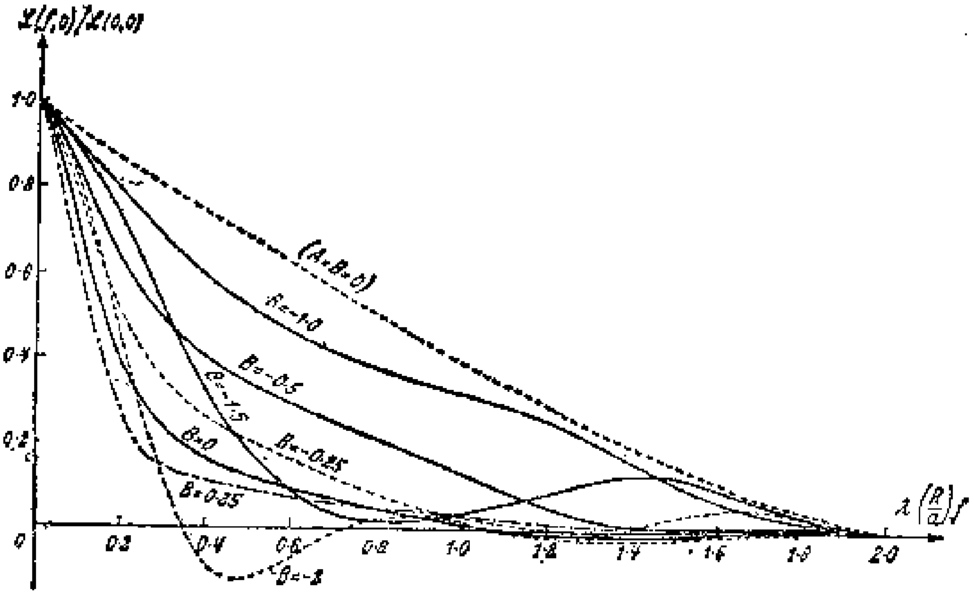
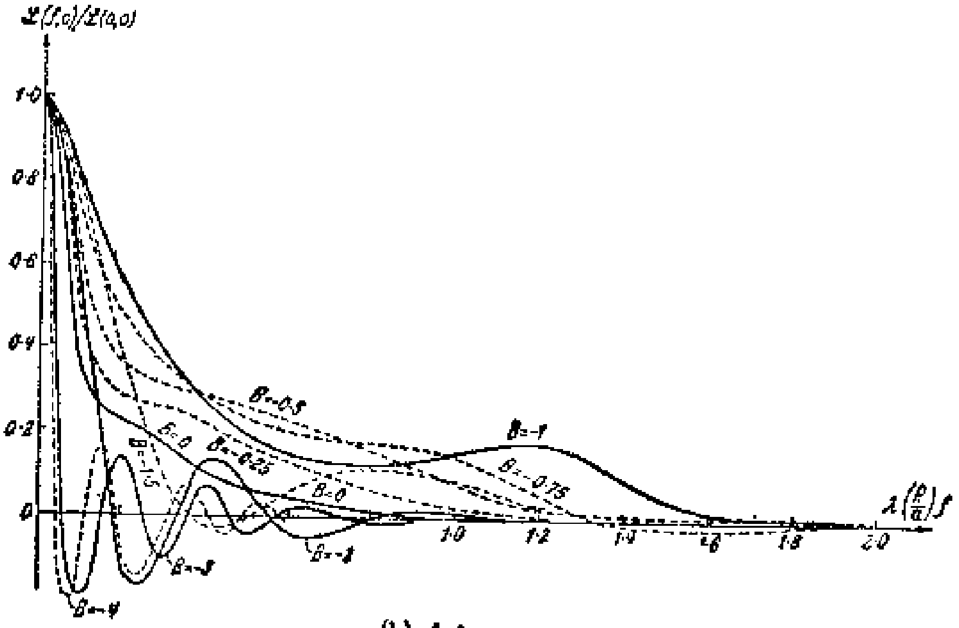


图 9.14　一个无几何象差但是聚焦不足的系统不相干照明时的归一化频率响应曲线，作为空间频率 f 和散焦 z 的函数，$|G|=1$. 图 9.13 所示的曲线是此曲面被垂直于 z 轴的平面所截的交线〔引自 W. H. Steel, *Optica Acta*, **3** (1956), 67.〕

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

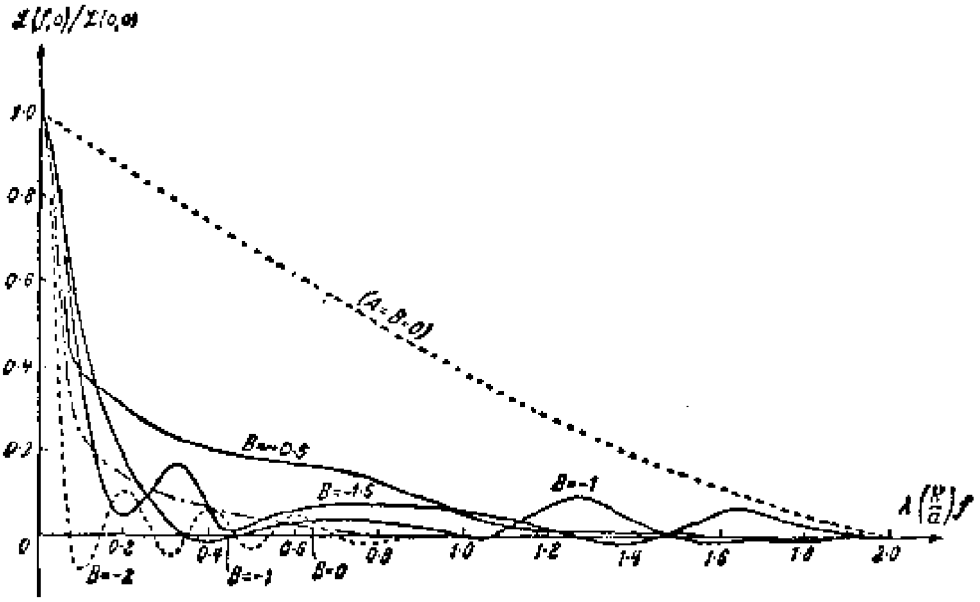


(a): A=1



(b): A=2

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(c): A=4

图 9.15 在一个有小量初级球面象差 $\Phi = A(\rho^4 + B\rho^2)\lambda$ 的系统中选定的聚焦位置处，不相干照明时的归一化频率响应曲线，$|G| = 1$，数值 $B=0$ 相应于近轴焦平面，$B=-2$ 相应于通过边缘焦点的接收平面[引自 G. Black and E. H. Linfoot, *Proc. Roy. Soc.*, A **239** (1957), 522.]

响应函数可由 (23) 和 (27) 式确定，结果如图 9.13 和 9.14 所示. 可以看出，由于引入的小量聚焦不足，超过了相应于 $\Phi = \frac{\lambda}{\pi}\rho^2$ 的值，即超过了 $z = \frac{2\lambda}{\pi}\left(\frac{R}{a}\right)^2$，系统的响应对于较高频率很快变坏.

图 9.15 和 9.16 画出了有初级球面象差和初级象散的系统的响应曲线.

村田 (K. Murata)[1] 曾给出关于测量频率响应函数的仪器概述.

---

1) K. Murata, *Progress in Optics*. Vol. 5, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 199.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

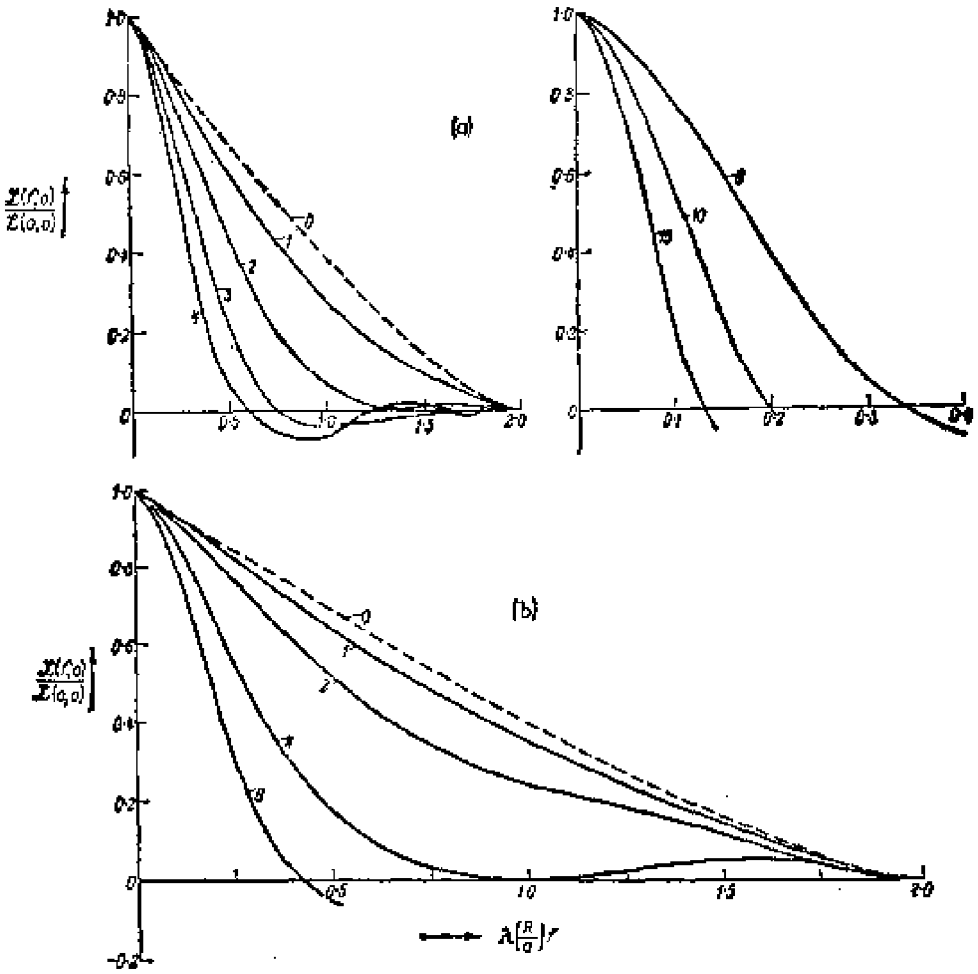


图 9.16 存在初级象散 $\Phi=\dfrac{m\lambda}{\pi}\rho^2\cos^2\theta$ 及 $|G|=1$ 时，在切向焦线与弧矢焦线中央的接收平面，不相干照明时的归一化频率响应曲线．线周期性沿着子午圈 $\theta=\pi/4$ [(a)]，和沿着子午圈 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi/2$ [(b)]．每一条曲线上的数字是 m 的值 [引自M. De, *Proc. Roy. Soc.*, A **233** (1955), 96.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第十章 部分相干光的干涉和衍射

§10.1 引 言

至此，我们主要涉及一个点光源产生的单色光．实际物理光源发出的光决不是严格单色的，因为即使最锐的光谱线也具有一定的宽度．此外，物理光源不是一个点光源，而有一定的广延性，由大量基元辐射体(原子)组成．根据傅里叶定理，这样的一个光源产生的扰动可表示为许多严格单色而因此无限长的波列之和．初等的单色理论本质上只涉及这种傅里叶表示的单个分量．

在单色波场中，任一点 P 处振动的振幅不变，而位相随时间作线性变化．在实际光源所产生的波场中，情况不再是这样：振幅和位相都在不规则地涨落着，其涨落速度基本上取决于光谱的有效宽度 $\Delta\nu$．只当时间间隔 Δt 比有效谱宽 $\Delta\nu$ 的倒数小得多时，复振幅才大体上保持不变；在这样一个时间间隔内，任何两个傅里叶分量的相对位相变化都比 2π 小很多，并且这些分量叠加所代表的扰动在这一时间间隔内的表现就象具有平均频率的单色波一样；然而，对于较长的时间间隔来说，这就不对了．特征时间 $\Delta t = 1/\Delta\nu$ 与 §7.5.8 中引入的相干时间具有相同的数量级．

其次，考虑扩展的准单色光源所产生的波场中两点 P_1 和 P_2 处的光扰动．为了简单起见，假定波场在真空中，并且 P_1 和 P_2 与光源相距许多个波长．可以预料到，当 P_1 和 P_2 彼此足够靠近时，在这两点处振幅的涨落以及位相的涨落都不是独立的．下述的假定是合理的：如果 P_1 和 P_2 相互如此靠近，以致光源上每一点 S 到这两点的程差 $\Delta\mathscr{S} = SP_1 - SP_2$ 比平均波长 $\bar{\lambda}$ 小得多，则在 P_1 和 P_2 处的涨落实际上是相同的；而且，只要对于光源上所有各点，程差 $\Delta\mathscr{S}$ 不超过相干长度 $c\Delta t \sim c/\Delta\nu = \bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

即使 P_1 和 P_2 间距较大，则在这两点的涨落之间仍存在某种相关。因而导致波场中任一点 P 周围的相干区域的概念。

为了适当地描述有限的多色光源所产生的波场，显然需要对场中不同点 P_1 和 P_2 处的振动之间存在的相关引入某种量度。我们必定预料到，这种量度与来自这两点的振动合成得出的干涉条纹的锐度密切有关。当高度地相关时(例如 P_1 和 P_2 处的光来自一个光谱范围很窄的非常小的光源时)，必定预料到有锐条纹，而不存在相关时(例如 P_1 和 P_2 各自接收来自不同的物理光源的光时)，就必定预料到完全没有条纹。我们分别用术语"相干"和"不相干"来描述这两种情况。一般地说，这两种情况都不出现，于是不妨谈及部分相干的振动。

与部分相干性课题密切有关的首批研究成果，看来出自费尔德 (Verdet)[1]，他研究过来自一个扩展的初级光源的光的相干区域的大小。其后迈克耳孙的研究工作确立了干涉条纹可见度和扩展初级光源表面强度分布之间的联系[2] (参看 § 7.3.6)，以及可见度和一条光谱线内能量分布之间的联系[3] (参看 § 7.5.8)。迈克耳孙的结果实际上直到很久以后才用相关来解释，但他的研究曾对部分相干性的近代理论阐述作出了贡献[4]。劳厄[5] 对光振动的相关首次作出定量的量度，并且在他的研究工作中把它用于光束的热力学上。贝莱克 (Berek)[6] 作出进一步的贡献，他用相关的概念来研究显微镜中的成象。

---

1) E. Verdet, *Ann. Scientif. l'École Normale Supérieure*, **2** (1865), 291; *Leçons d'Optique Physique* (Paris, L'Imprimerie Impériale), **I** (1869), 106.

2) A. A. Michelson, *Phil. Mag.*(5), **30** (1890), 1; **31** (1891), 256; *Astrophys. J.* **51** (1920), 257.

3) A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **31** (1891), 338; **34** (1892), 280.

4) 参看 F. Zernike, *Proc. Phys. Soc.*, **61** (1948), 158.

5) M. von Laue, *Ann. d. Physik* (4), **23** (1907), 1, 795.

6) M. Berek, *Z. Phys.*, **36**(1926), 675, 824; **37** (1926), 387; **40** (1926), 420. C. Lakeman 和 J. Th. Groosmuller 描述了有关 Berek 研究工作的实验, *Physica* (Gravenhage), **8** (1928), 193, 199, 305.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

范西特（Van Cittert）[1]文章的发表开始了这个课题发展的新阶段，他确定了在扩展的初级光源照明的屏上任何两点处的光扰动的联合概率分布．在其后的一篇论文中[2]，他又确定了在任一点处而在两个不同时刻的光扰动的概率分布．在他的计算精度内，得出这些分布是高斯型的，而且他确定了适当的相关系数．

泽尼克在1938年发表的一篇重要论文[3]中介绍了探讨部分相干性问题的另一种更简单的方法．泽尼克以直接同实验相联系的方式定义了光振动的"相干度"，并确定了关于这个量的一些有价值的结果．虽然对大多数实际用途来说，泽尼克的相干度与范西特的相关因子等价，也与劳厄对相关的量度密切有关，但看来他的方法特别适合于处理仪器光学的实际问题．霍普金斯（Hopkins）[4]还进一步简化了这种方法，并用来研究成象和分辨本领．

上述研究填补了完全相干与完全不相干这两种极端情况之间的空白，但所得结果仍有一定限制，即主要适用于准单色光以及干涉光束之间的程差充分小的情况．为了处理更复杂的情况，并在严格的基础上系统阐述这种理论，还需要作进一步的推广．这一步已由沃耳夫[5]以及由布朗·拉皮埃尔（Blanc-Lapierre）和迪蒙

---

1) P. H. van Cittert, *Physica*, **1** (1934), 201.

2) P. H. van Cittert, *Physica*, **6** (1939), 1129; 又见 L. Jánossy, *Nuovo Cimento*, **6** (1957), 111; 同上, **12** (1959), 369.

3) F. Zernike, *Physica*, **5** (1938), 785.

4) H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc. A*, **208** (1951), 263; 同上 A, **217** (1953), 408.

D. Gabor 和 H. Gamo 的有关研究工作从信息论的观点研究光学传递时利用了部分相干性概念 [D. Gabor, *Proc. Symb. Astr. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956), 17; *Proc. Third Symposium on Information Theory*, ed. C. Cherry (London, Butterworths Scientific Publications, 1956), 26; *H. Gamo, J. Appl. Phys. Japan*, **25** (1956), 431; *Progress in Optics*, Vol. **3**, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1964), 187].

5) E. Wolf, *Proc. Roy. Soc. A*, **230** (1955), 246. 又见，同上，*A*, **225** (1954), 96; *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

泰（Dumontet）[1] 独立地完成了，其中涉及到引入一些更一般的相关函数。已发现这些相关函数严格遵从两个波动方程；其结果意味着，不仅光的扰动，而且扰动之间的相关，都以波的形式传播。借助于这个结果，以前建立的许多定理都得到了较简单的解释。

迄今所述的相关函数都表征在两个空时点处的光振动之间的相关。这种"二阶"相关函数完全适合于分析那些涉及从稳恒光源[2] 发出的光的干涉和衍射的普通光学实验。对于更复杂实验的分析，可能需要更高阶相关函数，即所含各个场变量的总幂高于二次的那些相关函数。然而，至今这样的相关函数还不曾应用到值得重视的程度[3]。

---

1) A. Blanc-Lapierre and Dumontet, *Rev. d'Optique*, **34** (1955), 1.

2) 更确切地说，是从产生一个平稳场的光源发出，平稳场的含义按后面657页给出的定义。对于非平稳场的分析，可利用类似的相关函数，但它们必须用系综平均而不是用时间平均来定义（对于平稳场，这两类平均通常给出同一结果）。但因非平稳场的分析需要的数学工具复杂得多，且因至今不曾作出关于非平稳光相干效应的实验，所以我们只限于讨论平稳场。

3) 当光来自一个热光源（如白炽物质或气体放电管）时，可假定在 n 个空时点处场的联合概率分布十分近似于高斯型。众所周知（例如，见 J. J. Freeman, *Principles of Noise*, New York; J. Wiley & Sons, Inc., 1958, 245—247）。这种分布由二阶相关函数完全确定，它本身又意味着与热光源的光相联系的所有高阶相关函数都可以用二阶相关函数来表示。然而对于来自非热光源的光，例如激光，就不是这样了。

E. Wolf 在 *Quantum Electronics, 3rd Congress*, Vol. 1, ed. N. Bloembergen and P. Grivet (New York, Columbia University Press; Paris, Dunod, 1964), p. 13, 和 L. Mandel, 同上, p. 101, 已扼要讨论过某些高阶相干效应和适当的相关函数。又见 E. Wolf, *Proc. Symp. on Optical Masers* (New York, Brooklyn Polytechnic Press and J. Wiley & Sons, Inc., 1963), p. 29, 其中概述了相干效应的分类。

R. J. Glauber 在 *Quantum Electronics, 3rd Congress*, Vol. 1, ed. N. Blombergen and Grivet (New York, Columbia University Press; Paris, Dunod, 1964), p. 111 和 *Phys. Rev.* **130** (1963), 2529, 引入了类似的量子力学相关函数。E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963), 277, 以及 J. R. Klauder 和 E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics* (New York, W. A. Benjamin, Inc., 1968), 讨论了经典处理和量子处理之间的关系。又见 L. Mandel 和 E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.*, **37** (1965), 231; 这篇论文也包括了对二阶和高阶相干效应的评述。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

部分相干性理论引人注目的特点是它使用一些原则上可由实验测定的量(即相关函数和时间平均强度)来运算. 这与初等光波理论大不相同,在初等光波理论中,因光的振动非常迅速,其基本量是不可测量的. 本章中,将研究部分相干波场的特性,并用几个有实际意义的例子来说明其结果. 我们将仅涉及光的情况, 但我们的分析与其他领域也密切有关;特别是,在相关技术用于测量射电星[1]及用于射电波探察电离层[2]方面,类似的考虑也适用.

关于部分相干性所使用的数学技巧, 也很适合于分析部分偏振. 这里所涉及的现象可用电磁场矢量的正交分量之间的相关来解释. 在这方面, 早期的研究出自斯托克斯[3]. 使用相关函数和相关矩阵概念的近代论述, 主要出自维纳 (Wiener)[4], 皮兰 (Perrin)[5], 沃耳夫[6]和潘查拉特南 (Pancharatnam)[7]. 这个课题将在本章最后一节(§ 10.8)讨论.

§ 10.2 实多色场的复数表示

在讨论单色波场时,已经发现,把每一个实波函数看作是相缔合的复波函数的实部是有好处的. 本章中, 将涉及多色(即非单

---

1) 参看 R. N. Bracewell, *Radio Astronomy Techniques in Encyclopedia of Physics*, ed.S. Flügge (Berlin, Springer), **54** (1959), Chapter *V*.
2) 参看 J. A. Ratcliffe, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 188.
3) G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **9** (1852), 399; 重载于他的 *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III (Cambridge University Press, 1901), 233; 又见 P. Soleillet, *Ann. de Physique* (10), **12** (1929), 23.
4) N. Wiener, *J. Math. and Phys.*, **7** (1928), 109; *J. Franklin Inst.*, **207** (1929), 525; *Acta Math.* **55** (1930), § 9.
5) F. Perrin, *J. Chem. Phys.*, **10** (1942), 415.
6) E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884; *Proc. Symp. Astr. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956), 177; *Nuovo Cimento*, **13** (1959), 1165.
7) S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **44** (1956), 398; 同上, **57** (1963), 218, 231.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

色)场，采用复数表示也是有好处的，它可看作是单色场所用的复数表示的自然推广.

设 $V^{(r)}(t)(-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ 代表在空间一固定点处的一个实扰动，例如电矢量的一个笛卡儿分量，并假定 $V^{(r)}(t)$ 是平方可积的. 它可表示为傅里叶积分的形式:

$$V^{(r)}(t) = \int_0^\infty a(\nu)\cos[\phi(\nu) - 2\pi\nu t]d\nu. \qquad (1)$$

与 $V^{(r)}$ 相缔合的复函数为

$$V(t) = \int_0^\infty a(\nu)e^{i[\phi(\nu)-2\pi\nu t]}d\nu. \qquad (2)$$

因此，

$$V(t) = V^{(r)}(t) + iV^{(i)}(t), \qquad (3)$$

式中

$$V^{(i)}(t) = \int_0^\infty a(\nu)\sin[\phi(\nu) - 2\pi\nu t]d\nu. \qquad (4)$$

函数 $V^{(i)}(t)$ 和 $V(t)$ 由 $V^{(r)}(t)$ 唯一确定，从 $V^{(r)}$ 中把每个傅里叶分量的位相 $\phi(\nu)$ 替换为 $\phi(\nu) - \pi/2$，就得到 $V^{(i)}$. 积分 (1) 和 (4) 称为同源的傅里叶积分 (allied Fourier integrals)，或相缔合的函数(又称共轭函数)，可以证明[1]，它们相互为希耳伯特变换，即

$$V^{(i)}(t) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(t')}{t'-t}dt',$$

$$V^{(r)}(t) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(t')}{t'-t}dt', \qquad (5)$$

式中 P 表示在 $t'=t$ 处的柯西主值.

这种复数表示常用于通讯理论，其中 V 称为属于 $V^{(r)}$ 的解析

---

1) 例如，见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1948), Chapter 5.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

信号[1]. 这个名称的来历是,只要 $V^{(r)}$ 满足某些一般的正则条件,则作为复变量 z 的函数 $V(z)$ 在下半 z 平面内是解析的[2].

为了今后使用,我们特别提到当 $V^{(r)}$ 表示为下述形式的傅里叶积分

$$V^{(r)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} v(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu \tag{6}$$

时从 $V^{(r)}$ 到 V 的变换. 因为 $V^{(r)}$ 是实的,所以

$$v(-\nu)=v^*(\nu). \tag{7}$$

利用 (7) 式,可将 (6) 式改写成 (1) 式的形式,并作比较,得出

$$v(\nu)=\frac{1}{2}a(\nu)e^{i\phi(\nu)},\quad \nu\geqslant 0. \tag{8}$$

利用 v, (2)式变为

$$V(t)=2\int_{0}^{\infty} v(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu. \tag{9}$$

因此,把 $V^{(r)}$ 表示为 (6) 式的积分,去掉属于负频率的振幅,并把正频率的振幅乘以 2,就可以由 $V^{(r)}(t)$ 导出 $V(t)$. 因此之故,V 也称为与 $V^{(r)}$ 相缔合的复半域函数 (the complex half-range function). 反之,很明显,如果复函数 V 的傅里叶谱不包含属于负频率的振幅,则 V 的实部和虚部是相缔合的函数. 注意下列关系式,它们由 (6), (7) 和 (9) 式并利用帕塞瓦 (Parseval) 定理及 (3) 式得出:

---

1) 解析信号的概念是 D. Gabor 引入的,见 *J. Inst, Electr. Engrs.*, **93** (1946), Pt. III, 429. 又见 V. I. Bunimovich, *J. Tech. Phys. U. S. S. R.*, **19** (1949), 1231; J. Ville, *Câbles et Transmission*, **2** (1948), 61; 同上, **4** (1950), 9; J. R. Oswald, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, **CT-3** (1956), 244.

一个实变量的复函数,其实部和虚部由希耳伯特变换关系相联系,在物理学和工程学的许多分支中起着重要的作用. 在物理学中,希耳伯特变换关系常被称为色散关系,因它首先出现于光被原子色散的理论中 [H. A. Kramers, *Atti Congr. Internaz. Fisici, Como* (Sept. 1927), (*V*). Bologna, N. Zanichelli, 1928; 又见 J. S. Toll, *Phys. Rev.*, **104** (1956), 1760; J. Hilgevoord, *Dispersion Relations and Causal Description* (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1960)].

2) 参看 E. C. Titchmarsh, 上述引著, p. 128.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)^2}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} V^{(i)^2}(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} V(t)V^*(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |v(\nu)|^2 d\nu = 2\int_0^{\infty} |v(\nu)|^2 d\nu. \qquad (10)$$

在我们将涉及的大多数应用中，谱振幅只在比平均频率 $\bar{\nu}$ 小很多的频宽间隔 $\Delta\nu$ 内才有可观的值。因此，解析信号有一种简单的解释。我们把 V 表示为下述形式：

$$V(t) = A(t)e^{i[\Phi(t)-2\pi\bar{\nu}t]}, \qquad (11)$$

式中 $A(\geqslant 0)$ 和 Φ 都是实的。根据 (9) 和 (11) 式，

$$A(t)e^{i\Phi(t)} = 2\int_0^{\infty} v(\nu)e^{-2\pi i(\nu-\bar{\nu})t}d\nu$$

$$= \int_{-\bar{\nu}}^{\infty} g(\mu)e^{-2\pi i\mu t}d\mu, \qquad (12)$$

式中

$$g(\mu) = 2v(\bar{\nu}+\mu). \qquad (13)$$

现因已假定谱振幅只在 $\nu=\bar{\nu}$ 附近才明显不为零，所以 $|g(\mu)|$ 只在 $\mu=0$ 附近才是可观的。因此，(12) 式的积分表示低频谱分量的叠加；又因 $\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$，所以 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 比 $\cos 2\pi\bar{\nu}t$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}t$ 变化缓慢[1]。由于 $V^{(r)}$ 和 $V^{(i)}$ 是 V 的实部和虚部，用 A 和 Φ 表示，则有

$$\left.\begin{aligned} V^{(r)}(t) &= A(t)\cos[\Phi(t)-2\pi\bar{\nu}t], \\ V^{(i)}(t) &= A(t)\sin[\Phi(t)-2\pi\bar{\nu}t]. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

这些公式把 $V^{(r)}$ 和 $V^{(i)}$ 表示为载频 $\bar{\nu}$ 的调制信号的形式，并且我们看到，复解析信号与实信号的包络[2]密切有关。利用解析信号 V，包络 $A(t)$ 及其伴随的位相因子 $\Phi(t)$ 由下式给出：

---

1) 根据 (14) 式，在这种情况下显然有

$$V^{(i)}(t) \sim V^{(r)}\left(t+\frac{1}{4\bar{\nu}}\right).$$

2) L. Mandel 研究过解析信号的包络性质，见 *J. Opt. Soc. Amer.*, 57 (1967), 613.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
A(t) &= \sqrt{V^{(r)^2} + V^{(i)^2}} = \sqrt{VV^*} = |V|, \\
\Phi(t) &= 2\pi\bar{\nu}t + \tan^{-1}\frac{V^{(i)}}{V^{(r)}} \\
&= 2\pi\bar{\nu}t + \tan^{-1}\left(i\frac{V^* - V}{V^* + V}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{15}
$$

可以看出，$A(t)$ 与 $\bar{\nu}$ 的精确选择无关，而 $\Phi(t)$ 只通过附加项 $2\pi\bar{\nu}t$ 依赖于 $\bar{\nu}$。显然，我们可在 (14) 式中选定任一其他频率 $\bar{\nu}'$ 代替 $\bar{\nu}$ 而不影响 A 的值；新的位相因子的表达式与 (15) 式不同之处仅在于用 $\bar{\nu}'$ 代替 $\bar{\nu}$。

推导 (14) 和 (15) 式时，不曾用到所讨论的是窄带信号 ($\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$) 这一事实，因此这些关系式相当普遍地成立。然而，只有在 $\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$ 时，包络的概念才是有用的。

我们已假定"扰动" $V^{(r)}(t)$ 对所有的 t 值都有定义。实际上，扰动仅存在于有限的时间间隔 $-T \leqslant t \leqslant T$ 内，但这个间隔与物理上有意义的时间标度（平均周期 $1/\bar{\nu}$ 和相干时间 $1/\Delta\nu$）相比，通常是如此之大，以致可假定 $T \to \infty$ 而将情况理想化。根据与场的平稳性假设有关的理由(参看 § 10.3.1)，这种理想化在数学上是合乎需要的。显然还必须假定，随着求平均的时间间隔无限增大，强度（它正比于 $V^{(r)^2}$）的时间平均趋于一有限值，即假定

$$
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} V^{(r)^2}(t)\,dt \tag{16}
$$

是有限的。现在，如果这个极限是有限的，并且不为零，则显然 $\int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)^2}(t)\,dt$ 发散。然而，有可能利用傅里叶分析的方法[1]。定义截断函数 (truncated function)

1) 二十世纪初，有些参与白光和噪声性质研究的物理学家（著名的是 L. G. Gouy，瑞利，和 A. Schuster），遇到了解析时间函数当 t 趋于无穷大而不消失的问题。严格的数学方法主要是由 N. Wiener 在其广义调和分析的论文 [*Acta Math.*, **55** (1930), 117] 中发展起来的。这篇论文还概述了这个问题的历史，并列入了很完整的文献目录。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned} V_T^{(r)}(t) &= V^{(r)}(t), \quad \text{当 } |t| \leqslant T \text{ 时}, \\ &= 0, \quad\quad\quad\ \text{当 } |t| > T \text{ 时}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

因为可以假定每一个这样的截断函数都是平方可积的，所以可把它表示为傅里叶积分，如

$$V_T^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_T(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu. \tag{18a}$$

设 $V_T^{(i)}$ 是相缔合的函数，V_T 是相应的解析信号，即

$$V_T(t) = V_T^{(r)}(t) + iV_T^{(i)}(t) = 2\int_0^{\infty} v_T(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu. \tag{18b}$$

于是，用 $V_T^{(r)}$ 代替 $V^{(r)}$，依此类推，则 (10) 式仍成立. 因此，如果也用 $2T$ 除(10)式中每个表达式，就得出[1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)^2}(t)\,dt &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(i)^2}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} V_T(t)V_T^*(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_T(\nu)d\nu = 2\int_0^{\infty} G_T(\nu)d\nu, \end{aligned} \tag{19}$$

式中

$$G_T(\nu) = \frac{|v_T(\nu)|^2}{2T}. \tag{20}$$

现在求 $T \to \infty$ 时的极限看来是自然的. 不幸，在许多有实际意义的情况下，通常称为周期图 (periodogram) 的函数 $G_T(\nu)$ 随着 T 的增加并不趋于极限而是不断地涨落[2]. 然而，通过适当的“修匀过程” (Smoothing procedure) 就可以克服这个困难. 例如，在随机过程的理论中，通常把函数 $V^{(r)}(t)$ 看作表征过程统计性质的函数系综中的一个典型成员. 而且通常光学遇到的系综是平稳和

---

1) 因截断函数的希耳伯特变换不一定是截断函数，所以 $V_T^{(i)}$ 和 V_T 在 $-T \leqslant t \leqslant T$ 的区域以外一般不为零. 由于上述原因，还为了避免某些数学加工，所以在 (19) 和 (23) 式中对时间积分的上下限取 $\pm\infty$，而不取 $\pm T$.

2) 例如，见 W. B. Davenport and W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise* (New York, Mc Graw-Hill, 1958), p. 107—108. 又见 D. Middleton, *IRE Trans.*, CT-3 (1956), 299.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

各态历经的．平稳性意味着所有的系综平均都与时间原点无关，而各态历经性意味着每一系综平均等于包含该系综一典型成员的相应的时间平均．今后假定所讨论的是平稳和各态历经的系综[1]．于是可以证明，当 $T\to\infty$ 时，$G_T(\nu)$ 对函数 $V^{(r)}(t)$ 的系综所取的平均趋于确定的极限． 因此，如果用横线表示系综平均，则"光滑周期图"(Smoothed periodogram)

$$\overline{G_T(\nu)}=\frac{\overline{|v_T(\nu)|^2}}{2T}\tag{21}$$

有一极限[2]

$$G(\nu)=\lim_{T\to\infty}\overline{G_T(\nu)}=\lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|v_T(\nu)|^2}}{2T}.\tag{22}$$

现在，如果用尖括号表示时间平均，

$$\langle F(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}F_T(t)\,dt,\tag{23}$$

则在 $T\to\infty$ 时的极限下，得到类似于(19)式的下述关系式：

$$\langle V^{(r)2}(t)\rangle=\langle V^{(i)2}(t)\rangle=\frac{1}{2}\langle V(t)V^*(t)\rangle$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}G(\nu)d\nu=2\int_0^{\infty}G(\nu)d\nu.\tag{24}$$

---

1) 对这些概念更充分的讨论，例如，见 W. B. Davenport and W. L. Root，上述引著；S. Goldman, *Information Theory* (New York, Prentice-Hall, Inc. 1953); D. Middleton, *An Introduction to Statistical Communication Theory* (New York, McGraw-Hill Co., 1960); A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* (Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1962).

2) 严格证明这一极限的存在和本节中启发性地引入的某些关系式，会使我们过分深入到各态历经理论中，因此这里不能给出． 参看 J. L. Doob, *Stochastic Processes* (New York, J. Wiley & Sons, Inc., 1953), Chapt. XI；又见 S. Goldman，上述引著，§8.4；A. M. Yaglom，上述引著，43—51；或 D. Middleton，上述引著，§3.2.

代替作系综平均，也可作其他的修匀运算［参看 S. Goldman，上述引著 p. 244；或 M. S. Bartlett, *An Introduction to Stochastic Processes* (Cambridge, University Press, 1955), p. 280—284]．

665 页注 2 指出定义功率谱 $G(\nu)$ 的另一种方法，它不依赖于系综概念．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在平稳随机过程的理论中，(22) 式所定义的函数 $G(\nu)$ 称为用函数 $V^{(r)}(t)$ 的系综表征的随机过程的功率谱. 在我们的讨论中，$V^{(r)}(t)$ 代表光扰动，$G(\nu)d\nu$ 正比于来自频率范围 $(\nu, \nu+d\nu)$ 对强度的贡献；我们将把 $G(\nu)$ 称作光振动的谱密度.

因 $V_T^{(r)}$ 是 V_T 的实部，由此得出，如果对 $V_T^{(r)}$ 的运算是线性的，就可以直接用 V_T 来运算，并在计算到最后时取其实部. 而且，正如单色光情况一样，根据关系式 $\langle V^{(r)2}\rangle = \frac{1}{2}\langle VV^*\rangle$，就能用相缔合的复扰动直接计算实扰动平方的时间平均.

§10.3　光束的相关函数

§10.3.1　两个部分相干光束的干涉. 互相干函数和复相干度

§10.1 中曾经指出，为了满意地处理涉及从一有限光源发出并具有有限光谱范围的光的问题，必须确定波场中任意两点处的振动之间可能存在的相关. 通过分析双光束干涉实验，提出了对这种相关的一种适当的量度.

考虑由一个扩展多色光源 σ 产生的波场. 暂时忽略偏振效应，因此可把光扰动看作是位置和时间的实标量函数 $V^{(r)}(P, t)$，与 $V^{(r)}(P, t)$ 相缔合的解析信号为 $V(P, t)$. 通过观察来确定这些量如何随时间变化，当然是不可能的，因为任何一种探测器都只是记录在一个时间间隔内的平均，在此时间间隔内，扰动就已改变符号非常多次了. 可观察的强度 $I(P)$ 与 $V^{(r)2}(P, t)$ 的平均值成正比，因此，除了一个无关紧要的常数以外，

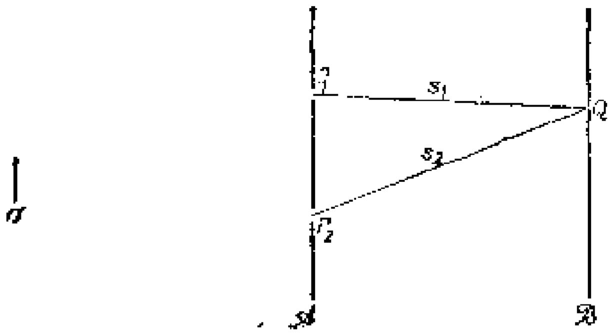


图 10.1　来自扩展光源 σ 的多色光的干涉实验

$$I(P) = 2\langle V^{(r)2}(P, t)\rangle = \langle V(P, t)V^*(P, t)\rangle, \qquad (1)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中已用了 § 10.2(24) 式.

现在考虑波场中的两点 P_1 和 P_2. 除了测量强度 $I(P_1)$ 和 $I(P_2)$ 以外，还可以从实验上测定来自这两点的振动叠加所引起的干涉效应. 为此，设想有一个不透明的屏 $\mathscr{A}$ 横放在场中，屏上 P_1 和 P_2 处有一对针孔，考虑放在与光源相反的另一侧并且离 $\mathscr{A}$ 相当远的第二个屏 $\mathscr{B}$ 上的强度分布(图 10.1). 为了简单起见，假定两个屏之间的媒质折射率为 1. 设 s_1 和 s_2 是从 P_1 和 P_2 到屏 $\mathscr{B}$ 上某一代表点 Q 的距离. 我们可以把 P_1 和 P_2 看作次级扰动的中心，因此 Q 处的复扰动由下式给出：

$$V(Q, t) = K_1V(P_1, t - t_1) + K_2V(P_2, t - t_2). \tag{2}$$

式中 t_1 和 t_2 分别是光从 P_1 传播到 Q 和从 P_2 传播到 Q 所需的时间，即

$$t_1 = \frac{s_1}{c}, \qquad t_2 = \frac{s_2}{c}, \tag{3}$$

式中 c 是光在真空中的速度. 因子 K_1 和 K_2 与 s_1 和 s_2 成反比，还取决于开孔的大小和实验的几何布局 (P_1 和 P_2 处的入射角和衍射角). 因为从 P_1 和 P_2 发出的次级子波位相与初级波相差 1/4 周期(参看 § 8.2, § 8.3)，所以 K_1 和 K_2 都是纯虚数.

由 (1) 和 (2) 式得出，Q 处的强度为[1]

$$\begin{aligned} I(Q) = & K_1K_1^*\langle V_1(t - t_1)V_1^*(t - t_1)\rangle \\ & + K_2K_2^*\langle V_2(t - t_2)V_2^*(t - t_2)\rangle \\ & + K_1K_2^*\langle V_1(t - t_1)V_2^*(t - t_2)\rangle \\ & + K_2K_1^*\langle V_2(t - t_2)V_1^*(t - t_1)\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

现在假定场是平稳的，我们可以在所有这些式子中移动时间原点，因此得出

$$\langle V_1(t - t_1)V_1^*(t - t_1)\rangle = \langle V_1(t)V_1^*(t)\rangle = I_1, \tag{5}$$

其他各项也有类似的关系. 如果又利用 (3) 式，并且记住 K_1 和 K_2 是纯虚数，则 (4) 式可简化为

1) 今后在方便的场合均使用缩写记号，用 $V_1(t)$ 代替 $V(P_1, t)$，$\Gamma_{12}(\tau)$ 代替 $\Gamma(P_1, P_2, \tau)$，等等.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$I(Q) = |K_1|^2 I_1 + |K_2|^2 I_2 + 2|K_1K_2|\Gamma_{12}^{(r)}\left(\frac{s_2 - s_1}{c}\right), \quad (6)$$

式中 $\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)$ 是函数

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V_1(t+\tau)V_2^*(t)\rangle \quad (7)$$

的实部. (7) 式所表示的这个量在部分相干性理论中是基本的. 我们称之为 P_1 和 P_2 处光振动的互相干性，这里所考虑的 P_1 处的振动比 P_2 处落后了时间 τ; $\Gamma_{12}(\tau)$ 称为波场的互相干函数[1]. 当两点重合时 ($P_1 = P_2$), 得出

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle V_1(t+\tau)V_1^*(t)\rangle, \quad (8)$$

于是就谈到了 P_1 处光振动的自相干性；当 $\tau = 0$ 时，它化为普通强度：

$$\Gamma_{11}(0) = I_1, \quad \Gamma_{22}(0) = I_2.$$

(6) 式中 $|K_1|^2 I_1$ 项显然就是当 P_1 处的针孔单独打开时 ($K_2 = 0$) 在 Q 处观察到的强度，$|K_2|^2 I_2$ 项也有类似的解释. 用 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 分别表示这两个强度，即

$$I^{(1)}(Q) = |K_1|^2 I_1 = |K_1|^2 \Gamma_{11}(0),$$
$$I^{(2)}(Q) = |K_2|^2 I_2 = |K_2|^2 \Gamma_{22}(0). \quad (9)$$

又将 $\Gamma_{12}(\tau)$ 归一化：

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}. \quad (10)$$

根据即将得知的理由，$\gamma_{12}(\tau)$ 将称为光振动的复相干度. 借助于 (9) 和 (10) 式，(6) 式最后可写成下述形式：

$$I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)} \times \gamma_{12}^{(r)}\left(\frac{s_2 - s_1}{c}\right), \quad (11)$$

式中 $\gamma_{12}^{(r)}$ 表示 γ_{12} 的实部.

---

1) 在平稳随机过程的一般理论中，$\Gamma_{12}(\tau)$ 称为 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的交叉相关函数 (cross-correlation function, 又译互相关函数)，而$\Gamma_{11}(\tau)$ 称为 $V_1(t)$ 的自相关函数.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

公式(11)是平稳光场的一般干涉定律．它表明，为了确定两束光叠加所引起的强度，就必须知道每束光的强度和复相干度实部 $\gamma_{12}^{(r)}$ 的值．以后将说明如何从表征光源和媒质透射特性的数据计算 $\gamma_{12}^{(r)}$．

如果从 P_1 和 P_2 发出的光不直接到达 Q 处，而是经过一个插入的光学系统；并且，如果色散效应可忽略，则只要用程差 $P_2Q - P_1Q$ 代替 $s_2 - s_1$，(11)式仍保持有效．采用这种推广，当由一初级光束得出两个干涉光束的方法不是在 P_1 和 P_2 处作"波阵面分割"，而是在单独一点 P_1 紧邻处作"振幅分割"时，例如在迈克耳孙干涉仪中，公式(11)也成立．在后一种情况下，(11)式中要用 $\gamma_{11}^{(r)}(\tau)$ 代替 $\gamma_{12}^{(r)}(\tau)$．

与扰动 $V^{(r)}$ 不同，相关函数 $\gamma_{12}^{(r)}$ 和 $\Gamma_{12}^{(r)}$ 代表可用实验确定的量．为了对给定的任一对点 P_1 和 P_2 以及给定的任一个 τ 值求出 $\gamma_{12}^{(r)}$ 的值，放一个不透明的屏横过光束，屏上 P_1 和 P_2 处有一对针孔，如图 10.1 所示．然后在屏的后方一点 Q 处（使 $P_2Q - P_1Q = c\tau$）测量强度 $I(Q)$．再分别测量来自每一个针孔的光强度 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$．利用这三个观测值，根据(11)式，$\gamma_{12}^{(r)}$ 为

$$\gamma_{12}^{(r)} = \frac{I(Q) - I^{(1)}(Q) - I^{(2)}(Q)}{2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}}. \tag{12}$$

为了确定 $\Gamma_{12}^{(r)}$，还必须测量每一针孔处的强度 $I(P_1)$ 和 $I(P_2)$．根据(10)和(12)式，$\Gamma_{12}^{(r)}$ 为

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^{(r)} &= \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\,\gamma_{12}^{(r)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I(P_1)I(P_2)}{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)}}\,[I(Q) - I^{(1)}(Q) - I^{(2)}(Q)].\end{aligned} \tag{13}$$

回到(10)式，不难看出我们所采用的归一化保证了 $|\gamma_{12}(\tau)| \leqslant 1$．为了证明这一点，如§10.2(17)式，引入截断函数

$$V_T^{(r)}(P, t) = \begin{cases} V^{(r)}(P, t), & \text{当 } |t| \leqslant T \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } |t| > T \text{ 时}. \end{cases} \tag{14}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

并用 $V_T(P,t)$ 表示相缔合的解析信号. 由薛华兹不等式[1]

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t+\tau)V_T^*(P_2, t)dt\right|^2$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t+\tau)V_T^*(P_1, t+\tau)dt$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_2, t)V_T^*(P_2, t)dt. \tag{15}$$

在右方第一个积分中,可用 t 代替 $t+\tau$. 然后两边都除以 $4T^2$,取 $T\to\infty$ 时的极限,由此得出,

$$|\Gamma_{12}(\tau)|^2 \leqslant \Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0), \tag{16}$$

或者,由 (10) 式得出,

$$|\gamma_{12}(\tau)| \leqslant 1. \tag{17}$$

将(11)式表示为稍有不同的形式,最能看出 γ_{12} 的意义. 设 $\bar{\nu}$ 是光的平均频率,并写出

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|e^{i[\alpha_{12}(\tau)-2\pi\bar{\nu}\tau]}, \tag{18}$$

式中

$$\alpha_{12}(\tau) = 2\pi\bar{\nu}\tau + \arg\gamma_{12}(\tau). \tag{19}$$

于是,(11) 式变为

$$I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}$$
$$\times |\gamma_{12}(\tau)|\cos[\alpha_{12}(\tau) - \delta], \tag{20}$$

式中参量 τ 和位相差 δ 的值为

$$\tau = \frac{s_2 - s_1}{c}, \qquad \delta = 2\pi\bar{\nu}\tau = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(s_2 - s_1), \tag{21}$$

$\bar{\lambda}$ 是平均波长. 如果 $|\gamma_{12}(\tau)|$ 为极值 1, 则 Q 处的强度与波长为 $\bar{\lambda}$ 的严格单色光在 P_1 和 P_2 处振动之间的位相差为 $\alpha_{12}(\tau)$ 时在 Q 处所得出的强度相同. 在这种情况下, P_1 和 P_2 处的振动(它们之间有适当的时间延迟 τ)可称为相干的[2]. 如果 $\gamma_{12}(\tau)$ 为另

1) 例如,见 H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry* (New York, D. van Nostrand Co., 1947), p. 131.

2) L. Mandel 和 E. Wolf 已研究过相干光的一般性质,见 *J. Opt. Soc. Amer.*, **51** (1961), 815.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一极值零，则(20)式中最后一项不存在；两个光束不产生任何干涉效应，因此 P_1 和 P_2 处的振动可称为不相干的。如果 $|\gamma_{12}(\tau)|$ 不是这两个极值，即 $0<|\gamma_{12}(\tau)|<1$，则 P_1 和 P_2 处的振动称为部分相干的，$|\gamma_{12}(\tau)|$ 表示它们的相干度[1]。

不管 $|\gamma_{12}|$ 的值如何，强度 $I(Q)$ 也可表示为下述形式。

$$I(Q)=|\gamma_{12}(\tau)|\Big\{I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)+2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\cos[\alpha_{12}(\tau)-\delta]\Big\}+\Big\{1-|\gamma_{12}(\tau)|\Big\}\Big\{I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)\Big\}. \quad (22)$$

第一、二行的项可看作是由两束强度为 $|\gamma_{12}(\tau)|I^{(1)}(Q)$ 和 $|\gamma_{12}(\tau)|\times I^{(2)}(Q)$ 而相对位相差为 $\alpha_{12}(\tau)-\delta$ 的光相干叠加引起的；第三行的项可看作是由两束强度为 $[1-|\gamma_{12}(\tau)|]I^{(1)}(Q)$ 和 $[1-|\gamma_{12}(\tau)|]I^{(2)}(Q)$ 的光不相干叠加引起的。因此，从两个针孔到达 Q 点的光可看作是相干光和不相干光的混合，其强度比为

$$\frac{I_{相干}}{I_{不相干}}=\frac{|\gamma_{12}(\tau)|}{1-|\gamma_{12}(\tau)|}, \quad (23a)$$

或

$$\frac{I_{相干}}{I_{总}}=|\gamma_{12}|,\quad (I_{总}=I_{相干}+I_{不相干}). \quad (23b)$$

我们已经看到(见(12)式)，$\gamma_{12}^{(r)}$ 可在适当的干涉实验中通过强度测量来确定。在 § 10.4.1 中将看到，在大多数有实际意义的情况下，γ_{12} 的模(原则上还有它的位相)同样能从这样的实验确定。

§ 10.3.2 互相干的谱表示

设

$$V_T^{(r)}(P,t)=\int_{-\infty}^{\infty}v_T(P,\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu \quad (24)$$

---

1) M. Francon 和 S. Mallick 讨论过测量相干度的不同方法，见 *Progress in Optics*, Vol. 6, ed. E. Wolf (Amsterdam, North-Holland Publishing Company and New York, J. Wiley, 1967), p. 71.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是实截断函数 $V_T^{(r)}$ 的傅里叶积分表示。于是，由傅里叶反演公式，

$$v_T(P,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P,\ t)e^{2\pi i\nu t}dt, \tag{25}$$

由此得出，

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P_1,\ t+\tau)V_T^{(r)}(P_2,\ t)\,dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P_2,\ t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}v_T(P_1,\nu)e^{-2\pi i\nu(t+\tau)}d\nu\right]dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P_2,\ t)e^{-2\pi i\nu t}dt\right]v_T(P_1,\ \nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu\\&=\int_{-\infty}^{\infty}v_T(P_1,\ \nu)v_T^*(P_2,\ \nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu.\end{aligned} \tag{26}$$

其次，(26) 式两边都除以 $2T$，并对 $v_T(P_1,\ \nu)v_T^*(P_2,\ \nu)/2T$ 这个量作"修匀运算"，例如对随机函数 $V^{(r)}$ 的系综作系综平均(用一横线表示)，如同前面 §10.2(20)式中所说明那样。最后取 $T\to\infty$ 时的极限，就可以预期得到[1]

$$\langle V^{(r)}(P_1,\ t+\tau)V^{(r)}(P_2,\ t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}G_{12}(\nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu, \tag{27}$$

式中

$$G_{12}(\nu)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{\overline{v_T(P_1,\ \nu)v_T^*(P_2,\ \nu)}}{2T}\right]. \tag{28}$$

函数 $G_{12}(\nu)$ 可称为 P_1 和 P_2 处光振动的**互谱密度**。它是前面[§ 10.2(22)式]引入的**谱密度**的推广，当两点重合时，前者就化为后者。互谱密度是平稳随机过程理论中的**交叉功率谱**概念的光学模拟。(27)式表明，实相关函数 $\langle V^{(r)}(P_1,\ t+\tau)V^{(r)}(P_2,\ t)\rangle$ 和互谱密度 $G_{12}(\nu)$ 构成一傅里叶变换对[2]。

---

1) 这里应加上与658页注2同样的附注。

2) 在 $P_1=P_2$ 的情况下，这个结果是熟知的 Wiener-Khintchine 定理的光学等效形式 [N. Wiener, *Acta Math.*, **55** (1930), 117; A. Khintchine, *Math. Ann.*, **109** (1934), 604]。

可以不用修匀过程而用 (27) 式的傅里叶逆变换来定义互谱密度 $G_{12}(\nu)$。这另一种方法完全适用于本章的主要部分。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现在转到复表示. 设

$$V(P, t) = 2\int_0^\infty v(\nu)e^{-2\pi i\nu t}d\nu \tag{29}$$

是与 $V^{(r)}(P, t)$ 相缔合的解析信号(参看 § 10.2). 通过类似于由 (24) 式导出 (27) 式的分析得出,

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}(\tau) &= \langle V(P_1, t+\tau)V^*(P_2, t)\rangle \\ &= 4\int_0^\infty G_{12}(\nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu.\end{aligned} \tag{30}$$

因为 Γ_{12} 不包含属于负频率的谱分量,它是一个解析信号. 所以,如果用 $\Gamma_{12}^{(r)}$ 和 $\Gamma_{12}^{(i)}$ 表示它的实部和虚部,即

$$\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) + i\Gamma_{12}^{(i)}(\tau), \tag{31}$$

则这些函数由下述希耳伯特变换关系相联系:

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^{(i)}(\tau) &= \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_{12}^{(r)}(\tau')}{\tau'-\tau}d\tau', \\ \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_{12}^{(i)}(\tau')}{\tau'-\tau}d\tau'.\end{aligned} \tag{32}$$

由此得出,[参看 § 10.2(11)—(15) 式], $|\Gamma_{12}|$ 作为 τ 的函数,它是 $\Gamma_{12}^{(r)}$ 的包络;并且由 (30), (31) 和 (27) 式得出[1],

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= 2\langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t)\rangle \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu,\end{aligned} \tag{33}$$

而且 $|\gamma_{12}|$ 是实相关因子

$$\begin{aligned}\gamma_{12}^{(r)}(\tau) &= \frac{\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}} \\ &= \frac{\langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t)\rangle}{\sqrt{\langle V^{(r)2}(P_1, t)\rangle}\sqrt{\langle V^{(r)2}(P_2, t)\rangle}}\end{aligned} \tag{34}$$

---

1) 不难证明, $\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)$ 也等于 $2\langle V^{(i)}(P_1, t+\tau)V^{(i)}(P_2, t)\rangle$, $\Gamma_{12}^{(i)}(\tau) = 2\langle V^{(i)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t)\rangle = -2\langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(i)}(P_2, t)\rangle$ [例如, 见 P. Roman and E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **17** (1960), 474—476, 或 J. Mandel, *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), 241—242].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的包络.

(30) 式给出互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$ 的谱表示. (33) 式表明, $\Gamma_{12}(\tau)$ 的实部等于实函数 $V^{(r)}(P_1, t)$ 和 $V^{(r)}(P_2, t)$ 的交叉相关函数的两倍, 而 (32) 式给出 $\Gamma_{12}(\tau)$ 的实部和虚部之间的联系.

§ 10.4 准单色光的干涉和衍射

我们已经看到,为了充分描述部分相干光的干涉,一般必须知道互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$, 或与它等效的普通强度 I_1 和 I_2 以及复相干度 $\gamma_{12}(\tau)$. 现在限于讨论准单色光的重要情况,即光所含的谱成分的频率范围 $\Delta\nu$ 比平均频率 $\bar{\nu}$ 小很多. 我们将看到,在这种情况下,理论的形式较简单. 特别是,我们将发现,根据在许多应用中均满足的某种附加的假定, 就有可能用与参量 τ 无关的相关函数代替 $\Gamma_{12}(\tau)$ 和 $\gamma_{12}(\tau)$.

§10.4.1 准单色光的干涉. 互强度

让我们再次考虑图 10.1 所示的干涉实验. 根据 § 10.3(20) 式,干涉图样中 Q 点处的强度为

$$I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)} \times |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\alpha_{12}(\tau) - \delta], \tag{1}$$

式中

$$\tau = \frac{s_2 - s_1}{c}, \quad \delta = 2\pi\bar{\nu}\tau = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(s_2 - s_1). \tag{2}$$

现在假定光是准单色的. 由 § 10.3(18)式,按与 § 10.2(11)式中相同的方法得出, $|\gamma_{12}(\tau)|$ 和 $\alpha_{12}(\tau)$ 作为 τ 的函数,它们都比 $\cos 2\pi\bar{\nu}\tau$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}\tau$ 变化缓慢. 而且,如果 P_1 和 P_2 处的开孔足够小, 则分别来自每个孔的衍射光强度 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 将在图样的一个区域内明显地保持不变, 在这个区域内, $\cos 2\pi\bar{\nu}\tau$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}\tau$ 已改变符号许多次了. 由此得出, 在任一点 Q 附近的强度分布,是由几乎均匀的背景 $I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q)$ 叠加上具有几乎

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

不变的振幅 $2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\,|\gamma_{12}(\tau)|$ 的正弦式强度分布而组成的。图 10.2 示出三种典型情况中总强度分布的特性。在 Q 点附近的强度极大值和极小值，作为良好的近似，由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{极大}} &= I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\,|\gamma_{12}(\tau)|, \\ I_{\text{极小}} &= I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) - 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\,|\gamma_{12}(\tau)|. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

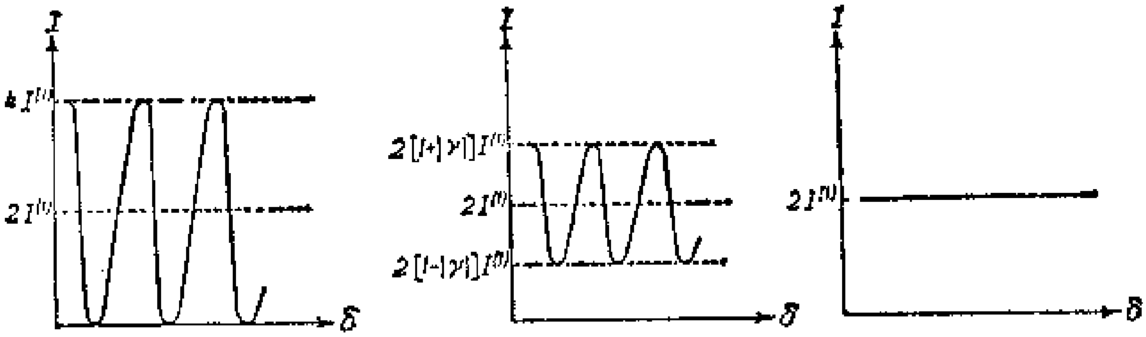
因此，Q 处的**条纹可见度**为

$$\mathscr{V}(Q) = \frac{I_{\text{极大}} - I_{\text{极小}}}{I_{\text{极大}} + I_{\text{极小}}} = \frac{2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}}{I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q)}\,|\gamma_{12}(\tau)|. \quad (4)$$

这个公式用两束光的强度和它们的相干度来表示条纹可见度。如果两束光强度相等 $[I^{(1)} = I^{(2)}]$，通常就是这样的，则 (4) 式简化为

$$\mathscr{V}(Q) = |\gamma_{12}(\tau)|, \quad (5)$$

即**条纹可见度等于相干度**。



(a) 相干叠加 $(|\gamma| = 1)$　(b) 部分相干叠加 $(0 < |\gamma| < 1)$　(c) 不相干叠加 $(\gamma = 0)$

图 10.2　两束具有相同强度 $I^{(1)}$ 而相干度为 $|\gamma|$ 的准单色光产生的干涉图样中的强度分布

根据 (1) 和 (2) 式，Q 点附近的强度极大值位置为

$$\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(s_2 - s_1) - \alpha_{12}(\tau) = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

正如开孔被波长为 $\bar{\lambda}$ 的严格单色光照明而 P_1 处的位相比 P_2 处推迟了 $\alpha_{12}(\tau)$ 一样。现在根据 §7.3(7)式，位相推迟 2π 相当于干

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

涉图样在平行于 P_1P_2 的方向上有一位移量 $a\bar{\lambda}/d$，其中 d 是 P_1 和 P_2 之间的距离，a 是屏 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 之间的距离。因此，相对于由 P_1 和 P_2 处单色及同位相照明而形成的条纹，准单色条纹在平行于双孔连线方向上有一位移量

$$x = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\frac{a}{d}\alpha_{12}(\tau). \tag{6}$$

我们看到，两束准单色光的复相干度的振幅和位相，可通过测量干涉条纹的可见度和位置来确定。这些结果与 §7.5.8 所述通过测量可见度曲线来确定光谱线中强度分布的迈克耳孙方法密切有关。由 §10.3(10) 和 (30) 式得出，

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\int_0^\infty G(\nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu}{\int_0^\infty G(\nu)d\nu},$$

式中 $G(\nu)$ 是谱密度。因此，根据傅里叶反演定理，$G(\nu)$ 与 $\gamma_{11}(\tau)$ 的傅里叶变换成正比。但刚才已经看到，$\gamma_{11}(\tau)$ 的模其实就是条纹可见度，而 $\gamma_{11}(\tau)$ 的位相与在适当的干涉实验中形成的条纹位置有简单关系。因此，按照完全相同于迈克耳孙曾用过的方法就能计算 G。图 7.54 和 7.55 中所示的可见度曲线，显然可解释成 $|\gamma_{11}|$ 被表示为两束光之间的时间延迟的函数。

实际上，两个干涉光束之间引起的时间延迟 τ 常常很小，因此可简化上述公式。根据 §10.3(30)，(18) 和 (10) 式，有

$$\begin{aligned}|\Gamma_{12}(\tau)|e^{i\alpha_{12}(\tau)} &= \sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\,|\gamma_{12}(\tau)|e^{i\alpha_{12}(\tau)}\\ &= 4\int_0^\infty G_{12}(\nu)e^{-2\pi i(\nu-\bar{\nu})\tau}d\nu.\end{aligned} \tag{7}$$

如果 $|\tau|$ 小到对于所有 $|G_{12}(\nu)|$ 可觉察的频率都有 $|(\nu-\bar{\nu})\tau| \ll 1$，即如果

$$|\tau| \ll \frac{1}{\Delta\nu}, \tag{8}$$

则用 1 代替 (7) 式被积函数的指数项时，显然只引入很小的误差。根据 §7.5(105) 式，条件 (8) 意味着 $|\tau|$ 必须比光的相干时间小

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

得多．当这个条件满足时，$|\Gamma_{12}(\tau)|$，$|\gamma_{12}(\tau)|$ 和 $\alpha_{12}(\tau)$ 分别与 $|\Gamma_{12}(0)|$，$|\gamma_{12}(0)|$ 和 $\alpha_{12}(0)$ 的区别就微不足道了．下面的写法是有好处的，令[1]

$$J_{12} = \Gamma_{12}(0) = \langle V_1(t)V_2^*(t)\rangle, \tag{9a}$$

$$\mu_{12} = \gamma_{12}(0) = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}}\sqrt{J_{22}}}$$

$$= \frac{J_{12}}{\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}, \tag{9b}$$

$$\beta_{12} = \alpha_{12}(0) = \arg\gamma_{12}(0) = \arg\mu_{12}. \tag{9c}$$

假定 (8) 式成立，则这时 § 10.3(18) 和 (10) 式给出

$$\gamma_{12}(\tau) \sim |\mu_{12}|e^{i(\beta_{12}-2\pi\bar{\nu}\tau)} = \mu_{12}e^{-2\pi i\bar{\nu}\tau}, \tag{10a}$$

$$\Gamma_{12}(\tau) \sim |J_{12}|e^{i(\beta_{12}-2\pi\bar{\nu}\tau)} = J_{12}e^{-2\pi i\bar{\nu}\tau}. \tag{10b}$$

因此，只要 (8) 式满足，则可在我们所有公式中分别用 (10a) 和 (10b) 式右边的量来代替 $\gamma_{12}(\tau)$ 和 $\Gamma_{12}(\tau)$．特别是，干涉定律 (1) 变为

$$I(Q) \sim I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)} \times |\mu_{12}|\cos(\beta_{12} - \delta), \tag{11}$$

并且只要两个干涉光束之间引起的程差 $|s_2 - s_1| = c|\tau|$ 比相干长度 $c/\Delta\nu$ 小得多，即只要

$$|\Delta\mathscr{S}| = |s_2 - s_1| = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\delta \ll \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda}, \tag{12}$$

(式中已用到关系式 $c/\Delta\nu = \bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$) 则 (11) 式成立．

(11) 式是初等(准单色)的部分相干性理论的基本公式，它构成了本节其余部分的主题；§ 10.5 中将讨论这一理论的某些应用．在其[由 (8) 或 (12) 式所示的]有效范围内，波场中任何两点 P_1 和 P_2 处振动之间的相关，宁可用 J_{12} 而不用 $\Gamma_{12}(\tau)$ 来表征，即宁可用一个取决于两点位置而与时间差值 τ 无关的量来表征．由 (10a) 式得出，在这一初等理论精确范围内，

---

1) 在方便的场合仍使用缩写记号，即用 J_{12} 代替 $J(P_1, P_2)$，等等．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$|\gamma_{12}(\tau)| \sim |\mu_{12}|, \tag{13}$$

因此 $|\mu_{12}|$ $(0 \leqslant |\mu_{12}| \leqslant 1)$ 表示 P_1 和 P_2 处振动的相干度；并且由 (11) 式看出，μ_{12} 的位相 β_{12} 表示其有效位相差. μ_{12} 是 $\gamma_{12}(\tau)$ 的特殊情况，正如 $\gamma_{12}(\tau)$ 一样，μ_{12} 通常称为**复相干度**（有时称为**复相干因子**）；而 J_{12} 称为**互强度**.

§10.4.2 扩展不相干准单色光源发出的光的互强度和相干度的计算

(a) 范西特-泽尼克定理

现在我们来确定被一个扩展的准单色初级光源 σ 照明的屏 $\mathscr{A}$ 上两点 P_1 和 P_2 的互强度 J_{12} 和复相干度 μ_{12}. 为了简单起见，取 σ 为平行于 $\mathscr{A}$ 的平面的一部分，并假定光源和屏之间的媒质是均匀的. 还假定 σ 的线度比光源与屏之间的距离 OO' 小得多（图 10.3），以及 OO' 与光源代表点 S 到 P_1 和 P_2 的连线之间的夹角很小.

设想光源被分为许多面元 $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $\cdots$, 其中心在 S_1, S_2, $\cdots$ 各点，其线度比平均波长 $\bar{\lambda}$ 小得多. 如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 是由面元 $d\sigma_m$ 在 P_1 和 P_2 处引起的复扰动，则在这两点处的总扰动为

$$V_1(t) = \sum_m V_{m1}(t), \quad V_2(t) = \sum_m V_{m2}(t). \tag{14}$$

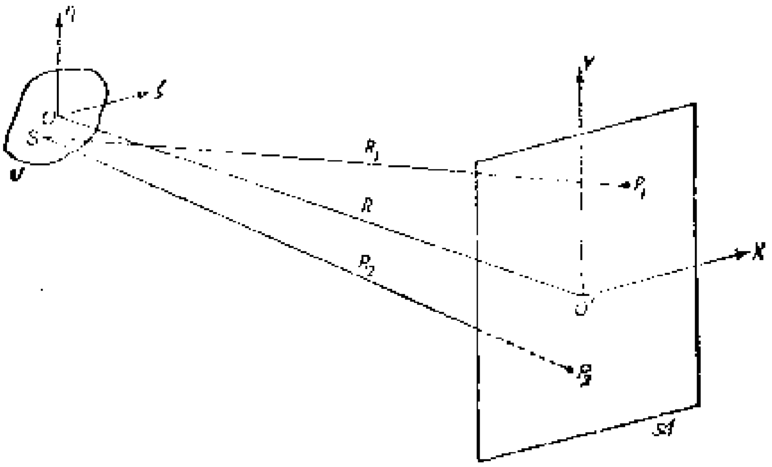


图 10.3 范西特-泽尼克定理的图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，

$$J(P_1, P_2) = \langle V_1(t) V_2^*(t) \rangle$$

$$= \sum_m \langle V_{m1}(t) V_{m2}^*(t) \rangle + \sum\sum_{m \neq n} \langle V_{m1}(t) V_{n2}^*(t) \rangle. \tag{15}$$

现在，可假定由光源不同面元引起的光振动是统计独立（互不相干)的，平均值为零，因此[1)]

$$\langle V_{m1}(t) V_{n2}^*(t) \rangle = \langle V_{m1}(t) \rangle \langle V_{n2}^*(t) \rangle = 0, \text{ 当 } m \neq n \text{ 时}. \tag{16}$$

如果 R_{m1} 和 R_{m2} 是光源面元 $d\sigma_m$ 到 P_1 和 P_2 的距离，则

$$V_{m1}(t) = A_m\left(t - \frac{R_{m1}}{v}\right) \frac{e^{-2\pi i \bar{\nu}(t - R_{m1}/v)}}{R_{m1}},$$

$$V_{m2}(t) = A_m\left(t - \frac{R_{m2}}{v}\right) \frac{e^{-2\pi i \bar{\nu}(t - R_{m2}/v)}}{R_{m2}}, \tag{17}$$

式中 $|A_m|$ 表征第 m 个面元辐射的强度，而 $\arg A_m$ 表征其位相[2)]，v 是在光源和屏之间的媒质中光的速度。因此，

$$\langle V_{m1}(t) V_{m2}^*(t) \rangle = \left\langle A_m\left(t - \frac{R_{m1}}{v}\right) A_m^*\left(t - \frac{R_{m2}}{v}\right) \right\rangle$$

$$\times \frac{e^{2\pi i \bar{\nu}(R_{m1} - R_{m2})/v}}{R_{m1} R_{m2}}$$

$$= \left\langle A_m(t) A_m^*\left(t - \frac{R_{m2} - R_{m1}}{v}\right) \right\rangle$$

$$\times \frac{e^{2\pi i \bar{\nu}(R_{m1} - R_{m2})/v}}{R_{m1} R_{m2}}. \tag{18}$$

如果程差 $R_{m2} - R_{m1}$ 比光的相干长度小得多，则可忽略 A_m^* 的自变量中的推迟项 $(R_{m2} - R_{m1})/v$，由 (15)，(16) 和 (18) 式得出，

$$J(P_1, P_2) = \sum_m \langle A_m(t) A_m^*(t) \rangle \frac{e^{2\pi i \bar{\nu}(R_{m1} - R_{m2})/v}}{R_{m1} R_{m2}}. \tag{19}$$

---

1) 不相干总是意味着一个有限（虽然不一定很宽）的光谱范围，实际上 (16) 式对严格单色光的理想情况并不成立。对于单色光，有 $V_{m1}(t) = U_{m1} e^{-2\pi i \nu t}$，$V_{n2}(t) = U_{n2} e^{-2\pi i \nu t}$，式中 U_{m1} 和 U_{n2} 与时间无关，因此 $\langle V_{m1}(t) V_{n2}^*(t) \rangle = U_{m1} U_{n2}^*$，这个量一般不为零。

2) A_m 一般还依赖于方向，但为了简单起见，我们忽略了这种依赖关系。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\langle A_m(t)A_m^*(t)\rangle$ 这个量表征光源面元 $d\sigma_m$ 的辐射强度。在任何一种实际情况中，都可以假定光源面元的总数如此之大，以致可把光源看成实际上是连续的。用 $I(S)$ 表示光源单位面积的强度，即 $I(S_m)d\sigma_m = \langle A_m(t)A_m^*(t)\rangle$，(19)式变为[1]

$$J(P_1, P_2) = \int_\sigma I(S)\frac{e^{i\bar{k}(R_1-R_2)}}{R_1R_2}dS, \tag{20}$$

式中 R_1 和 R_2 表示光源代表点 S 与 P_1 和 P_2 点之间的距离，$\bar{k} = 2\pi\bar{\nu}/v = 2\pi/\bar{\lambda}$ 是媒质中的波数。根据(20)和(9b)式，复相干度 $\mu(P_1, P_2)$ 由下式给出：

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}\int_\sigma I(S)\frac{e^{i\bar{k}(R_1-R_2)}}{R_1R_2}dS, \tag{21}$$

式中

$$I(P_1) = J(P_1, P_1) = \int_\sigma \frac{I(S)}{R_1^2}dS,$$

$$I(P_2) = J(P_2, P_2) = \int_\sigma \frac{I(S)}{R_2^2}dS, \tag{21a}$$

是 P_1 和 P_2 处的强度。

我们注意到，积分(21)与另一种很不相同的情况中出现的积分一样，这就是根据惠更斯-菲涅耳原理计算球面波在不透明屏上的开孔衍射引起的衍射图样中的复扰动时出现的积分。更精确地说，(21)式意味着，复相干度描述被一个扩展的准单色初级光源照明的平面上固定点 P_2 处和可变点 P_1 处振动的相关，它等于中心在 P_2 的某个衍射图样中相应点 P_1 处的归一化复振幅。这个图样可按下述方法得出：用一个大小和形状同光源一样的衍射孔代替光源，会聚于 P_2 的球面波充满该孔，孔内波阵面上的振幅分布与光源上的强度分布成正比。这个结果首先由范西特[2]确定，其后又由泽尼克[3]用一种较简单的方法得出。我们把它称为范西特-泽尼克定理。

---

1) 今后常用记号 dS, $dP_1\cdots$ 表示中心在 S, $P_1\cdots$ 点的面元。
2) P. H. van Cittert, *Physica*, **1** (1934), 201.
3) F. Zernike, *Physica*, **5** (1938), 785.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在大多数应用中，可假定强度 $I(S)$ 与 S 在表面上的位置无关(均匀强度)．因此，相应的衍射问题，就是均匀振幅的球面波被一个大小和形状同光源一样的孔衍射的问题．

设 (ξ, η) 是光源上代表点 S 在 O 处参考轴的坐标，(X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 是 P_1 和 P_2 在 O' 处另一套平行参考轴的坐标(图 10.3)．如果用 R 表示距离 OO'，则

$$R_1^2 = (X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2 + R^2,$$

因此

$$R_1 \sim R + \frac{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}{2R}. \tag{22}$$

这里只保留了 X_1/R，Y_1/R，ξ/R 和 η/R 中的首项[1]．对 R_2 也得出严格类似的表达式，因此

$$R_1 - R_2 \sim \frac{(X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2)}{2R} - \frac{(X_1 - X_2)\xi + (Y_1 - Y_2)\eta}{R}. \tag{23}$$

在(20)和(21)式的被积函数的分母中，作为良好的近似，可用 R 代替 R_1 和 R_2．又令

$$\frac{(X_1 - X_2)}{R} = p, \qquad \frac{(Y_1 - Y_2)}{R} = q, \tag{24}$$

$$\psi = \frac{\bar{k}[(X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2)]}{2R}. \tag{25}$$

则(21)式化为

$$\mu_{12} = \frac{e^{i\psi}\iint_\sigma I(\xi, \eta) e^{-i\bar{k}(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta}{\iint_\sigma I(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \tag{26}$$

---

1) 即 $R \gg \sqrt{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}$ 时，有

$$R_1 = R\left[1 + \frac{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}{R^2}\right]^{1/2} \sim R + \frac{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}{2R}.$$

——译者注

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，如果光源的线度以及 P_1 与 P_2 之间的距离都比光源到这两点的距离小得多，则相干度 $|\mu_{12}|$ 等于光源强度函数的归一化傅里叶变换的绝对值.

(25) 式所定义的量 ψ 有一简单解释. 根据 (23) 式，它表示位相差 $2\pi(OP_1 - OP_2)/\bar{\lambda}$，当

$$OP_1 - OP_2 \ll \bar{\lambda} \tag{27}$$

时，它显然可忽略.

对于中心在 O 点而半径为 ρ 的均匀圆形光源，(26) 式积分得出(参看 § 8.5.2)：

$$\mu_{12} = \left(\frac{2J_1(v)}{v}\right) e^{i\psi}, \tag{28}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} v &= \bar{k}\rho\sqrt{p^2+q^2} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}\frac{\rho}{R}\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}, \\ \psi &= \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}\left[\frac{(X_1^2+Y_1^2)-(X_2^2+Y_2^2)}{2R}\right], \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

J_1 是一阶第一类贝塞耳函数[1]. 根据 § 8.5.2，$|2J_1(v)/v|$ 从 $v=0$ 时为 1 平稳地下降到 $v=3.83$ 时为零；因此，随着 P_1 和 P_2 点越来越分开，相干度就平稳地降低，当 P_1 和 P_2 分开的距离为

$$P_1P_2 = \sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2} = \frac{0.61R\bar{\lambda}}{\rho} \tag{30}$$

时，就完全不相干了. v 进一步增大将重新引起小量的相干性，但相干度保持小于 0.14，当 $v=7.02$ 时又完全不相干. 因为当 v 通过 $J_1(v)$ 的每一个零值时，$J_1(v)$ 改变符号，所以位相 $\beta_{12} = \arg\mu_{12}$ 在该处有 π 的变化，结果在每次条纹消失以后，亮暗条纹互换位置.

函数 $|2J_1(v)/v|$ 从 $v=0$ 时为 1 平稳地下降到 $v=1$ 时为

---

1) 符号 J 也用来表示互强度，因互强度总是带着两个下标或几个自变量出现，所以不致引起混淆.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

0.88，$v=1$ 即

$$P_1P_2=\frac{0.16R\bar{\lambda}}{\rho}. \tag{31}$$

把对理想值 1 偏离 12% 看作最大容许偏离，由此得出，被角半径 $\alpha=\rho/R$ 的准单色均匀光源近乎相干照明的圆面积直径[1] 为 $0.16\bar{\lambda}/\alpha$. 在估计干涉和衍射实验所需光源的大小时，这个结果是有用的.

举一个例子，考虑被太阳直照的屏上一任意点周围的"相干面积"的大小. 日轮 (sun's disc) 在地球表面上所张的角直径 2α 约为 $0°32'\sim0.0093$ 弧度. 因此，如果忽略日轮上的亮度变化，则相干面积的直径 d 近似等于 $0.16\bar{\lambda}/0.0047\sim34\bar{\lambda}$. 取平均波长 $\bar{\lambda}$ 为 5.5×10^{-5} 厘米，得出 $d\sim0.019$ 毫米.

在这里，要用新的眼光看待迈克耳孙测量恒星的角直径的方法(参看 §7.3.6). 根据(5)和(13)式，条纹可见度等于迈克耳孙恒星干涉仪两个外镜(图 7.16 中的 M_1 和 M_2)处光振动的相干度. 对于角半径为 α 的亮度均匀的圆形恒星轮，根据(30)式，相干度为零(第一次条纹消失)时的两镜最小距离等于 $0.61\bar{\lambda}/\alpha$，与 §7.3(43)式一致. 而且，通过测量条纹的可见度及其位置，原则上不仅能确定恒星的直径，而且也能确定恒星轮上的强度分布. 因为根据 §10.4.1，测量条纹的可见度和位置，相当于确定复相干度 μ_{12} 的振幅和位相，而且根据 (26) 式，强度分布与 μ_{12} 的逆傅里叶变换成正比.

§7.3.6 中曾提到汉布里·布朗 (Hanbury Brown) 和特威兹 (Twiss) 对迈克耳孙恒星干涉仪的重大改进. 在汉布里·布朗-特威兹系统中，来自恒星的光聚焦在两个光电探测器 P_1 和 P_2 上，研究二者电流输出涨落的相关，就得到该恒星的信息. 详尽地分析

---

1) 早在 1865 年，费尔德 (E. Verdet) 就估计过"相干圆"的直径略小于 $0.5R\bar{\lambda}/\rho$ [*Ann. Scientif. de l'École Normale Supérieure*, **2** (1865), 291; 以及他的 *Leçons d'Optique Physique* (Paris, L'Imprimerie Impériale), **1** (1869), 106].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这一系统的性能，必须考虑光电效应的量子性质[1]，还需要某些电子学知识，因而超出本书的范围。然而这种方法的原理却不难理解。在理想的实验条件(无噪声)下，每个光电探测器的电流输出与入射光的瞬时强度 $I(t)$ 成正比，而电流输出的涨落与 $\Delta I(t) = I(t) - \langle I(t)\rangle$ 成正比。因此，在汉布里·布朗和特威兹干涉仪中，实际测得的量与 $\Omega_{12} = \langle \Delta I_1 \Delta I_2\rangle$ 成正比。简单的统计计算表明[2]，Ω_{12} 与相干度的平方成正比，因此，知道了 Ω_{12}，如同知道了 $|\mu_{12}|$，也就得出关于恒星大小的信息了。

(b) 霍普金斯公式

在推导范西特-泽尼克公式 (21) 中，曾假定光源 σ 与 P_1 和 P_2 点之间的媒质是均匀的。不难将此公式推广到其他情况，例如媒质是不均匀的，或者媒质是由若干个折射率不同的均匀区相连接组成的。

我们再次设想光源被分为许多小面元 $d\sigma_1$，$d\sigma_2$，$\cdots$，其中心在 $S_1, S_2, \cdots$ 各点，其线度比平均波长 $\bar{\lambda}$ 小得多。目前，如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 代表由面元 $d\sigma_m$ 在 P_1 和 P_2 处引起的扰动，则 (15) 和 (16) 式仍成立，但在 (17) 式中，必须用更普遍的函数代替每个因子 $e^{i\bar{k}R_{mj}}/R_{mj}$ $(j = 1, 2;\ \bar{k} = 2\pi\bar{\nu}/v)$。引入媒质的**透射函数** $K(S, P, \nu)$，它按与 § 9.5.1 中类似的方法定义；它代表一个位于 S 处的面元 $d\sigma$ 的单色点光源在 P 处引起的复扰动，这个单色点光源的频率为 ν 并具有单位强度和零位相。对于均匀媒质，由惠更斯-菲涅耳原理得出，$K(S, P, \nu) = -ie^{ikR}/\lambda R$，式中

---

1) 参看 R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Proc. Roy. Soc.*, A. **242** (1957), 300; 同上, A. **243** (1957), 291. 又见 E. M. Purcell, *Nature*, **178** (1956), 1449; F. D. Kahn, *Optica Acta*, **5** (1958), 93 和 L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.*, **72** (1958), 1037; *Progress in Optics*, Vol. 2 ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), 181.

2) E. Wolf, *Phil. Mag.*, **2** (1957), 351. 又见 J. A. Ratcliffe, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 233.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

R 表示距离 SP，已假定 SP 与 $d\sigma$ 的法线夹角充分小。由此得出，在更普遍的情况下，必须用 $i\bar{\lambda}K(S_m, P, \bar{\nu})$ 代替因子 $e^{i\bar{k}R_{mj}}/R_{mj}$；过渡到连续分布，就得出下述关系式来代替 (20) 式：

$$J(P_1, P_2) = \bar{\lambda}^2 \int_\sigma I(S)K(S, P_1, \bar{\nu})K^*(S, P_2, \bar{\nu})dS. \qquad (32)$$

根据 (32) 和 (9b) 式，

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{\bar{\lambda}^2}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}} \times \int_\sigma I(S)K(S, P_1, \bar{\nu})K^*(S, P_2, \bar{\nu})dS, \qquad (33)$$

式中 $I(P_1) = J(P_1, P_1)$ 和 $I(P_2) = J(P_2, P_2)$ 分别是 P_1 和 P_2 处的强度。

为了以后应用起见，将 (32) 和 (33) 式表示成稍有不同的形式是有好处的。令

$$i\bar{\lambda}K(S, P_1, \bar{\nu})\sqrt{I(S)} = U(S, P_1),$$
$$i\bar{\lambda}K(S, P_2, \bar{\nu})\sqrt{I(S)} = U(S, P_2). \qquad (34)$$

公式 (32) 和 (33) 变为

$$J(P_1, P_2) = \int_\sigma U(S, P_1)U^*(S, P_2)dS, \qquad (35a)$$

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}} \int_\sigma U(S,P_1)U^*(S,P_2)dS. \qquad (35b)$$

注意到 (34) 式所定义的 $U(S, P)$，与一个位于 S 的频率为 ν 并具有强度 $\sqrt{I(S)}$ 和零位相的严格单色点光源在 P 处引起的扰动成正比。因此 (35) 式可解释为，通过一个"相缔合"的单色光源上每一个光源点在 P_1 和 P_2 处引起的那些扰动[1]，来表示一个扩展的准单色光源所引起的互强度 $J(P_1, P_2)$ 和复相干度 $\mu(P_1, P_2)$。

霍普金斯[2] 根据一些启发性的考虑最早提出了 (35b) 式，它

---

1) 不应假定这一虚构的光源发出的光的互强度和复相干度也由 (35) 式给出。因为如前所述，在单色辐射的极限情况下，推导这些公式时用到的 (16) 式不成立；单色光的相干度事实上总是等于 1。

2) H.H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A, **208** (1951), 263.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在解决仪器光学的相干性问题中很有用处。此公式的主要用处是由于它类似范西特-泽尼克定理，不必明显利用平均过程就能计算一个不相干光源发出的光的复相干度。

§ 10.4.3 一个例子

我们将通过讨论一个实验来说明上述考虑。透镜 L_0 把初级光源 σ_0 成象在针孔 σ_1 上，透镜 L_1 使从针孔出射的光变为平行光。另一个同 L_1 完全一样的透镜 L_2 把那些干涉光束会聚到透镜 L_2 焦平面 $\mathscr{F}$ 内的焦点 F 上。平面镜 M 用来缩短仪器的总长度(图 10.4)。如果在 L_1 和 L_2 之间的平行光束中放入一个衍射掩模(一个暗屏 $\mathscr{A}$，例如一块均匀变黑的底片)，其上的那些孔具有所需的任意大小、形状和分布，则在焦平面 $\mathscr{F}$ 内形成它的夫琅和费衍射图样，正常使用时，工作人员通过显微镜观察衍射图样时可替换掩模[1]。

假如 σ_0 是一个准单色点光源，它就会在 σ_1 平面内其几何象附近产生相干照明。此相干照明面积的大小与一个光源点由透镜 L_0 形成的爱里衍射图样 σ_A 的有效大小同一数量级。由一个有限的初级光源在 σ_1 平面内形成的光分布，可认为是由许多这样的图

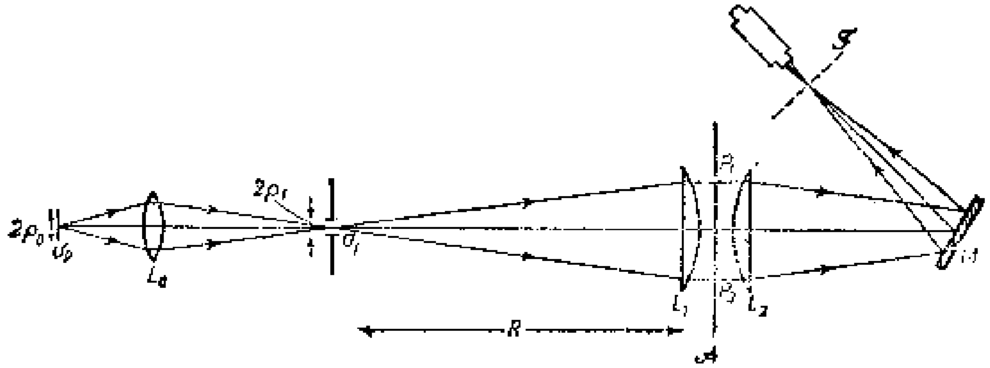


图 10.4 衍射计

1) 这种仪器称为衍射计，它的主要用途是以光学衍射方法解决X射线结构分析问题［参看 C. A. Taylor, R. M. Hinde and H. Lipson, *Acta Cryst.*, **4** (1951), 261; A. W. Hanson, H. Lipson, and C. A. Taylor, *Proc. Roy. Soc. A*, **218** (1953), 371; W. Hughes and C. A. Taylor, *J. Sci. Instr.*, **30** (1953), 105］.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

样不相干叠加引起的。如果假定这个扩展光源由 L_0 形成的象以及针孔 σ_1 两者都比 σ_A 大得多，则被照明的针孔 σ_1 本身实际上可作为一个不相干光源[1]。根据范西特-泽尼克定理，这样的一个光源在透镜 L_1 的第一个表面上（更一般地说，在平面 $\mathscr{A}$ 内）任何两点处的振动之间引起相关；用通常的近似，由公式 (28) 给出复相干度：

$$\mu_{12} = |\mu_{12}| e^{i\beta_{12}} = \frac{2J_1(v)}{v} e^{i\phi}, \tag{36a}$$

式中

$$v = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho_1 d}{R}, \qquad \phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2R}\right), \tag{36b}$$

式中 $d = P_1P_2$，ρ_1 是 σ_1 的半径，R 是 σ_1 和 L_1 之间的距离，r_1 和 r_2 是由轴到 P_1 和 P_2 的距离。

如果衍射掩模 $\mathscr{A}$ 内有两个小圆孔，其中心在 P_1 和 P_2，则在焦平面 $\mathscr{F}$ 内观察到的图样，是由这两个孔出射的具有相干度 $|\mu_{12}|$ 的两个部分相干光束叠加引起的。我们将研究随着 P_1 和 P_2 的距离逐渐增大，即随着两个干涉光束之间的相干度改变，这个图样结构的变化。

假定 P_1 和 P_2 的位置是轴对称的，因此 $\phi = 0$，并且在焦平

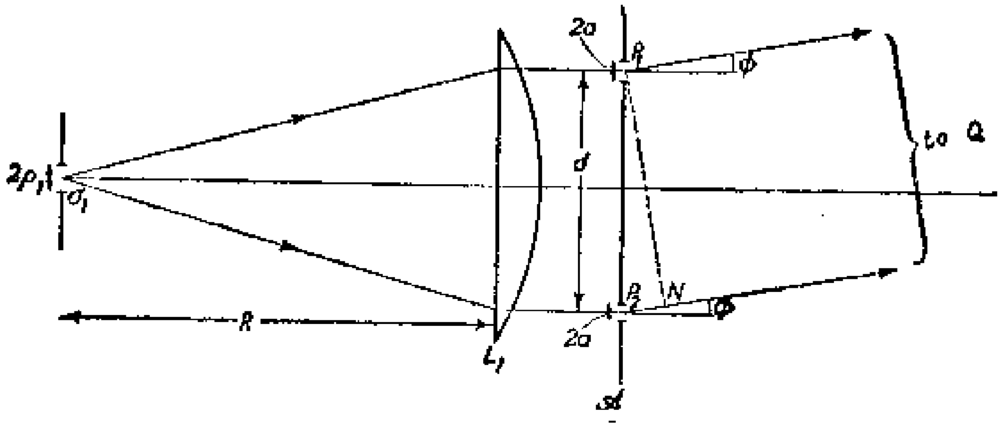


图 10.5 衍射计焦平面内强度分布的计算

1) 这一点将在 § 10.5.1 中定量地讨论。又见 A. T. Forrester, *Amer. J. Phys.*, **24** (1956), 194.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

面内 Q 点处各与两个光束之一有关的强度 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 相等，二者均由圆孔衍射的夫琅和费公式(§8.5(14)式)给出。如果 Q 点是在与 $\mathscr{A}$ 的法线成 ϕ 角的方向上衍射的光线焦点，a 是每个孔的半径(见图 10.5)，则除了一个归一化因子外，有

$$I^{(1)}(Q)=I^{(2)}(Q)=\left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2,\quad u=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\phi. \tag{37}$$

衍射到 Q 点的两个光束之间的位相差 δ 为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}P_2N=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\phi=Cuv,\quad C=\frac{\lambda}{2\pi}\frac{R}{\rho_1 a}, \tag{38}$$

式中 N 是由 P_1 落到 P_2 处衍射光线上的垂足。把(36)，(37)和(38)式代入(11)式，最后得出，当 P_1 和 P_2 处两个孔的距离为 d 时，焦平面内 $Q(\phi)$ 点处的强度表达式如下：

$$I(\phi,d)=2\left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2\left\{1+\left|\frac{2J_1(v)}{v}\right|\cos[\beta_{12}(v)-Cuv]\right\}, \tag{39}$$

式中

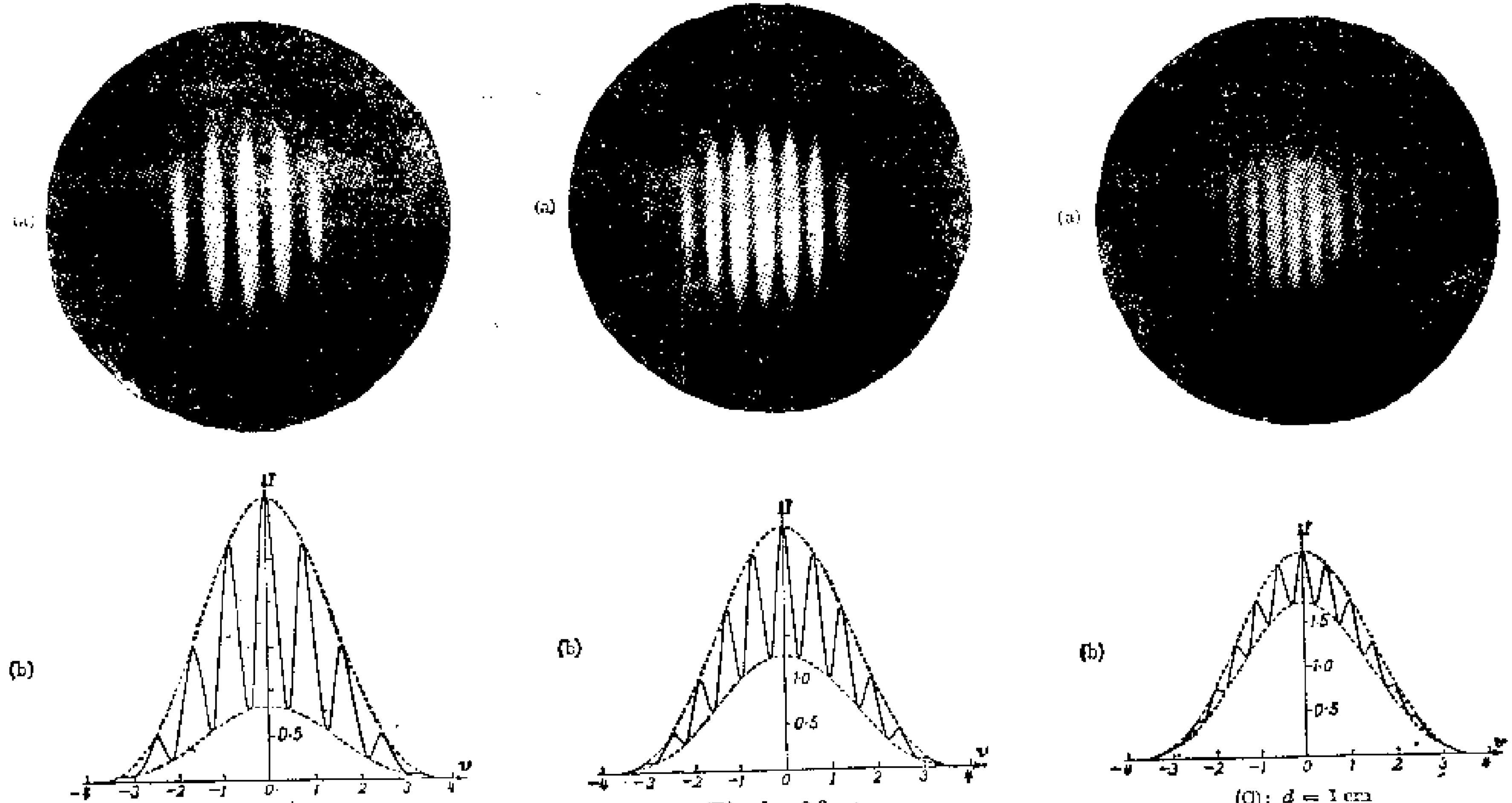
$$\left.\begin{aligned}\beta_{12}(v)&=0,\qquad \text{当}\ \frac{2J_1(v)}{v}>0\ \text{时},\\ &=\pi,\qquad \text{当}\ \frac{2J_1(v)}{v}<0\ \text{时}.\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

图 10.6 中示出利用这种装置对不同的双孔距离 d 观察到的图样照片。还示出按公式(39)计算的相应理论曲线。虚线代表包络：

$$\left.\begin{aligned}I_{\text{极大}}(\phi,d)&=2\left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2\left\{1+\left|\frac{2J_1(v)}{v}\right|\right\},\\ I_{\text{极小}}(\phi,d)&=2\left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2\left\{1-\left|\frac{2J_1(v)}{v}\right|\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

注意到下述结果是有意义的：当 $\beta=\pi$ 时(情况(D)和(E))，每个图样中心处强度是相对的极小值，而不是极大值，与我们的一般考虑一致。相干度随双孔距离的变化如图 10.7 所示，其中与图 10.6 照片对应的六种情形也用相应的字母标明。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn



(A): $d = 0{\cdot}6$ cm
$|\mu_{12}| = 0{\cdot}593,\ \beta_{12} = 0$

(B): $d = 0{\cdot}8$ cm
$|\mu_{12}| = 0{\cdot}361,\ \beta_{12} = 0$

(C): $d = 1$ cm
$|\mu_{12}| = 0{\cdot}146,\ \beta_{12} = 0$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

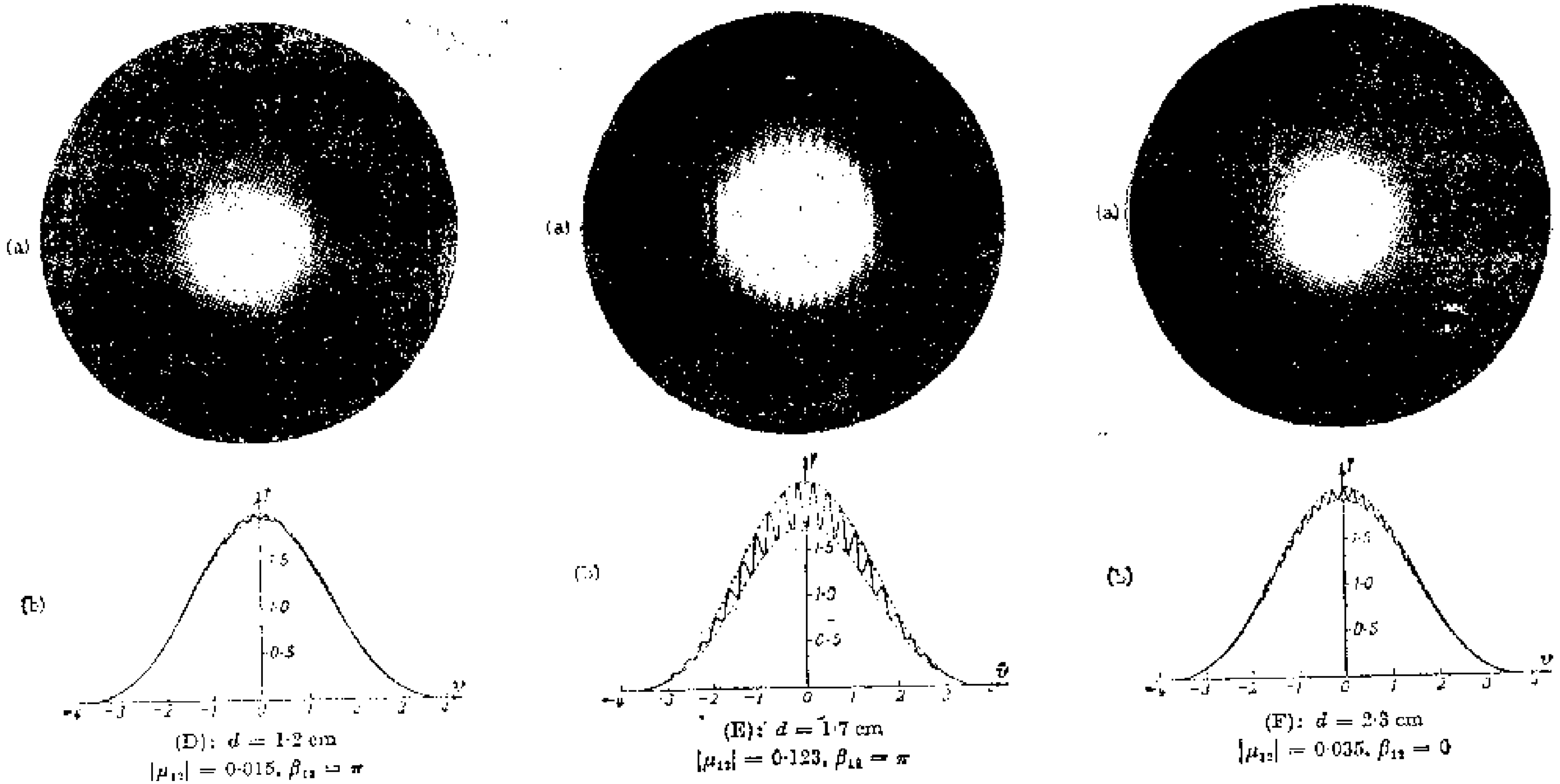


图 10.[illegible] 部分相干光的双光束干涉

(a) 观察到的图样，(b) 理论强度曲线．衍射计透镜 L_0，L_1 和 L_2 的焦距：$f_0 = 20$ 厘米，$f_1 = f_2 = R = 152$ 厘米．L_0 的直径：5 厘米．L_0 到 σ_1 的距离：40 厘米．L_1 和 L_2 的距离：14 厘米．L_2 到镜 M 的距离：85 厘米．针孔 σ_1 的直径 $2\rho_1$:0.9×10^{-2} 厘米．P_1 和 P_2 处小孔的直径 $2a$：0.14 厘米．平均波长 $\bar{\lambda} = 5790$ 埃

[引自 B. J. Thompson and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47** (1957), 895.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

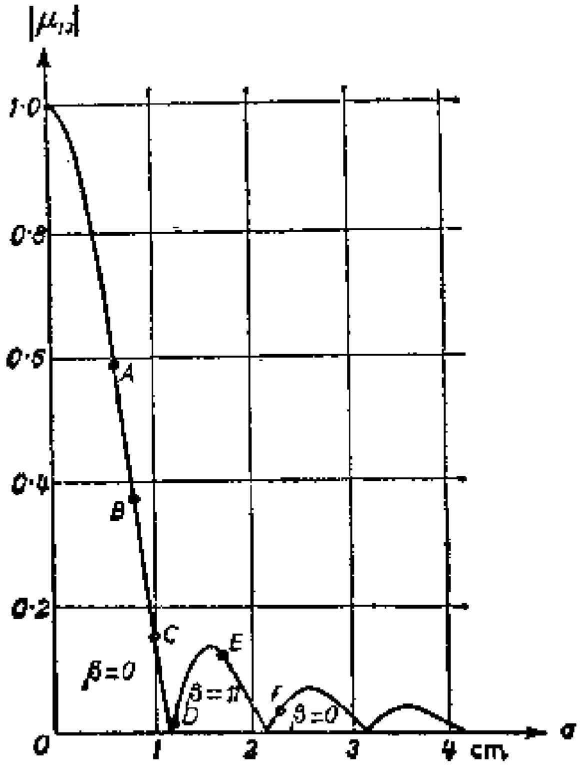


图 10.7　部分相干光的双光束干涉．相干度作为衍射计中两个被照明的小孔距离 d 的函数（$\rho_1=0.45\times10^{-1}$ 厘米，$R=152$ 厘米，$\bar{\lambda}=5790$ 埃；假定 σ_1 不相干照明）

§10.4.4　互强度的传播

考虑从扩展的初级光源 σ 发出的一束准单色光，并假定与光束相截的虚曲面 $\mathscr{A}$ 上所有各对点的互强度是已知的．下面将证明，由此可确定被来自 $\mathscr{A}$ 的光直接或通过光学系统照明的其他任一曲面 $\mathscr{B}$ 上所有各对点的互强度．

首先假定 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 之间的媒质是均匀的，并且折射率为 1．设 $U(S,Q_1)$ 和 $U(S,Q_2)$ 是由相缔合的单色光源的一个代表源点 S 在 $\mathscr{B}$ 上的 Q_1 和 Q_2 点处引起的扰动(图 10.8)．因此，根据(35)式，互强度 $J(Q_1,Q_2)$ 为

$$J(Q_1,Q_2)=\int_\sigma U(S,Q_1)U^*(S,Q_2)dS. \tag{42}$$

现在利用惠更斯-菲涅耳原理，$U(S,Q_1)$ 和 $U(S,Q_2)$ 可用 $\mathscr{A}$ 上所有各点处的扰动来表示：

$$U(S,Q_1)=\int_{\mathscr{A}} U(S,P_1)\frac{e^{i\bar{k}s_1}}{s_1}\Lambda_1 dP_1. \tag{43}$$

式中 s_1 是 $\mathscr{A}$ 上的代表点 P_1 到 Q_1 的距离，Λ_1 是 P_1 处的倾斜因

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

子（第八章中用K表示），$\bar{k}=2\pi\bar{\nu}/c$是平均波数。当倾斜很小时，$\Lambda_1\sim -i/\bar{\lambda}$。根据(43)式和$U(S,Q_2)$的类似表达式，得出

$$U(S,Q_1)U^*(S,Q_2)=\int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}}U(S,P_1)U^*(S,P_2)\times\frac{e^{i\bar{k}(s_1-s_2)}}{s_1s_2}\Lambda_1\Lambda_2^*dP_1dP_2, \tag{44}$$

式中P_1和P_2两点独立地取积分曲面$\mathscr{A}$上所有各个位置。然后将(44)式代入(42)式，变换积分次序。对σ积分正好给出$J(P_1,P_2)$，由此得出：

$$J(Q_1,Q_2)=\int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}}J(P_1,P_2)\frac{e^{i\bar{k}(s_1-s_2)}}{s_1s_2}\Lambda_1\Lambda_2^*dP_1dP_2. \tag{45}$$

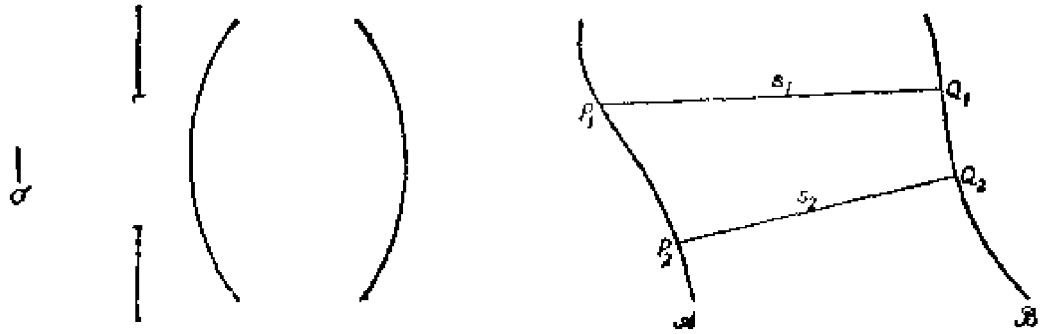


图 10.8　互强度的传播：公式(45)的图示

这就是所要求的互强度传播的公式，是由泽尼克[1]提出的。推导(45)式时已含蓄地假定从曲面$\mathscr{A}$上每一点出射的光都到达Q_1点和Q_2点。注意两个曲面之间有任何光阑存在时，积分要限于曲面$\mathscr{A}$上能把光传送到Q_1和Q_2的那些部分，除非光阑小到其边缘处的衍射效应不能忽略。需计及衍射时，从$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的过渡要分两步进行，首先从$\mathscr{A}$到光阑平面，然后从光阑平面到曲面$\mathscr{B}$。

在Q_1点与Q_2点重合的特殊情况下，又用强度$I(P_1)$，$I(P_2)$和复相干度$\mu(P_1,P_2)$代替$J(P_1,P_2)$，(45)式就化为下述强度表达式：

---

1) F. Zernike, *Physica*, **5** (1938), 791.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$I(Q) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\,\mu(P_1, P_2) \times \frac{e^{i\bar{k}(s_1-s_2)}}{s_1 s_2} A_1 A_2^* dP_1 dP_2. \tag{46}$$

这个公式把 Q 点处的强度表示为与光束相截的任意曲面 $\mathscr{A}$ 上每一对面元 dP_1, dP_2 所作的贡献之和(见图 10.9)。每一对面元的贡献依赖于 P_1 和 P_2 处的强度，并且每一贡献的权重就是相应的复相干度因子 $\mu(P_1, P_2)$ 的值。公式(46)可认为是一种关于部分相干场中强度传播的惠更斯-菲涅耳原理。刚导出的公式与较初等的惠更斯-菲涅耳理论公式之间的相似性具有更深刻的意义，我们将在部分相干性理论的严格表述中给予阐明(§ 10.7)。

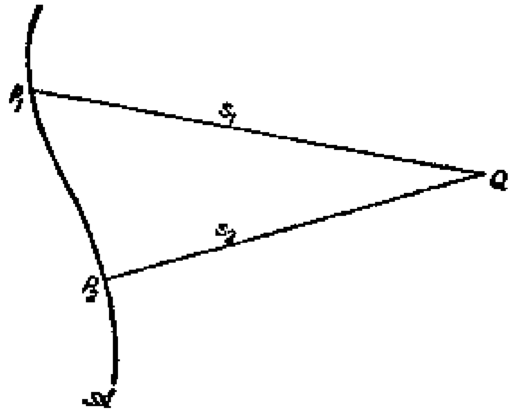


图 10.9　公式(46)的图示

如果从 $\mathscr{A}$ 到达 $\mathscr{B}$ 的光是通过光学系统的，显然，因子 $Ae^{i\bar{k}s}/s$ 必须用一个适当的透射函数 $K(P, Q)$ 来代替。因此得出下述更普遍的公式来代替(45)式:

$$J(Q_1, Q_2) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} J(P_1, P_2)K(P_1, Q_1)K^*(P_2, Q_2)dP_1 dP_2. \tag{47}$$

§ 10.5　某 些 应 用

§ 10.5.1　扩展的不相干准单色光源象中的相干度

作为研究部分相干光成象问题的准备，先讨论一个扩展的不相干光源由共轴光学系统所形成的象的相干度，将是有好处的。由于衍射(一般也由于象差)的缘故，来自每一个光源点的光并不集中于一点，而是扩展到一有限面积上，由此引起了象平面上的振动之间的相关度是一有限值。这些"象图样"中有些彼此重叠，结

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

果在象平面内那些彼此足够接近的点上同时接收到相干以及不相干的贡献。

假定 σ 是位于折射率为 n 的均匀物空间内的均匀准单色不相干圆形光源，其半径为 ρ，其发射光平均(真空)波长为 $\bar{\lambda}_0$。又设 D 是物平面与入射光瞳平面之间的距离。对应于象的量用带撇的同样符号来表示。

设 d 是入射光瞳内 P_1 和 P_2 两点之间的距离。假定 $\rho/D \ll 1$，$d/D \ll 1$，$OP_1 - OP_2 \ll \bar{\lambda}_0$，式中 O 是光源的轴点[1]；则根据 §10.4(28)式，复相干度 $\mu(P_1, P_2)$ 为

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{2J_1(v)}{v}, \tag{1}$$

$$v = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} d\sin\alpha = \frac{2\pi n}{\bar{\lambda}_0} d\sin\alpha. \tag{2}$$

式中 $\alpha \sim \sin\alpha \sim \rho/D$ 是从入射光瞳中心看到的光源角半径(图10.10)。

为了确定出射光瞳平面内任一对点的复相干度，我们可应用传播定律 §10.4(47)式。然而，现在涉及的是从一个平面传播到其共轭平面的特殊情况，在这种情况下，传播定律化为较简单的形式，它可直接推导如下：

如果 $U(S, P_1)$ 和 $U(S, P_2)$ 是相缔合的单色光源上一个光

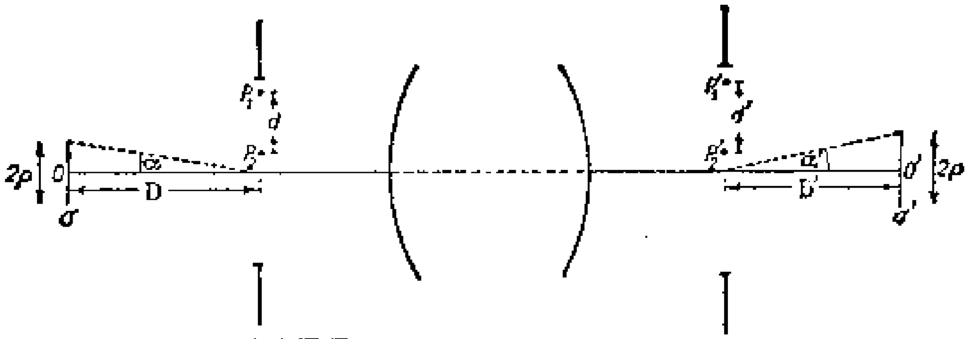


图 10.10　计算不相干光源象中的相干度

1) 如果最后这一条件不满足，$|\mu(P_1, P_2)|$ 仍保持不变，但根据 §10.4(28)式，$\mu(P_1, P_2)$ 的位相增加量 $\phi = 2\pi[OP_1 - OP_2]/\bar{\lambda}_0$。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

源点 S 在 P_1 和 P_2 处引起的复扰动(参看 678 页)，则 S 在出射光瞳内其共轭点处引起的扰动为

$$U(S, P_1') = K_{11}U(S, P_1),\quad U(S, P_2') = K_{22}U(S, P_2). \tag{3}$$

式中 $K_{11} = K(P_1, P_1')$ 是关于在两个光瞳平面的共轭点 P_1 和 P_1' 之间传播的适当的透射函数. 由霍普金斯公式 § 10.4(35b)，

$$\mu(P_1', P_2') = \frac{1}{\sqrt{I(P_1')}\sqrt{I(P_2')}}\int_\sigma U(S, P_1')U^*(S, P_2')dS. \tag{4}$$

现在两个光瞳平面内的强度 $I(P_1')$ 和 $I(P_1)$ 的关系是

$$I(P_1') = \int_\sigma |U(S, P_1')|^2 dS = |K_{11}|^2 \times \int_\sigma |U(S, P_1)|^2 dS = |K_{11}|^2 I(P_1), \tag{5}$$

$I(P_2')$ 和 $I(P_2)$ 之间也有类似的关系. 由 (3)，(4) 和 (5) 式得出，

$$\mu(P_1', P_2') = \frac{K_{11}K_{22}^*}{|K_{11}|\,|K_{22}|}\frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}} \times \int_\sigma U(S, P_1)U^*(S, P_2)dS = e^{i(\Phi_{11}-\Phi_{22})}\mu(P_1, P_2), \tag{6}$$

式中 Φ_{11} 和 Φ_{22} 分别是 K_{11} 和 K_{22} 的位相. 这个关系式意味着，出射光瞳内任何两点的相干度 $|\mu|$ 等于入射光瞳内其共轭点的相干度；而相应点对的复相干度的位相差为 $\Phi_{11}-\Phi_{22}$，即几何位相差 $2\pi\{[P_1P_1']-[P_2P_2']\}/\lambda_0$.

设

$$v' = \frac{2\pi n'}{\lambda_0} d' \sin\alpha'. \tag{7}$$

因为 P_1' 是 P_1 的共轭点，P_2' 是 P_2 的共轭点，由史密斯-亥姆霍兹定理 (§ 4.4(49) 式)得出，在高斯光学精确范围内，$v' = v$[1]. 因此，由 (1) 和 (6) 式，出射光瞳内各对点的复相干度可写成

1) 这意味着 v 和 v' 代表赛德耳变量的一种特殊选择(§ 5.2).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mu(P_1', P_2') = \left(\frac{2J_1(v')}{v'}\right) e^{i(\Phi_{11}-\Phi_{12})}. \tag{8}$$

同§10.4(31)式，如果认为数值$|\mu| \geqslant 0.88$充分近似于完全相干，并且记住$v \leqslant 1$时，$|2J(v)/v| \geqslant 0.88$，由此得出，一个不相干准单色均匀圆形光源将在出射光瞳内产生直径为

$$d'_{相干} \sim \frac{0.16\bar{\lambda}_0}{n' \sin \alpha'} \tag{9}$$

的相干照明面积，式中$2\alpha' \sim 2\rho'/D'$是光源象的直径对出射光瞳中心的张角，$\bar{\lambda}_0/n' = \bar{\lambda}$是光在象空间中的平均波长。

将(9)式表示为稍有不同的形式。设r'_A表示该系统相应的爱里图样中第一暗环的半径，

$$r'_A = \frac{0.61\bar{\lambda}_0}{n' \sin \theta'}, \tag{10}$$

式中$n' \sin \theta' \sim n'a'/D'$是象方的数值孔径。然后根据(9)和(10)式，$d'_{相干}/r'_A \sim 0.16 \sin \theta'/0.61 \sin \alpha'$，因此

$$d'_{相干} \sim 0.26a'\left(\frac{r'_A}{\rho'}\right). \tag{11}$$

这一公式利用"物理参量"即相应的爱里图样第一暗环半径r'_A，光源几何象半径ρ'和出射光瞳半径a'可估计出出射光瞳的相干照明面积的大小。

如果$d'_{相干} \geqslant 2a'$，即如果

$$\rho' \leqslant 0.13r'_A, \tag{12}$$

则出射光瞳以至象平面都几乎是相干照明的。

当$d'_{相干} \ll 2a'$，即

$$\rho' \gg 0.13r'_A \tag{13}$$

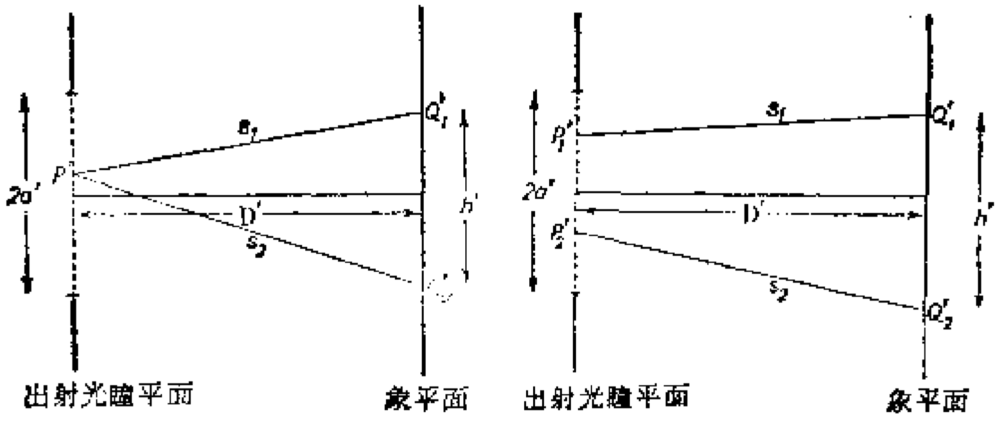
时，出射光瞳的相干照明面积将比出射光瞳本身小得多，因此在这种情况下，出射光瞳的照明实际上是不相干的。于是，象平面内一对点Q_1'和Q_2'的复相干度，本质上与出自一个不相干光源相同；这个光源与出射光瞳有同样大小、形状和位置，光源上的强度分布与出射光瞳上的强度分布也相同。因此，根据范西特-泽尼克定理§10.4(21)式，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mu(Q_1', Q_2') = \frac{1}{\sqrt{I(Q_1')}\sqrt{I(Q_2')}} \int_{\mathscr{A}'} I(P') \frac{e^{ik(s_1 - s_2)}}{s_1 s_2} dP', \quad (14)$$

$$I(Q_1') = \int_{\mathscr{A}'} \frac{I(P')}{s_1^2} dP', \quad I(Q_2') = \int_{\mathscr{A}'} \frac{I(P')}{s_2^2} dP'. \quad (15)$$

积分遍及出射光瞳 $\mathscr{A}'$, s_1 和 s_2 分别表示 $\mathscr{A}'$ 中的代表点 P' 到 Q_1' 点和 Q_2' 点的距离(图 10.11(a)). 利用 (5) 式, 强度 $I(P')$ 可由入射光瞳内其共轭点处的强度 $I(P)$ 算出. 由于透射函数的位相在 (5) 式中不出现, 因此 $\mu(Q_1', Q_2')$ 与该系统的象差无关. 通常



(a) 出射光瞳的不相干照明　　(b) 出射光瞳的部分相干照明

图 10.11　计算象平面内的复相干度

$I(P')$ 实际上是常数; 而且, 如果 Q_1' 点和 Q_2' 点彼此充分靠近, 则 (14) 式化为

$$\mu(Q_1', Q_2') = \frac{2J_1(u')}{u'}, \quad u' = \frac{2\pi n'}{\lambda_0} \frac{a'}{D'} h', \quad (16)$$

式中 h' 是 Q_1' 和 Q_2' 之间的距离.

在一般情况下, 当条件 (12) 或条件 (13) 都不成立时, 则出射光瞳被复相干度 (8) 式所表征的部分相干光照明. 因此, 象平面内各对点的复相干度的值必须利用传播定律 § 10.4(45) 式来计算, 而导出下式:

$$\mu(Q_1', Q_2') = \frac{1}{\sqrt{I(Q_1')}\sqrt{I(Q_2')}} \int_{\mathscr{A}'} \int_{\mathscr{A}'} \sqrt{I(P_1')}\sqrt{I(P_2')}$$

$$\times \left(\frac{2J_1(v')}{v'}\right) \frac{e^{i[\Phi_{11} - \Phi_{21} + k(s_1 - s_2)]}}{s_1 s_2} A_1 A_2^* dP_1' dP_2'. \quad (17)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如果利用 $\mu(Q_1', Q_1') = \mu(Q_2', Q_2') = 1$ 这个事实，则强度 $I(Q_1')$ 和 $I(Q_2')$ 也可由这个公式算出. 注意到由于被积函数含有透射函数的位相 Φ_{11} 和 Φ_{21}，因此现在复相干度依赖于该系统的象差.

§ 10.5.2 聚光镜对显微镜分辨率的影响

为了在显微镜下检查一个小的不发光物体，必须照明该物体. 如果物体几乎是透明的(通常就是这样)，则从后面照明，或称透过照明 (transillumineted)，然后，穿过了物体的光聚焦在显微镜物镜的象平面上. 为了获得充分集中的光，通常采用辅助透镜系统——聚光镜. 人们使用的照明方法有多种. 我们将扼要叙述两种常用的方法，即所谓临界照明和柯勒 (Köhler) 照明，并讨论这些方法能达到的分辨率.

(a) 临界照明

在这种照明方法中，一个亮度均匀的光源紧靠在场阑后方，并由聚光镜成象在显微镜物镜的物平面上(图 10.12). 调节场阑孔径的大小，使得它由聚光镜所成的象正好覆盖视场.

聚光器的象平面(物镜的物平面)内的照明区，比单个光源点产生的爱里图样的有效大小要大得多 (用 § 10.5.1 的记号，$\rho' \gg r_A'$). 由 § 10.5.1 得出，在这种情况下，物镜的物平面内任一对点的复相干度与充满聚光镜孔径的一个不相干光源所产生的相同；而且，它与聚光镜的象差无关. 显然，现在分辨率只依赖于入射到物上的光 (由这个因子表征) 的相干度以及显微镜物镜的特性. 因此，聚光镜的象差对显微镜的分辨率没有影响. 泽尼克[1)] 最早用一种不同的方式确定了这个重要结果，它表明人们广泛持有的一种观点，即认为高度地校正过的聚光镜有利于获得高分辨率，是不正确的.

为了估计聚光镜的大小对分辨率的影响，考虑物平面内两个

---

1) F. Zernike, *Physica*, **5** (1938), 794.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

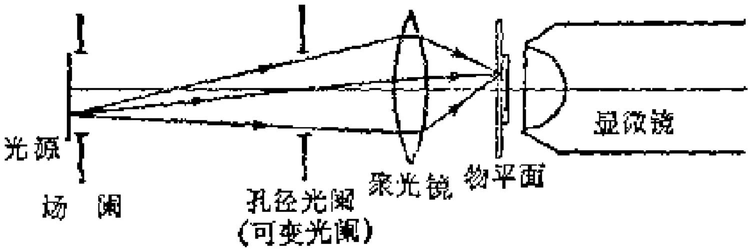


图 10.12 临界照明

针孔 $P_1(X_1, Y_1)$ 和 $P_2(X_2, Y_2)$. 根据同前面一样的假定,到达这两个针孔的光的复相干度由形如 (16) 式的公式给出:

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{2J_1(u_{12})}{u_{12}},$$

$$u_{12} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}\, n_c' \sin\theta_c', \tag{18}$$

式中 $n_c' \sin\theta_c'$ 是聚光镜在显微镜物镜一侧的数值孔径.

设 $P(X, Y)$ 是物平面内另外任一点, P' 是它由物镜所成的象. 如果假定物镜实际上无象差,则单独来自 P_1 的光在物镜的象平面内的强度分布是中心在其象 P_1' 处的爱里图样. 因此,如果 $n_0 \sin\theta_0$ 是物镜的数值孔径,则单独从 P_1 到达 P' 的光强度 $I^{(1)}(P')$, 除了一个常数因子以外,等于

$$I^{(1)}(P') = \left(\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right)^2,$$

$$v_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}\, n_0 \sin\theta_0. \tag{19a}$$

从针孔 P_2 到达 P' 的光强度 $I^{(2)}(P')$ 由类似的表达式给出:

$$I^{(2)}(P') = \left(\frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right)^2,$$

$$v_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}\, n_0 \sin\theta_0. \tag{19b}$$

由此得出,当通过聚光镜照明这两个针孔时,显微镜物镜的象平面内的强度 $I(P')$ 是由两个部分相干光束叠加引起的. 每个光束的强度由 (19) 式给出,而两个光束的复相干度由 (18) 式给出. 将这些式子代入 § 10.4(11) 式,即可得出 $I(P')$ 的表达式. 如果还

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

假定 P' 很靠近 P_1 和 P_2 的几何象(更精确地说，假定 $\delta = [P_1P'] - [P_2P'] \ll \bar{\lambda}$)，则有

$$I(P') = \left(\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right)^2 + 2\left(\frac{2J_1(mv_{12})}{mv_{12}}\right)\left(\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right)\left(\frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right), \qquad (20)$$

式中

$$m = \frac{n_c' \sin\theta_c'}{n_0 \sin\theta_0},$$

$$v_{12} = \frac{u_{12}}{m} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}\, n_0 \sin\theta_0. \qquad (21)$$

由 (20) 式可引出某些有趣的结论。当 mv_{12} 是方程 $J_1(mv_{12}) = 0$的非零根时，(20) 式的乘积项消失，并且化为

$$I(P') = \left(\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right)^2. \qquad (22)$$

这时，象平面内的强度分布就好象 P_1 和 P_2 被不相干照明一样。特别是，当 $m = 1$ 并且 v_{12} 是 $J_1(v_{12}) = 0$ 的非零根时，亦即两个数值孔径相等并且两个针孔的几何象分开的距离等于物镜的爱里图样任一暗环半径时，情况将是这样。

当聚光镜的数值孔径很小($m \to 0$)时，则 $2J_1(mv_{12})/mv_{12} \sim 1$，并且 (20) 式化为

$$I(P') = \left\{\frac{2J_1(v_1)}{v_1} + \frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right\}^2. \qquad (23)$$

这时，不管两个针孔的距离如何，强度分布与完全相干照明一样。

利用 (20) 式可研究显微镜物镜的象平面内强度分布对数值孔径的比率 m 的依赖关系。特别是，考虑 P_1' 和 P_2' 之间中点处的强度。当中点处的强度比 P_1' 和 P_2' 每一点处的强度都小 26.5% 时，就认为两个针孔恰能分辨。26.5% 的数值相当于不相干照明时圆孔的瑞利判据(参看 § 8.6.2)。我们用同不相干照明[§8.6(32)式]和相干照明[§ 8.6(55) 式]一样的形式来表示这一极限分辨距离$(P_1P_2)_{极限}$:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$(P_1P_2)_{\text{极限}} = L(m)\frac{\bar{\lambda}_0}{n_0\sin\theta_0}. \tag{24}$$

根据这个判据由 (20) 式计算得出的曲线 $L(m)$ 如图 10.13 所示.

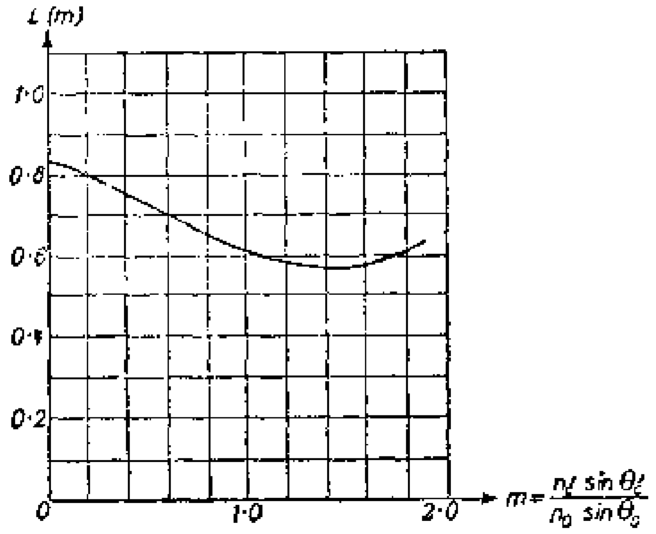


图 10.13 聚光镜孔径对两个等亮度针孔分辨率的影响
[引自 H. H. Hopkins and P. M. Barham, *Proc. Phys. Soc.*, **63** (1950), 72.]

可以看出, $m\sim1.5$ 即聚光镜的数值孔径约为物镜的数值孔径的 1.5 倍时,就得到最佳分辨率. 这时 L 的值略小于不相干照明时所得到的值 0.61.

(b) 柯勒照明

柯勒[1] 提出的照明方法如图 10.14 所示,其中会聚透镜靠近场阑, 并在聚光镜(含有聚光镜光阑)的焦平面内形成光源 σ 的象. 来自每一光源点的光线从聚光镜出射后成为平行光束. 这种装置的优点是光源亮度分布的不规则性不会引起视场照明强度的不规则性.

为了估计柯勒照明法所达到的分辨极限, 必须首先确定显微镜物镜的物平面内各对点的复相干度 μ. 设

1) A. Köhler, *Zs. f. wiss. Mikrosk.*, **10** (1893), 433; **16** (1899), 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$U(S, P_1) = A_1 e^{i\phi_1}, \quad U(S, P_2) = A_2 e^{i\phi_2} \tag{25}$$

是与 σ 相缔合的单色光源上一个光源点 S 在显微镜物镜的物平面 $P_1(X_1, Y_1)$ 点和 $P_2(X_2, Y_2)$ 点处的复扰动(参看 678 页)．显然，

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}[p(X_1 - X_2) + q(Y_1 - Y_2)], \tag{26}$$

式中 p 和 q 是从光源点 S 发出通过 P_1 和 P_2 的两条平行光线的头两个光线分量[1]．如果聚光镜系统有象差，这两条光线就不会严

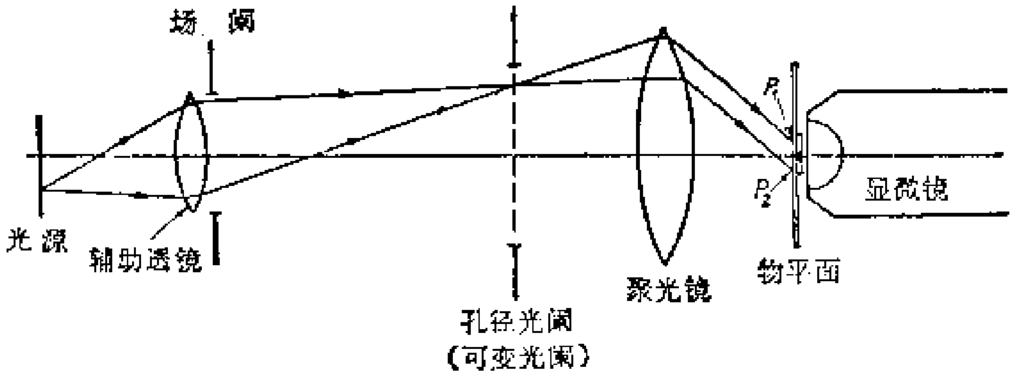


图 10.14　柯勒照明法

格平行，但因只考虑彼此靠得很近的点，这种影响可以忽略．将 (25) 和 (26) 式代入霍普金斯公式 § 10.4(35b)，得出

$$\left.\begin{aligned} &\mu(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}\int_\sigma A_1 A_2 e^{i\bar{k}_0[p(X_1-X_2)+q(Y_1-Y_2)]}dS, \\ &I(P_1) = \int_\sigma A_1^2 dS, \qquad I(P_2) = \int_\sigma A_2^2 dS. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

由于每一光源点 $S(\xi, \eta)$ 都对应一对光线分量 (p, q)，因此可将 σ 上的积分变换为入射到物上的光线所形成的立体角

$$p^2 + q^2 \leqslant n_c'^2 \sin^2\theta_c' \tag{28}$$

上的积分．这时，精确到高斯光学，关系式 $\xi = \xi(p, q)$ 和 $\eta = \eta(p, q)$ 都是线性的；事实上，由 § 4.3(10) 式不难看出，$\xi = fp$, $\eta = fq$，式中 f 是聚光镜系统的焦距．因此，该变换的雅科毕式 $\partial(\xi, \eta)/\partial(p, q)$ 是不变的．超出几何光学的范围，雅科

1) 参看上册 181 页．——译者注

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

毕式一般在该积分区域上是有变化的，但可假定这种变化比指数项的变化缓慢得多，因此可以忽略．如果又忽略 A_1 和 A_2 的缓慢变化，则(27)式化为

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{\iint_{\Omega} e^{ik_0[p(X_1-X_2)+q(Y_1-Y_2)]}dpdq}{\iint_{\Omega} dpdq}, \tag{29}$$

式中 Ω 表示积分区域(28)．计算(29)的值，得出

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{2J_1(u_{12})}{u_{12}},$$

$$u_{12} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}\, n_c' \sin\theta_c'. \tag{30}$$

这个公式与临界照明的公式(18)相同．因此，不论使用临界照明还是柯勒照明，入射到显微镜物平面上的光的复相干度相同．鉴于这一结果，通常把临界照明称为“不相干”的而把柯勒照明称为“相干”的，是有些不适宜的．由此得出，(20)式对这两种照明方式都成立，并且图 10.13 同样适用于这两种情况．

§ 10.5.3 用部分相干准单色照明成象[1)]

(a) 互强度通过光学系统的透射

§ 9.5 中叙述了研究扩展物成象的某些一般方法．已研究了完全相干照明(§ 9.5.1)和完全不相干照明(§ 9.5.2)的情况．在前一种情况中，考虑了复振幅通过系统的透射；在后一种情况中，考虑了强度通过系统的透射．现在将研究部分相干准单色照明的更普遍情况．在这种情况中适合于讨论的量是互强度．

使用同 § 9.5(1) 式中一样的标度归一化(赛德耳)坐标，因此，物点及其高斯象具有相同的坐标数值．设 $J_0(x_0, y_0; x_0', y_0')$ 是物平面内 (x_0, y_0) 点和 (x_0', y_0') 点的互强度．如果 $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 是系统的透射函数(§ 9.5.1)，则根据传播定律 § 10.4(47)式，象

1) 本节的考虑部分地根据下述研究成果：H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A. **217** (1953), 408 和 P. Dumontet, *Publ. Sci. Univ. d'Alger*, B, **1** (1955), 33.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

平面内的互强度为

$$J_1(x_1, y_1; x_1', y_1')$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') K(x_0, y_0; x_1, y_1) K^*(x_0', y_0'; x_1', y_1')$$

$$\times dx_0 dy_0 dx_0' dy_0'. \tag{31a}$$

积分只是在形式上遍及无穷域，因为对于物平面上所有那些没有光传播到象平面的各点，J_0 为零。

同§9.5中一样，假定物体是这样小，以致它形成系统的一个等晕区，即对于其中所有各点，都可以用一个只取决于差值 $x_1 - x_0$ 和 $y_1 - y_0$ 的函数 $K(x_1 - x_0, y - y_0)$ 很好地近似代替 $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$。因此(31a)式变为

$$J_1(x_1, y_1; x_1', y_1')$$

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$\times K^*(x_1' - x_0', y_1' - y_0') dx_0 dy_0 dx_0' dy_0'. \tag{31b}$$

把 J_0, J_1 和乘积 KK^* 表示为四维傅里叶积分的形式：

$$J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{J}_0(f, g; f', g') e^{-2\pi i(fx_0 + gy_0 + f'x_0' + g'y_0')}$$

$$\times df dg df' dg', \tag{32a}$$

$$J_1(x_1, y_1; x_1', y_1') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{J}_1(f, g; f', g') e^{-2\pi i(fx_1 + gy_1 + f'x_1' + g'y_1')}$$

$$\times df dg df' dg', \tag{32b}$$

$$K(x, y) K^*(x', y') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{M}(f, g; f', g') e^{-2\pi i(fx + gy + f'x' + g'y')}$$

$$\times df dg df' dg'. \tag{32c}$$

然后由傅里叶反演公式，

$$\mathscr{J}_0(f, g; f', g') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') e^{2\pi i(fx_0 + gy_0 + f'x_0' + g'y_0')}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\times dx_0 dy_0 dx_0' dy_0', \tag{33}$$

对于 $\mathscr{J}_1$ 和 $\mathscr{M}$ 也有严格类似的关系式.

对 (31b) 式应用卷积定理,得出

$$\mathscr{J}_1(f, g; f', g') = \mathscr{J}_0(f, g; f', g')\mathscr{M}(f, g; f', g'). \tag{34}$$

这个公式意味着，如果把物平面和象平面内的互强度表示为所有可能的空间频率(f, g, f', g')的四维空谱分量的叠加,则象内的每个分量只取决于物内的相应分量，并且这两个分量的比值等于 $\mathscr{M}$. 因此，在目前所作近似的精度范围内,光学系统对互强度的作用与一个四维线性滤波器的作用等效. $\mathscr{M}$ 称为部分相干准单色照明的频率响应函数.

频率响应函数 $\mathscr{M}$ 与系统的光瞳函数的关系很简单. 如果同§ 9.5(10c) 式一样,把K 表示为二维傅里叶积分的形式,

$$K(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(f, g)e^{-2\pi i(fx+gy)}df dg, \tag{35}$$

并将K代入 (32c) 的反演公式,则得出

$$\mathscr{M}(f, g; f', g') = \mathscr{K}(f, g)\mathscr{K}^*(-f', -g'). \tag{36}$$

但根据 § 9.5(13) 式，$\mathscr{K}(f, g)$ 等于系统光瞳函数 $G(\xi, \eta)$ 在高斯参考球(半径为 R)上

$$\xi = \lambda Rf, \quad \eta = \lambda Rg \tag{37}$$

点处的值. 因此,对于部分相干的准单色照明,频率响应函数与系统光瞳函数之间的关系式为

$$\mathscr{M}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}; \frac{\xi'}{\lambda R}, \frac{\eta'}{\lambda R}\right) = G(\xi, \eta)G^*(-\xi', -\eta'). \tag{38}$$

因为在出射光瞳面积以外各点处，光瞳函数为零，由此得出，高于一定值的频率所具有的谱分量是不透过的. 如果出射光瞳是半径为 a 的圆,则当 $\xi^2 + \eta^2 > a^2$ 或 $\xi'^2 + \eta'^2 > a^2$ 时，$G(\xi, \eta) \times G^*(-\xi', -\eta')$ 为零. 因此,当

$$f^2 + g^2 > \left(\frac{a}{\lambda R}\right)^2 \text{或} \ f'^2 + g'^2 > \left(\frac{a}{\lambda R}\right) \tag{39}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，属于频率 (f, g, f', g') 的互强度谱分量是不透过的[1]. 上式中 $\bar{\lambda}$ 表示象空间内的平均波长.

表 24 从光学系统对空间频率响应的观点看光学系统的作用(假定是等晕物区)

照明	基本量	从物到象的变换	频率响应函数
相干	复扰动 $U(x, y)$	$\mathscr{U}_1(f,g) = \mathscr{U}_0(f,g)\mathscr{K}(f,g)$	$\mathscr{K}(f, g)$
不相干	强　度 $I(x, y)$	$\mathscr{I}_1(f,g) = \mathscr{I}_0(f,g)\mathscr{L}(f,g)$	$\mathscr{L}(f, g) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(f'+f, g'+g) \times \mathscr{K}^*(f', g')df'dg'$
部分相干	互强度 $J(x,y;x',y')$	$\mathscr{J}_1(f,g;f',g') = \mathscr{J}_0(f,g;f',g') \times \mathscr{M}(f,g;f',g')$	$\mathscr{M}(f,g;f',g') = \mathscr{K}(f,g)\mathscr{K}^*(-f',-g')$

$\mathscr{K}(f, g)$ 是系统透射函数 $K(x, y)$ 的傅里叶逆变换，它与光瞳函数 $G(\xi, \eta)$ 的关系式为 $\mathscr{K}(\xi/\bar{\lambda}R, \eta/\bar{\lambda}R) = G(\xi, \eta)$，式中 R 是高斯参考球半径，$\bar{\lambda}$ 是象空间内的平均波长.

表 24 中列出了关于部分相干照明成象的基本公式，以及 § 9.5 中关于相干照明和不相干照明的相应公式. 关于不相干照明的公式，可由一般公式 (34)，(36) 和 (38)，通过假定 J_0 具有 $J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') = I_0(x_0, y_0)\delta(x_0' - x_0)\delta(y_0' - y_0)$的形式导出，式中 δ 是狄喇克 δ 函数(见附录 4). 计算不难，但有点冗长，这里从略.关于完全单色(从而完全相干)照明的特殊情况的公式，注意到在这种情况下互强度具有 $J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') = U_0(x_0, y_0)U_0^*(x_0', y_0')$ 的形式，就更为容易一些导出. 这时 J_0 的傅里叶变换 $\mathscr{J}_0$ 同样分为两个因子的乘积，应用 (34) 和 (36) 式得知，复扰动 U_0 的每一个谱分量都透过系统，与表 24 第一行列出的公式一致.

(b) 透照物的象

设有一透明或半透明物体占有物平面的一部分，该物体被部

---

1) 如果系统的角孔径很小，并遵从正弦条件，则同 § 9.5 638 页中一样，有 $a/\bar{\lambda}R \sim n_0\sin\theta_0/M\bar{\lambda}_0$，式中 $n_0\sin\theta_0$ 是系统的数值孔径，M 是高斯放大率，$\bar{\lambda}_0$ 是真空中平均波长.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

分相干的准单色光照明。假定这些光从一个初级光源发出，通过某一照明系统（聚光镜）后到达物平面。

同 § 8.6.1 中一样，用适当的透射函数 $F_0(x_0, y_0)$ 来描述该物体。如果 $U_0^-(S; x_0, y_0)$ 代表相缔合的单色光源上一个光源点 S 在物平面 (x_0, y_0) 点处引起的扰动(参看 678 页)，则由这个光源点发出并通过物后的扰动为

$$U_0(S; x_0, y_0) = U_0^-(S; x_0, y_0)F(x_0, y_0). \tag{40}$$

现在根据 § 10.4(35a) 式，入射到物上的光的互强度为

$$J_0^-(x_0, y_0; x_0', y_0') = \int_\sigma U_0^-(S; x_0, y_0)U_0^{-*}(S; x_0', y_0')dS, \tag{41a}$$

由物出射的光的互强度为

$$J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') = \int_\sigma U_0(S; x_0, y_0)U_0^*(S; x_0', y_0')dS, \tag{41b}$$

因此，由于 (40) 式，得出

$$J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') = F(x_0, y_0)F^*(x_0', y_0')J_0^-(x_0, y_0; x_0', y_0'). \tag{42}$$

我们将限于注意下述重要情形：此时入射光的互强度 J_0^- 只通过差值 $x_0 - x_0'$, $y_0 - y_0'$ 的形式依赖于四个坐标 x_0, y_0, x_0', y_0'，即此时 J_0^- 具有下述形式：

$$J_0^-(x_0, y_0; x_0', y_0') = J_0^-(x_0 - x_0', y_0 - y_0'). \tag{43}$$

我们在 § 10.5.2 中得知，临界照明和柯勒照明这两种情况就是这样。保留以前的假定，即物体是这样小，以致它形成系统的一个等晕区。于是由 (31b) 式得出，象平面内的强度 $I_1(x_1, y_1) = J_1(x_1, y_1; x_1, y_1)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned} I_1(x_1, y_1) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} & J_0^-(x_0 - x_0', y_0 - y_0')F(x_0, y_0)F^*(x_0', y_0') \\ & \times K(x_1 - x_0, y_1 - y_0)K^*(x_1 - x_0', y_1 - y_0') \\ & \times dx_0 dy_0 dx_0' dy_0'. \end{aligned} \tag{44}$$

将 F 和 J_0^- 表示为二维傅里叶积分的形式，

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f, g)e^{-2\pi i(fx+gy)}df dg, \tag{45a}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$J_0^-(x,y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{J}_0^-(f,g)e^{-2\pi i(fx+gy)}df\,dg. \qquad (45b)$$

如果把(45a)式的 F 及相应的 F^* 代入(44)式，利用恒等式 $f'x_0-f''x_0'=(f'-f'')x_1-f'(x_1-x_0)+f''(x_1-x_0')$ 及含 g 和 y 的类似恒等式，并引入新的积分变量 $u'=x_1-x_0$，$u''=x_1-x_0'$，则得出 I_1 的下述表达式：

$$I_1(x_1,y_1)=\iiiint_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{T}(f',g';f'',g'')\mathscr{F}(f',g')\mathscr{F}^*(f'',g'')$$
$$\times e^{-2\pi i[(f'-f'')x_1+(g'-g'')y_1]}df'dg'df''dg'', \qquad (46)$$

式中

$$\mathscr{T}(f',g';f'',g'')$$
$$=\iiiint_{-\infty}^{+\infty}J_0^-(u''-u',v''-v')K(u',v')K^*(u'',v'')$$
$$\times e^{2\pi i[(f'u'+g'v')-(f''u''+g''v'')]}du'dv'du''dv''$$
$$=\iiiiiint_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{J}_0^-(f,g)K(u',v')K^*(u'',v'')$$
$$\times e^{2\pi i[(f+f')u'+(g+g')v'-(f+f'')u''-(g+g'')v'']}df\,dg\,du'dv'du''dv''$$
$$=\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{J}_0^-(f,g)\mathscr{K}(f+f',g+g')\mathscr{K}^*(f+f'',g+g'')df\,dg.$$

(47)

在(47)式中，从第二、三行过渡到第四、五行时已用(45b)式代替 J_0^-，从第三行过渡到第六行时已用了(35)式的逆变换。

我们看到，在(46)式中，物的影响（用 $\mathscr{F}$ 表征）同照明($\mathscr{J}_0^-$)与系统($\mathscr{K}$)的联合效应是分开的。采用均匀照明($I_0^-=$常数)时，从物出射的光强度将与 $|F|^2$ 成正比，假如是理想成象，则象平面内的强度由下式给出（除了一个常数因子以外）：

$$\tilde{I}_1(x_1,y_1)=F(x_1,y_1)F^*(x_1,y_1)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f', g')\mathscr{F}^*(f'', g'')$$

$$\times e^{-2\pi i[(f'-f'')x_1+(g'-g'')y_1]}df'dg'df''dg''. \quad (48)$$

(46)和(48)式分别把真实强度 I_1 和理想强度 $\tilde{I}_1$ 表示为物的空间频谱中所有各对频率 (f', g') 和 (f'', g'') 的贡献之和. 前者的每一贡献是后者的 $\mathscr{T}$ 倍,由此得出,如果对于谱分量 $\mathscr{F}(f', g')$ 和 $\mathscr{F}(f'', g'')$ 两者都不为零的所有 f', g', f'', g'' 值,$\mathscr{T}$ 不是常数,则关于物的某些信息就会丢失或出差错. 函数 $\mathscr{T}$ 称为采用给定的透过照明时系统的**透射交叉系数**.

现在考虑强度的空间频谱 $\mathscr{I}(f, g)$,而不是强度本身. 为了导出适当的公式,用 $e^{2\pi i(fx_1+gy_1)}$ 乘(46)式两边,并对 x_1 和 y_1 积分. 然后用傅里叶积分定理,(或更简短些,用狄喇克 δ 函数的傅里叶积分表示,见附录 4),就得出

$$\mathscr{I}_1(f, g) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{T}(f'+f, g'+g, f', g')\mathscr{F}(f'+f, g'+g)$$

$$\times \mathscr{F}^*(f', g')df'dg'. \quad (49)$$

对于(48)式所代表的理想情况,则有

$$\tilde{\mathscr{I}}_1(f, g) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f'+f, g'+g)\mathscr{F}^*(f', g')df'dg'. \quad (50)$$

这两个公式把 $\mathscr{I}_1$ 和 $\tilde{\mathscr{I}}_1$ 表示为物结构的每个空间频率 (f', g') 的贡献之和. 可以看出 $\mathscr{T}$ 起着同前面类似的作用. 它表征由于物体的照明方式和成象系统的透射特性而在每一贡献中引起的变化.

因为点 $\xi = \bar{\lambda}Rf$, $\eta = \bar{\lambda}Rg$ 位于出射光瞳面积之外时,响应函数 $\mathscr{K}(f, g)$ 为零;由(47)式得出,对于足够高的频率,$\mathscr{T}$ 为零. 如果出射光瞳是半径为 a 的圆,则只有当 f, g 平面内,中心各在 $O'(-f', -g')$ 和 $O''(-f'', -g'')$ 点而半径均为 $\sqrt{f^2+g^2} = a/\bar{\lambda}R$ 的两个圆 C' 和 C'' 具有公共区域时(图 10.15),

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

乘积 $\mathscr{K}(f+f',g+g')\mathscr{K}^*(f+f'',g+g'')$ 以及 $\mathscr{T}(f',g';f'',g'')$ 才能不为零. 为了说明照明的影响,假定是临界照明或柯勒照明,并且聚光镜系统的数值孔径 $n'_c\sin\theta'_c$ 是物的成象系统的数值孔径 $n_0\sin\theta_0$ 的 m 倍. 因此,根据(18)或(30)式,照明光束的互强度为

$$J_0^-(x_0-x'_0,\ y_0-y'_0)=\left(\frac{2J_1(mv)}{mv}\right)I_0^-,\tag{51}$$

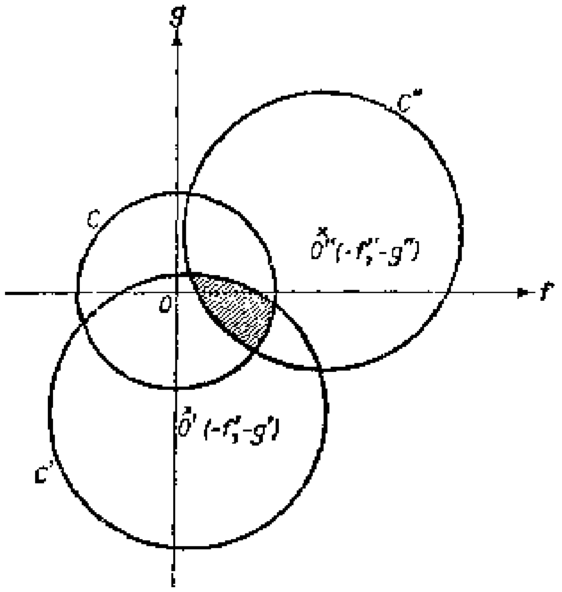


图 10.15 具有半径为 a 的圆形出射光瞳成象系统的透射交叉系数 $\mathscr{T}(f',g';f'',g'')$ 的有效积分区域(用阴影线表示). 假定用平均波长为 $\bar{\lambda}_0$ 的准单色光通过数值孔径为 $mn_0\sin\theta_0$ 的聚光镜透过照明物体, 其中 $n_0\sin\theta_0$ 是成象系统的数值孔径. C' 和 C'' 分别是中心在 $O'(-f',-g')$ 和 $O''(-f'',-g'')$ 点处而半径为 $a/\bar{\lambda}R\sim n_0\sin\theta_0/M\bar{\lambda}_0$ 的圆. C 是中心在原点处而半径为 $mn_0\sin\theta_0/\bar{\lambda}_0$ 的圆(R = 高斯参考球半径, M = 高斯放大率)

式中

$$v=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}\sqrt{(x'_0-x_0)^2+(y'_0-y_0)^2}\,n_0\sin\theta_0,\tag{52}$$

I_0^- 是(假定均匀的)入射光强度. 这时(51)式右边的函数是下述函数的傅里叶变换(参看§8.5.2):

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{I}_0^-(f,g) &= \text{常数} = \left(\frac{\bar{\lambda}_0^2}{\pi m^2 n_0^2 \sin^2\theta_0}\right) I_0^-, \\
&\qquad \text{当 } f^2+g^2 < \frac{m^2 n_0^2 \sin^2\theta_0}{\bar{\lambda}_0^2} \text{ 时}, \\
&= 0, \quad \text{当 } f^2+g^2 > \frac{m^2 n_0^2 \sin^2\theta_0}{\bar{\lambda}_0^2} \text{ 时}.
\end{aligned}\right\} \tag{53}
$$

图 10.15 中，在 C 所表示的圆外，$\mathscr{I}_0^-$ 为零，由此得出，对于给定的 (f',g') 和 (f'',g'') 只有位于 f,g 平面上三个圆 C, C' 和 C'' 的公共面积(用阴影线表示)内的那些点，才对 $\mathscr{T}$ 的积分 (47) 式有贡献.

§10.6 关于互相干的一些定理

§10.4 和 §10.5 中，我们讨论了准单色光的干涉和衍射，并限于时间延迟 τ 比光的相干时间小得多的情况. 已经知道，作为良好的近似，相关函数仅通过一个简谐项的形式依赖于 τ，即它们具有下述形式:

$$
\Gamma(P_1, P_2, \tau) \sim J(P_1, P_2) e^{-2\pi i \bar{\nu}\tau},
$$
$$
\gamma(P_1, P_2, \tau) \sim \mu(P_1, P_2) e^{-2\pi i \bar{\nu}\tau}.
$$

采用这种近似的初等理论，对考虑由于光源有限广延性而引起的图样"中央"处 $(\tau=0)$ 可见度的降低是适合的. 然而，它没有考虑可见度随着程差增大而引起的变化. 为了适合于描述时间延迟 τ 与相干时间相比不可忽略的情况，必须使用相关函数的更加精确的表达式. 现在讨论上述某些公式的适当推广.

§10.6.1 来自不相干光源光的互相干的计算

设 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 是扩展的(不一定是准单色的)初级光源 σ 产生的波场中 P_1 点和 P_2 点处的扰动. 首先假定 σ 与 P_1 和 P_2 点之间的媒质是均匀的.

同 §10.4.2 中一样，设想把光源分为中心在 S_1, S_2, $\cdots$ 各点

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附近的面元 $d\sigma_1, d\sigma_2, \cdots$，其线度比实际波长小得多. 如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 是面元 $d\sigma_m$ 对 V_1 和 V_2 的贡献，则

$$V_1(t)=\sum_m V_{m1}(t),\qquad V_2(t)=\sum_m V_{m2}(t),\tag{1}$$

而互相干函数由下式给出：

$$\begin{aligned}\Gamma(P_1,P_2,\tau)&=\langle V_1(t+\tau)V_2^*(t)\rangle\\&=\sum_m\langle V_{m1}(t+\tau)V_{m2}^*(t)\rangle.\end{aligned}\tag{2}$$

(2) 式右边已略去 $\langle V_{m1}(t+\tau)V_{n2}^*(t)\rangle(m\neq n)$ 类型的项，这是因为来自光源不同面元的贡献可假定是互不相干的.

现在的处理与 § 10.4 稍有不同. 根据 § 10.3(30) 式，(2) 式中求和号内每一项都可表示为下述形式：

$$\langle V_{m1}(t+\tau)V_{m2}^*(t)\rangle=4\int_0^\infty G_m(P_1,P_2,\nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu,\tag{3}$$

式中

$$G_m(P_1,P_2,\nu)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{\overline{v_{mT}(P_1\nu)v_{mT}^*(P_2,\nu)}}{2T}\right]\tag{4}$$

是扰动 $V_{m1}=V_m(P_1,t)$，$V_{m2}=V_m(P_2,t)$ 的互谱密度. 现在 v_m 表示适当的频率对来自面元 $d\sigma_m$ 的扰动所作的贡献，并且由于假定媒质是均匀的，此贡献以球面波的形式传播. 因此

$$v_{mT}(P_1,\nu)=a_{mT}(\nu)\frac{e^{ikR_{m1}}}{R_{m1}},\quad v_{mT}(P_2,\nu)=a_{mT}(\nu)\frac{e^{ikR_{m2}}}{R_{m2}},\tag{5}$$

式中 R_{m1} 和 R_{m2}（假定比实际波长大得多）表示光源点 S_m 到 P_1 和 P_2 的距离，$k=2\pi\nu/v=2\pi/\lambda$. $a_m(\nu)$ 的振幅 $|a_m(\nu)|$ 表示来自面元 $d\sigma_m$ 的频率 ν 的分量强度，$\arg a_m(\nu)$ 表示它的位相. 由 (4) 和(5)式得出，

$$G_m(P_1,P_2,\nu)=\left(\lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|a_{mT}(\nu)|^2}}{2T}\right)\frac{e^{ik(R_{m1}-R_{m2})}}{R_{m1}R_{m2}}.\tag{6}$$

右边大括弧内的项表示来自光源面元 $d\sigma_m$ 的光的频谱密度. 同 § 10.4.2 中一样，假定光源面元的数目如此之大，以致可以把光源

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当作实际上连续的来处理。因此，如果 $I(S_m, \nu)d\sigma_m d\nu = \lim_{T\to\infty} \times \left[\frac{\overline{|a_{mT}(\nu)|^2}}{2T}\right] d\nu$，即如果 $I(S, \nu)$ 表示单位频率范围内单位光源面积上的强度，则根据 (2)，(3) 和 (6) 式，有

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\,\gamma(P_1, P_2, \tau)$$
$$= \int_0^\infty d\nu e^{-2\pi i\nu\tau} \int_\sigma I(S, \nu) \frac{e^{ik(R_1-R_2)}}{R_1 R_2} dS, \qquad (7)$$

式中

$$I(P_1) = \Gamma(P_1, P_1, 0) = \int_0^\infty d\nu \int_\sigma \frac{I(S, \nu)}{R_1^2} dS,$$
$$I(P_2) = \Gamma(P_2, P_2, 0) = \int_0^\infty d\nu \int_\sigma \frac{I(S, \nu)}{R_2^2} dS, \qquad (8)$$

是 P_1 和 P_2 处的强度，R_1 和 R_2 是光源点 S 到这两点的距离。(7) 式是 § 10.4 中范西特-泽尼克公式 (20)，(21) 的推广。

如果光源与 P_1 和 P_2 点之间的媒质不是均匀的，可仿照 § 10.4 处理。我们只须用 $icK(S, P_j, \nu)/\nu$ 代替因子 e^{ikR_j}/R_j，其中 K 是适当的媒质透射函数。于是代替 (7) 式，得出

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\,\gamma(P_1, P_2, \tau)$$
$$= c^2 \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^2} e^{-2\pi i\nu\tau}$$
$$\times \int_\sigma I(S, \nu) K(S, P_1, \nu) K^*(S, P_2, \nu) dS, \qquad (9)$$

式中

$$I(P_1) = c^2 \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^2} \int_\sigma I(S, \nu) |K(S, P_1, \nu)|^2 dS,$$
$$I(P_2) = c^2 \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^2} \int_\sigma I(S, \nu) |K(S, P_2, \nu)|^2 dS. \qquad (10)$$

从 § 10.4 类推，将 (9) 或 (10) 式改写成稍有不同的形式。令

$$\frac{ic}{\nu} K(S, P_1, \nu)\sqrt{I(S, \nu)} = U(S, P_1, \nu),$$
$$\frac{ic}{\nu} K(S, P_2, \nu)\sqrt{I(S, \nu)} = U(S, P_2, \nu). \qquad (11)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

则(9)和(10)式变为

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\,\gamma(P_1, P_2, \tau)$$
$$= \int_0^\infty d\nu\, e^{-2\pi i\nu\tau}\int_\sigma U(S, P_1, \nu)U^*(S, P_2, \nu)dS, \quad (12)$$

式中

$$I(P_1) = \int_0^\infty d\nu\int_\sigma |U(S, P_1, \nu)|^2 dS,$$
$$I(P_2) = \int_0^\infty d\nu\int_\sigma |U(S, P_2, \nu)|^2 dS. \quad (13)$$

公式(12)是 §10.4 中霍普金斯公式(35)的推广，它利用相缔合的虚光源引起的光分布表示互相干函数和复相干度。这是因为根据(11)式，$U(S, P, \nu)$ 可看作位于 S 处具有频率 ν，位相为零而强度正比于 $\sqrt{I(S, \nu)}$ 的单色点光源在 P 处引起的扰动。

§10.6.2 互相干的传播

同§10.4.4 中一样，设 $\mathscr{A}$ 是与扩展初级光源 σ 发出的光束相截的虚曲面(图 10.8)。我们将说明如何从 $\mathscr{A}$ 上所有各对点的互相干的知识确定来自 $\mathscr{A}$ 的光照明的其他任一曲面 $\mathscr{B}$ 上的互相干值。为了简单起见，假定 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 之间的媒质折射率等于 1。

$\mathscr{B}$ 上任何两点 Q_1 和 Q_2 的互相干可用(12)式计算。在该公式中，U 代表单色扰动，因此，它可利用惠更斯-菲涅耳原理由曲面 $\mathscr{A}$ 所有各点处的扰动来确定：

$$U(S, Q_1, \nu) = \int_{\mathscr{A}} U(S, P_1, \nu)\frac{e^{ik_0 s_1}}{s_1}\Lambda_1 dP_1. \quad (14)$$

式中 s_1 表示 $\mathscr{A}$ 上代表点 P_1 与 Q_1 点之间的距离，Λ_1 是通常的倾斜因子。$U(S, Q_2, \nu)$ 也有严格类似的公式。如果将这些公式代入(12)式中，改变积分次序后就得到互相干的下述表达式：

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}}\frac{dP_1 dP_2}{s_1 s_2}$$
$$\times\int_0^\infty J(P_1, P_2, \nu)\Lambda_1(\nu)\Lambda_2^*(\nu)\,e^{-2\pi i\nu\left[\tau-\frac{s_1-s_2}{c}\right]}d\nu, \quad (15)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$J(P_1, P_2, \nu) = \int_{\sigma} U(S, P_1, \nu)U^*(S, P_2, \nu)dS. \qquad (16)$$

(15)式中重复积分的意思是 P_1 点和 P_2 点彼此独立地在曲面 $\mathscr{A}$ 上取值. 这时倾斜因子 $\Lambda_1(\nu)$ 和 $\Lambda_2(\nu)$ 通过乘积因子 ν 而依赖于频率，它随着 ν 的变化比其他各项缓慢. 如果光的有效光谱范围足够小，则可用 $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1(\bar{\nu})$, $\bar{\Lambda}_2 = \Lambda_2(\bar{\nu})$ 代替倾斜因子，其中 $\bar{\nu}$ 表示光的平均频率. 根据(12)式，对 ν 的积分的其余部分正好是 $\Gamma(P_1, P_2, \tau - (s_1 - s_2)/c)$. 因此最后得出公式：

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} \frac{\Gamma\left(P_1, P_2, \tau - \frac{s_1 - s_2}{c}\right)}{s_1 s_2} \bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2^* dP_1 dP_2. \qquad (17)$$

这就是所要求的利用曲面 $\mathscr{A}$ 上所有各对点处的互强度来表示曲面 $\mathscr{B}$ 上 Q_1 点和 Q_2 点处的互相干函数的公式.

特别感兴趣的是 Q_1 和 Q_2 两点重合而 $\tau = 0$ 时的情况. 用 Q 表示该点，(17)式左边化为强度 $I(Q)$. 如果在(17)式右边也用强度和相关因子 γ 来代替 Γ，则(17)式化为

$$I(Q) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} \frac{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}{s_1 s_2} \times \gamma\left(P_1, P_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right) \bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2^* dP_1 dP_2. \qquad (18)$$

这个公式把任意点 Q 处的强度表示为任意曲面 $\mathscr{A}$ 所有各对面元的贡献之和. 每一贡献与这两个面元处强度的几何平均值成正比，而与 Q 到这两个面元的距离的乘积成反比，并用适当的相关因子 γ 的值作权重.

(17)和(18)式由沃耳夫导出，它们分别是泽尼克传播定律[§ 10.4(45)式]和部分相干波场中强度公式 § 10.4(46)的推广.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§10.7 部分相干性的严格理论[1)]

§10.7.1 互相干波动方程

前几节导出的关于相关函数的一些定理，在某些方面与关于复扰动本身的定理相类似. 例如，扩展的准单色初级光源所照明的平面内复相干度的范西特-泽尼克公式§10.4(21)，看来与具有光源同样大小和形状的一个开孔衍射所引起的衍射图样内复扰动的公式一样. 另外的例子是，互强度的传播定律[§10.4(45)式]看来类似于惠更斯-菲涅耳原理. 现在，关于复扰动的这些结果可看成某些严格定理即亥姆霍兹和基尔霍夫公式[§8.3(7)，(13)式]的近似推论，而这些严格定理是光扰动作为波传播这一事实的必然结果. 这种相似性提醒我们，相关性也象波一样传播，而上述定理是亥姆霍兹-基尔霍夫类型的某些相应定理的近似公式. 不难证明事实上就是这样.

现在考虑真空中的平稳波场，设 $V(P_1, t)$ 和 $V(P_2, t)$ 分别代表 P_1 点和 P_2 点处的扰动. 一开始就把互相干函数表示为更对称的形式会带来方便，即

$$\begin{aligned}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) &= \langle V(P_1, t_1 + t)V^*(P_2, t_2 + t)\rangle \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t + t_1)V_T^*(P_2, t + t_2)dt. \qquad (1)\end{aligned}$$

进一步令

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \qquad (2)$$

是对 P_1 的笛卡儿直角坐标的拉普拉斯算符. 将此算符用于(1)式，并互换不同运算的次序，得出

$$\begin{aligned}\nabla_1^2\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty}\{[\nabla_1^2 V_T(P_1, t + t_1)]V_T^*(P_2, t + t_2)\}dt. \qquad (3)\end{aligned}$$

---

1) 本节分析的主要部分是根据 E. Wolf 的研究结果，*Proc. Roy. Soc.*, A, **230** (1955), 246; 和 *Proc. Phys. Soc.*, **71** (1958), 257.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现在，V_T 的实部 $V_T^{(r)}$ 代表真实的物理波场（例如电矢量波的一个笛卡儿分量），因此它满足波动方程

$$\nabla_1^2 V_T^{(r)}(P_1, t+t_1) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} V_T^{(r)}(P_1, t+t_1). \qquad (4a)$$

V_T 的虚部 $V_T^{(i)}$ 以及 V_T 本身也满足波动方程；对(4a)式两边作希耳伯特变换，并利用下述事实：如果两个函数彼此互为希耳伯特变换，则它们的微商也互为希耳伯特变换，就立即得出上述结果．因此[1]

$$\nabla_1^2 V_T(P_1, t+t_1) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} V_T(P_1, t+t_1). \qquad (4b)$$

由此得出，可在(3)式右边用 $\partial^2/c^2\partial t_1^2$ 代替 ∇_1^2，再次互换运算次序后，得出

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} \times \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t+t_1)V_T^*(P_2, t+t_2)dt,$$

即

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}. \qquad (5a)$$

用严格类似的方法，还得出

$$\nabla_2^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)}{\partial t_2^2}, \qquad (5b)$$

式中 ∇_2^2 是对 P_2 点坐标的拉普拉斯算符．

现在，对于平稳场，Γ 只通过差值 $t_1 - t_2 = \tau$ 依赖于 t_1 和 t_2，因此可象以前一样写出 $\Gamma(P_1, P, t_1, t_2) = \Gamma(P_1, P_2, \tau)$．于是 $\partial^2/\partial t_1^2 = \partial^2/\partial t_2^2 = \partial^2/\partial \tau^2$，由(5)式得出：

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau)}{\partial \tau^2}, \qquad (6a)$$

---

1) 可指出另一种证明如下：因 $V_T^{(r)}$ 满足波动方程，所以它的每个频谱分量 $v_T(\nu)(-\infty \leqslant \nu \leqslant \infty)$ 都满足亥姆霍兹方程．现根据§10.2(18b)式，$V_T = V_T^{(r)} + iV_T^{(i)}$ 的频谱是 $2v_T(\nu)$ 或零，随 $\nu \gtrless 0$ 而定．因此 V_T 的每个频谱分量也满足亥姆霍兹方程，结果 V_T 就满足波动方程．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\nabla_2^2\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma(P_1, P_2, \tau)}{\partial\tau^2}. \tag{6b}$$

可以看出，真空中互相干遵从两个波动方程[1]。每一个方程描述其中一点（P_2 或 P_1）固定而另一点和参量 τ 改变时互相干的变化。现在 τ 代表两个时刻之差，这里考虑的是两点各处于这两个时刻的相关，在所有实验里，τ 只以 $c\tau = \Delta\mathscr{S}$ 这样的组合形式即作为程差而出现。因此，时间本身实际上已从我们对场的最终描述中消去了。这是部分相干性理论中特别引人注目的特点，因为在光波场中真正的时间变量是完全无法探测的。这一理论的核心即互相干函数 $\Gamma(P_1, P_2, \tau)$ 是可以直接测量的，例如利用 § 10.3 和 § 10.4 中描述过的干涉实验作测量。

§ 10.7.2 互相干传播定律的严格表述

仍考虑真空中的平稳波场。设 Q_1 和 Q_2 是场中任意两点，$\mathscr{A}$ 是围绕这两点的任一虚构曲面。如果 ∇_1^2 表示对 Q_1 坐标的拉普拉斯算符，则根据(5a)式，有

$$\nabla_1^2\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}. \tag{7}$$

由此得出，对 Γ 可应用 § 8.3 的基尔霍夫积分公式 (13)。因此，$\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)$ 可用 $[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1$ 的值来表示，其中 P_1 取 $\mathscr{A}$ 上所有的位置，$[\cdots]_1$ 表示相对于第一个时间自变量的推迟，即

$$[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1 = \Gamma\left(P_1, Q_2, t_1 - \frac{s_1}{c}, t_2\right), \tag{8}$$

s_1 是 P_1 和 Q_1 之间的距离(图 10.16)。将其明显地写出来，则基尔霍夫公式给出

---

1) 当 τ 比相干时间小得多时，根据 § 10.4(10) 式，有 $\Gamma(P_1, P_2, \tau) \sim J(P_1, P_2) \times e^{-2\pi i\bar{\nu}\tau}$。由(6)式得出，在准单色理论有效范围内，真空中的互强度 J_{12} 在良好近似的程度上遵从亥姆霍兹方程
$\nabla_1^2 J(P_1, P_2) + \bar{k}^2 J(P_1, P_2) = 0, \qquad \nabla_2^2 J(P_1, P_2) + \bar{k}^2 J(P_1, P_2) = 0.$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathscr{A}}\Big\{f_1[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1$$

$$+ g_1\left[\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)\right]_1 + h_1\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)\right]_1\Big\}dP_1. \tag{9}$$

式中 $\partial/\partial n_1$ 表示在 P_1 处沿 $\mathscr{A}$ 的内法线方向求微商,以及

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{s_1}\right),\quad g_1 = -\frac{1}{cs_1}\frac{\partial s_1}{\partial n_1},\quad h_1 = -\frac{1}{s_1}. \tag{10}$$

现在根据(5b)式,还有

$$\nabla_2^2\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)}{\partial t_2^2}, \tag{11}$$

式中 ∇_2^2 是对 Q_2 坐标的拉普拉斯算符. 因此,(9)式右边出现的 $\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)$ 可以表示为含有 $[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2$ 值的基尔霍夫积分的形式,其中 P_2 取 $\mathscr{A}$ 上所有可能的位置,$[\cdots]_2$ 表示相对于第二个时间自变量的推迟,例如

$$[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2 = \Gamma\left(P_1, P_2, t_1, t_2 - \frac{s_2}{c}\right), \tag{12}$$

s_2 是 P_2 和 Q_2 之间的距离. 明显地写出来,相应的公式为

$$\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathscr{A}}\Big\{f_2[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2$$

$$+ g_2\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2 + h_2\left[\frac{\partial}{\partial n_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2\Big\}dP_2. \tag{13}$$

式中 $\partial/\partial n_2$ 表示在 P_2 处沿内法线方向求微商,f_2, g_2, h_2 与(10)式中的量相同,但下标 1 要换成 2. 然后将(13)式对 t_1 和 n_1 求微商,得出

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathscr{A}}\Big\{f_2\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2$$

$$+ g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2$$

$$+ h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial n_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2\Big\}dP_2, \tag{14}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathscr{A}}\left\{f_2\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2\right.$$

$$+g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial t_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2$$

$$\left.+h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2\right\}dP_2. \qquad (15)$$

现在将(13)，(14)和(15)式代入(9)式，就得到 $\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)$ 的下述表达式:

$$\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}}\left\{f_1f_2[\Gamma]_{1,2}+f_1g_2\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\Gamma\right]_{1,2}\right.$$

$$+f_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial n_2}\Gamma\right]_{1,2}+g_1f_2\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma\right]_{1,2}+g_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\Gamma\right]_{1,2}$$

$$+g_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial n_2}\Gamma\right]_{1,2}+h_1f_2\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma\right]_{1,2}+h_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial t_2}\Gamma\right]_{1,2}$$

$$\left.+h_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}\Gamma\right]_{1,2}\right\}dP_1dP_2, \qquad (16)$$

式中右边 Γ 的前两个自变量是 P_1 和 P_2，$[\cdots]_{1,2}$ 表示相对于两个时间自变量的推迟，例如

$$[\Gamma]_{1,2}=\Gamma\left(P_1, P_2, t_1-\frac{s_1}{c}, t_2-\frac{s_2}{c}\right). \qquad (17)$$

最后，利用平稳性的假定，它保证 Γ 只通过两个时间自变量的差值依赖于此二者. 同前，写出 $\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)=\Gamma(P_1, P_2, \tau)$，$\tau=t_1-t_2$. 因此 $\partial/\partial t_1=-\partial/\partial t_2=\partial/\partial\tau$，(16)式变为[1]

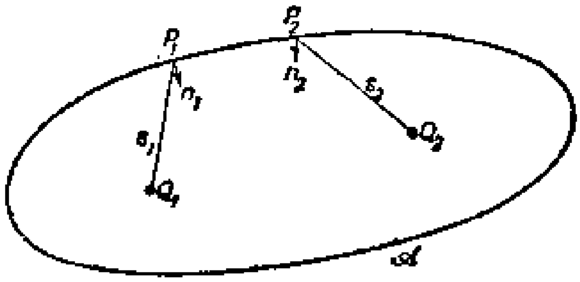


图 10.16 互相干传播定律严格表述中所用的符号

1) (18)式适用于来自任意形状的闭曲面 $\mathscr{A}$ 的传播. 对于来自平面的传播，存在更简单的公式 [见 M. J. Beran and G. B. Parrent, *Theory of Partial Coherence* (Englewood Cliffs, N. J., 1964), §3.3].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\Gamma(Q_1,Q_2,\tau)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}}\left\{f_1f_2[\Gamma]-f_1g_2\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma\right]\right.$$
$$+f_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial n_2}\Gamma\right]+g_1f_2\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma\right]-g_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Gamma\right]$$
$$+g_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial n_2}\Gamma\right]+h_1f_2\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma\right]-h_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial\tau}\Gamma\right]$$
$$\left.+h_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}\Gamma\right]\right\}dP_1dP_2. \tag{18}$$

右边 Γ 的前两个自变量是 P_1 和 P_2，$[\cdots]$ 表示"推迟"量为 $(s_1-s_2)/c$，例如

$$[\Gamma]=\Gamma\left(P_1,P_2,\tau-\frac{s_1-s_2}{c}\right). \tag{19}$$

(18)式可认为是互相干传播定律(§ 10.6(17)式)的严格表述. 它利用围绕任意两点 Q_1 和 Q_2 的任意闭曲面上所有各对点处互相干函数值及其一些微商值,来表示这两点的互相干函数值.

在 Q_1 和 Q_2 重合而 $\tau=0$ 的特殊情况下，由(18)式，代入 $\Gamma_{12}(\tau)=\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\,\gamma_{12}(\tau)$，就得到强度的下述表达式:

$$I(Q)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}}\left(\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\left\{f_1f_2[\gamma]+(f_2g_1-f_1g_2)\right.\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma\right]-g_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\gamma\right]\right\}$$
$$+\sqrt{I_1}\left\{f_1h_2\frac{\partial}{\partial n_2}\left(\sqrt{I_2}\,[\gamma]\right)\right.$$
$$\left.+g_1h_2\frac{\partial}{\partial n_2}\left(\sqrt{I_2}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma\right]\right)\right\}$$
$$+\sqrt{I_2}\left\{f_2h_1\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\sqrt{I_1}\,[\gamma]\right)\right.$$
$$\left.-g_2h_1\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\sqrt{I_1}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma\right]\right)\right\}$$
$$\left.+h_1h_2\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}\left(\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\,[\gamma]\right)\right)dP_1dP_2, \tag{20}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 I_1 和 I_2 分别是 P_1 和 P_2 处的强度，$[\gamma] = \gamma(P_1, P_2, (s_2 - s_1)/c)$，等等. (20)式可认为是 § 10.6(18)式所表述的定理的严格表述. 它利用围绕任意点 Q 的任意曲面上的强度分布和复相干度(以及这两个量的一些微商)来给出 Q 点处的强度.

§ 10.7.3 相干时间和有效谱宽

相干时间的概念在许多涉及多色光的研究中已发现很有用处，它在 § 7.5.8 中通过研究具有有限持续时间的相同波列叠加而引起的扰动就已经介绍过了. 我们已通过一个简单例子(周期波列的随机序列)证明过，所得到扰动的相干时间[1] $\Delta\tau$ 和有效谱宽 $\Delta\nu = c\Delta\lambda/\bar{\lambda}^2$ 由数量级关系式

$$\Delta\tau\Delta\nu \sim 1 \tag{21}$$

相联系. 我们还讲过，只要 $\Delta\tau$ 和 $\Delta\nu$ 定义为适当的平均值，则在更普遍的条件下，也有一个这种类型的关系式成立. 本节中将定义这些量，并严格地建立所需的倒易关系.

假定一束光在 P 点处分为两束，在这两束光之间引入程差 $c\tau$ 之后再合在一起. 由此引起的干涉效应由自相干函数

$$\Gamma(\tau) = \langle V(t+\tau)V^*(t)\rangle = 4\int_0^\infty G(\nu)e^{-2\pi i\nu\tau}d\nu \tag{22}$$

表征，式中 $V(t)$ 是 P 处的复扰动，$G(\nu)$ 是谱密度.

由于两个干涉光束的相干度用 $|\gamma(\tau)| = |\Gamma(\tau)|/\Gamma(0)$ 来表示，因此把光在 P 处的相干时间定义为 $\Gamma(\tau)$ 的模平方的归一化方均根宽度 (r. m. s.) 是合理的，并且在数学上也是方便的，即[2]

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2|\Gamma(\tau)|^2d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(\tau)|^2d\tau}. \tag{23}$$

---

1) 为了本章符号一致，现在用 $\Delta\tau$ 代替 Δt.

2) 因 $|\Gamma(\tau)|$ 是 τ 的偶函数，所以平均值 $\bar{\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty}\tau|\Gamma(\tau)|^2d\tau \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(\tau)|^2d\tau$ 为零.

关于相干时间的另一定义，见 L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.*, **74** (1959), 233. 又见 L. Mandel and Wolf, 同上, 80(1962), 894.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

其次，把光在 P 处的有效谱宽 $\Delta\nu$ 定义为 Γ 的谱的归一化方均根宽度，即遍及 $\nu \geqslant 0$ 范围的谱密度 $G(\nu)$ 平方的归一化方均根宽度。因此

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{\int_0^\infty (\nu - \bar{\nu})^2 G^2(\nu) d\nu}{\int_0^\infty G^2(\nu) d\nu}, \qquad \bar{\nu} = \frac{\int_0^\infty \nu G^2(\nu) d\nu}{\int_0^\infty G^2(\nu) d\nu}. \tag{24}$$

为了建立所需的倒易关系，令

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \nu - \bar{\nu}, && \text{(a)} \\ &\left.\begin{aligned}\Phi(\xi) &= 4G(\bar{\nu} + \xi), \text{当 } \xi > -\bar{\nu} \text{ 时}, \\ &= 0, \qquad\qquad \text{当 } \xi < -\bar{\nu} \text{ 时},\end{aligned}\right\} && \text{(b)} \\ &\Psi(\tau) = \Gamma(\tau) e^{2\pi i \bar{\nu}\tau}. && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

假定 $\Phi(\xi)$ 处处连续 $(-\infty < \xi < \infty)$；因此 $\Phi(-\bar{\nu}) = G(0) = 0$[1]。由(22)式得出，$\Psi$ 和 Φ 构成一对傅里叶变换，

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-2\pi i \xi\tau} d\xi, \quad \Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{2\pi i \xi\tau} d\tau. \tag{26}$$

$\Delta\tau$ 和 $\Delta\nu$ 的表达式变为

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\Psi(\tau)|^2 d\tau, \tag{27}$$

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \Phi^2(\xi) d\xi, \tag{28}$$

式中

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) d\xi. \tag{29}$$

---

1) 事实上，这个条件对于(23)式分子积分的收敛是必需的。如果它被满足，如这里所假定，则当 $\Gamma(\tau) = \langle V(t+\tau) V^*(t)\rangle$ 被实相关函数 $\Gamma^{(r)}(\tau) = \mathscr{R}\Gamma(\tau) = 2\langle V^{(r)}(t+\tau) V^{(r)}(t)\rangle$ 代替时，(23) 式的值保持不变［参看 E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **71** (1958), 257; R. Silverman, *Trans. Inst. Rad. Engrs.*, CT-**5** (1958), 84］。A.G. Mayer 和 E. A. Leontovich, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **4** (1934), 353, 以及 I. Kay 和 R. Silverman, *Information and Control*, **1** (1957), 64, 396. 研究过 $G(0) \neq 0$ 的更普遍情况。又见 A. A. Kharkevich, *Spectra and Analysis*, 译自俄文 (New York, Consultants Bureau, 1960), § 12。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

然后，用 Ψ 表示 (28) 式的积分．利用 (26) 式中第二个关系式，有

$$
\begin{aligned}
(\Delta\nu)^2 &= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\Phi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)e^{2\pi i\xi\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)d\tau\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{2\pi i\xi\tau}d\xi \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Psi^*(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right|^2 d\tau. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

从第二行过渡到第三行时，已用了(26)式中第一个关系式，以及关系式 $\Psi(-\tau)=\Psi^*(\tau)$．最后一行是由前一行通过分部积分并且用了当 $\tau\to\pm\infty$ 时 $\Psi\to 0$ 而得出的．Ψ 有这样的性质是因为已假定(29)式中的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(\tau)|^2d\tau$ 收敛．

由(27)，(29)和(30)式得出

$$
(\Delta\tau)^2(\Delta\nu)^2=\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{4\left(\int_{-\infty}^{\infty}\tau^2|\Psi(\tau)|^2d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right|^2d\tau\right)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(\tau)|^2d\tau\right)^2}\right]. \qquad (31)
$$

现在，利用附录 8 给出的直接代数论证，对于任一函数 Ψ 只要积分存在，(31)式右边大括弧内的项就大于或等于 1．因此，就建立了关于相干时间和有效谱宽的下述**倒易不等式**[1]：

$$
\Delta\tau\Delta\nu\geqslant\frac{1}{4\pi}. \qquad (32)
$$

记住准单色光而且两个干涉光束强度相等时，根据 § 10.4(5) 式，相干度 $|\gamma_{11}(\tau)|=|\Gamma_{11}(\tau)|/\Gamma_{11}(0)$ 等于这两光束之间的程差为 $c\tau$ 的一点处的条纹可见度 $\mathscr{V}(\tau)$．因此，(23) 式可写成下述

1) 我们的推导仿照 H. Weyl 和 W. Pauli 所给出的关于海森伯测不准关系的推导 [H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (London, Methuen, 1931; also Dover Publications, New York), pp. 77 and 393].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

形式:

$$(\Delta\tau)^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tau^2\mathscr{V}^2(\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{V}^2(\tau)d\tau}=\frac{\int_0^{\infty}\tau^2\mathscr{V}^2(\tau)d\tau}{\int_0^{\infty}\mathscr{V}^2(\tau)d\tau};\qquad(33)$$

所以,当两个干涉光束强度相等时,相干时间 $\Delta\tau$ 等于可见度函数平方的归一化方均根宽度.

相干时间的上述定义比§7.5.8给出的定义更合适,因为现在不必对引起扰动的初级场的性质作特殊的假定. 事实上,上述定义依据可测的相关函数 $\Gamma(\tau)$,而不再需要知道迅速涨落的函数 $V(t)$ 的详细情况. 如果希望保留用初级波列来描述干涉现象,则可把 $\Delta\tau$ 看作平均波列的持续时间;然而采用这种解释必须小心谨慎.

回到(32)式,我们看到仅当(31)式右边大括弧内的项等于1时,(32)式的等号才成立,根据附录8,只有在 $\Psi(\tau)$ 是高斯函数时这才有可能. 这时,一个高斯函数的傅里叶变换还是一个高斯函数,由于这个函数对于其自变量的所有值 $(-\infty<\xi<\infty)$ 都不为零,因此它不遵守(25 b)式第二个条件. 所以(32)式中的等号从来不用. 然而,当高斯函数中心处的频率比它的方均根宽度大得多时,负频率区对 $\bar{\nu}$ 和 $\Delta\nu$ 的贡献可以忽略;显然,对于光学中遇到的高频谱而言,乘积 $\Delta\tau\Delta\nu$ 的值与对应于整个高斯曲线[1]的 $\Delta\tau\Delta\nu$ 值不可能有明显的差别. 所以(32)式中的不等式符号可以用数量级符号来代替,即

$$\Delta\tau\Delta\nu\sim\frac{1}{4\pi}.\qquad(34)$$

刚才给出的相干时间的定义,适合于单一光束在一点 P 处分成两个干涉光束的情况. 这个定义可推广到在两点 P_1 和 P_2 处分出两个干涉光束的情况,例如在杨氏干涉实验中. 这种推广很简单. 此时必须用互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)=\Gamma(P_1, P_2, \tau)$ 代替自相干函

1) 即包括负频率区. ——译者注

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数 $\Gamma(\tau)=\Gamma(P,P,\tau)$，用互谱密度 $G_{12}(\nu)$ 代替寻常的谱密度 $G(\nu)$. 唯一的差别在于此时 $G_{12}(\nu)$ 是复值，并且 $\Gamma_{12}(\tau)$ 不再一定是 τ 的偶函数,因此 $\bar{\tau}$ 不一定为零. 此时适当的定义是:

$$(\Delta\tau_{12})^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(\tau-\bar{\tau}_{12})^2|\Gamma_{12}(\tau)|^2d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma_{12}(\tau)|^2d\tau},\quad \bar{\tau}_{12}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tau|\Gamma_{12}(\tau)|^2d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma_{12}(\tau)|^2d\tau},\tag{35}$$

$$(\Delta\nu_{12})^2=\frac{\int_{0}^{\infty}(\nu-\bar{\nu}_{12})^2|G_{12}(\nu)|^2d\nu}{\int_{0}^{\infty}|G_{12}(\nu)|^2d\nu},\quad \bar{\nu}_{12}=\frac{\int_{0}^{\infty}\nu|G_{12}(\nu)|^2d\nu}{\int_{0}^{\infty}|G_{12}(\nu)|^2d\nu}.\tag{36}$$

$\Delta\tau_{12}$ 可称为光在 P_1 和 P_2 处的互相干时间，$\Delta\nu_{12}$ 可称为光在 P_1 和 P_2 处的互有效谱宽. 对有关 $\Gamma_{11}(\tau)$ 的论证作显而易见的修改，就得出这两个量满足倒易不等式

$$(\Delta\tau_{12})(\Delta\nu_{12})\geqslant\frac{1}{4\pi}.\tag{37}$$

最后，对于准单色光，作为(33)式的推广，有下述关系式:

$$(\Delta\tau_{12})^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(\tau-\bar{\tau}_{12})^2\mathscr{V}_{12}^2(\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{V}_{12}^2(\tau)d\tau},\quad \bar{\tau}_{12}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tau\mathscr{V}_{12}^2(\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{V}_{12}^2(\tau)d\tau}.\tag{38}$$

式中 $\mathscr{V}_{12}(\tau)$ 代表当两个干涉光束强度相同时，来自 P_1 和 P_2 的光所形成的条纹可见度.

§ 10.8 准单色光的偏振特性

本章前几节中，我们把光扰动作为标量处理. 现在扼要讨论准单色光波的某些矢量特性.

§ 1.4 中讲过，严格单色光总是偏振的，即随着时间的增加，空间内每一点处的电矢量(以及磁矢量)的端点绕着一个椭圆作周期

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

性运动，当然，在特殊情况下，这个椭圆可变为一个圆或一条直线。还遇到过非偏振光．在这种情况下，可假定端点完全不规则地运动，并且在垂直于传播方向的各个不同方向上把它分解时，这种光显出没有优越的方向性，同完全相干与完全不相干一样，上述两种情况代表两种极端．场矢量的变化一般既不是完全规则的，又不是完全不规则的，我们可以说，这样的光是部分偏振的．通常这种光是由非偏振光经反射（参看 § 1.5.3）或散射（参看 § 13.5.2）而产生的．本节中将研究部分偏振光波的主要特性．我们将看到，它的一些可观察的效应，取决于与传播方向垂直的电矢量任何两个相互正交的分量的强度，以及这两者之间存在的相关．

§ 10.8.1 准单色平面波的相干矩阵[1]

考虑平均频率为 $\bar{\nu}$ 的准单色光波沿正 z 方向传播．设

$$E_x(t)=a_1(t)e^{i[\phi_1(t)-2\pi\bar{\nu}t]},\quad E_y(t)=a_2(t)e^{i[\phi_2(t)-2\pi\bar{\nu}t]} \tag{1}$$

表示 O 点处的电矢量在垂直于传播方向的两个相互正交的方向上的分量．再次采用 § 10.2 中讨论过的复数表示，其中 E_x 和 E_y 是与真正的（实）分量 $E_x^{(r)}=a_1(t)\cos[\phi_1(t)-2\pi\bar{\nu}t]$，$E_y^{(r)}=a_2(t)\times\cos[\phi_2(t)-2\pi\bar{\nu}t]$ 相缔合的“解析信号”．如果光是严格单色的，则 a_1，a_2，ϕ_1 和 ϕ_2 都是常数．对于准单色波，这些量也依赖于时间 t，但如前所述，在比相干时间即光的有效谱宽 $\Delta\nu$ 的倒数小得多的任一时间间隔内，它们只有相对小量的变化．

假定 y 分量相对于 x 分量有一推迟量 ε，（例如，利用 § 14.4.2 中所描述的一种补偿器就能做到这一点），并考虑在与正 x 方向成 θ 角的方向上光振动的强度 $I(\theta,\varepsilon)$，（图 10.17）．使光通过一个适当取向的起偏振器（§ 14.4.1），就会观察到这一强度．

引入推迟量 ε 以后，电矢量在 θ 方向上的分量为

$$E(t;\theta,\varepsilon)=E_x\cos\theta+E_y e^{i\varepsilon}\sin\theta, \tag{2}$$

---

1) § 10.8.1 和 § 10.8.2 中所作的分析是根据 E. Wolf 的研究 [*Nuovo Cimento*, **13** (1959), 1165]．G. B. Parrent 和 P. Roman 的论文中叙述了某些进一步的发展[同上，**15** (1960)，370]．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此

$$
\begin{aligned}
I(\theta,\varepsilon) &= \langle E(t;\theta,\varepsilon)E^*(t;\theta,\varepsilon)\rangle \\
&= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + J_{xy}e^{-i\varepsilon}\cos\theta\sin\theta \\
&\quad + J_{yx}e^{i\varepsilon}\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned} \tag{3}
$$

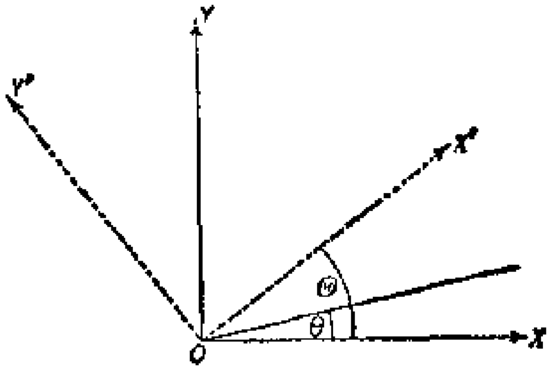


图 10.17　符号的图示

式中 J_{xx}, ··· 是矩阵

$$
\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^*\rangle & \langle E_x E_y^*\rangle \\ \langle E_y E_x^*\rangle & \langle E_y E_y^*\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_1^2\rangle & \langle a_1 a_2 e^{i(\phi_1-\phi_2)}\rangle \\ \langle a_1 a_2 e^{-i(\phi_1-\phi_2)}\rangle & \langle a_2^2\rangle \end{bmatrix} \tag{4}
$$

的矩阵元. $\boldsymbol{J}$ 的对角元是实数，可以看出，它们代表在 x 方向和 y 方向上分量的强度. 因此，矩阵的迹 $\mathrm{Tr}\boldsymbol{J}$ 即其对角元之和等于光的总强度，

$$
\mathrm{Tr}\boldsymbol{J} = J_{xx} + J_{yy} = \langle E_x E_x^*\rangle + \langle E_y E_y^*\rangle. \tag{5}
$$

非对角元一般是复数，但它们彼此共轭.（象这种对于所有的 i 和 j 都满足关系式 $J_{ij} = J_{ji}^*$ 的矩阵，称为厄密矩阵）.

用同前面一样的方法(参看 § 10.4(9b)式)，令

$$
\mu_{xy} = |\mu_{xy}|e^{i\beta_{xy}} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}}, \tag{6}
$$

使混合项 J_{xy} 归一化. 然后用同 § 10.3(17)式一样的方法，由薛华兹不等式得出

$$
|\mu_{xy}| \leqslant 1. \tag{7}
$$

这个复相关因子 μ_{xy} 与 § 10.4.1 引入的复相干度 μ_{12} 具有类似的含义. 它是电矢量在 x 方向和 y 方向上的分量之间相关性的量度. 其绝对值 $|\mu_{xy}|$ 是它们的"相干度"的量度. 其位相 β_{xy} 是它

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

们的"有效位相差"的量度. $\boldsymbol{J}$ 称为光波的相干矩阵. 因 J_{xx} 和 J_{yy} 不能为负值，所以(6)和(7)式意味着相伴的行列式是非负的，即

$$|\boldsymbol{J}| = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \geqslant 0. \tag{8}$$

如果利用关系式 $J_{yx} = J_{xy}^{*}$，并用 $\mathscr{R}$ 表示实部，则(3)式变为

$$\begin{aligned} I(\theta, \varepsilon) &= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\mathscr{R}(J_{xy}e^{-i\varepsilon}) \\ &= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + 2\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}\cos\theta\sin\theta \\ &\quad \times |\mu_{xy}|\cos[\beta_{xy} - \varepsilon], \end{aligned} \tag{9}$$

式中从第一行到第三行已用(6)式代入. 如果令 $J_{xx}\cos^2\theta = I^{(1)}$, $J_{yy}\sin^2\theta = I^{(2)}$，则最后的公式变得与准单色波场的基本干涉定律 § 10.4(11)式一致.

同以前考虑过的相干函数一样，一给定波的相干矩阵元可用较简单的实验测定. 这可以用许多不同的方法做到. 人们只需要对几个不同的 θ 值(起偏振器的取向)和 ε 值(由补偿器引入的延迟)测量强度，并求解由(3)式得出的相应关系式即可. 设 $\{\theta, \varepsilon\}$ 表示与特定的一对 θ, ε 对应的一次测量. 一组方便的测量如下:

$$\{0°, 0\}, \{45°, 0\}, \{90°, 0\}, \{135°, 0\}, \left\{45°, \frac{\pi}{2}\right\}, \left\{135°, \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{10}$$

利用从这六次测量确定的强度，由(3)式得出相干矩阵元为

$$\left.\begin{aligned} J_{xx} &= I(0°, 0), \\ J_{yy} &= I(90°, 0), \\ J_{xy} &= \frac{1}{2}\{I(45°, 0) - I(135°, 0)\} \\ &\quad + \frac{1}{2}i\left\{I\left(45°, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135°, \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \\ J_{yx} &= \frac{1}{2}\{I(45°, 0) - I(135°, 0)\} \\ &\quad - \frac{1}{2}i\left\{I\left(45°, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135°, \frac{\pi}{2}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

可以看出，要确定 J_{xx}, J_{yy} 以及 J_{xy}（或 J_{yx}）的实部，只需要一个起偏振器。使起偏振器的取向分别透过在方位角 $\theta=0$ 和 $\theta=90°$ 上的分量，就可测定 J_{xx} 和 J_{yy}。使起偏振器的取向首先透过在方位角 $\theta=45°$ 上的分量，然后透过在方位角 $\theta=135°$ 上的分量，就可测定 J_{xy} 的实部。为了确定 J_{xy}（或 J_{yx}）的虚部，根据(11)中最后两式，还需要一个补偿器，它在 x 分量和 y 分量之间引入四分之一周期的位相差（例如一块四分之一波片，参看 § 14.4.2）；并且再次使用起偏振器，使它的取向首先透过在方位角 $\theta=45°$ 上的分量，然后透过在方位角 $\theta=135°$ 上的分量。§ 14.4.2 中将讲到，后两种测量也可用于探测右旋和左旋圆偏振。

由(9)式明显看出，两束光具有相同的相干矩阵，就它们在使用一个起偏振器和一个补偿器的同样实验中产生相同的（时间平均）强度这个意义而言，它们是等效的[1]。

现在对于一给定波，当一个自变量（θ 或 ε）保持固定而另一个改变时，考查所观察的强度 $I(\theta,\varepsilon)$ 如何变化。首先假定 θ 保持不变而 ε 改变。由(9)式看出，强度在下述极大值和极小值之间作正弦曲线型变化：

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{极大}(\varepsilon)} &= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + 2|J_{xy}|\sin\theta\cos\theta, \\ \text{和}\quad I_{\text{极小}(\varepsilon)} &= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta - 2|J_{xy}|\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

因此

$$\frac{I_{\text{极大}(\varepsilon)} - I_{\text{极小}(\varepsilon)}}{I_{\text{极大}(\varepsilon)} + I_{\text{极小}(\varepsilon)}} = \frac{|J_{xy}|\sin 2\theta}{J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta}. \tag{13}$$

(13)式指出另一种确定 J_{xy} 的绝对值（因此也确定 $|\mu_{xy}|$）的方

1) 这种提法只有在准单色理论近似范围内才是正确的，因为只有在此理论有效范围内，强度表达式(9)才成立。当两个正交分量之间所引入的位相延迟 ε 与用平均波长 $\bar{\lambda}$ 为单位测量的相干长度相比不可忽略时，两束光可能表现得很不相同。为了更完整地描述光束的可观察的特性，必须引入更普遍的相干矩阵，它表征不同时间以及不同点处的分量之间的相关。参看 E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884；以及他所撰稿，载于 *Proc. Symp. Astronom. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1956), 177；P. Roman and E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **17** (1960), 462, 477；P. Roman，同上，**20** (1961), 759；同上，**22** (1961), 1005.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

法：它表明 $|J_{xy}|$ 可通过测量 J_{xx}，J_{yy}，$I_{极大(\varepsilon)}$ 和 $I_{极小(\varepsilon)}$ 得出，J_{xy} 的位相可通过测量极大或极小值出现时的 ε 值得出. 因为，根据(9)式，

$$\left.\begin{aligned} I &= I_{极大(\varepsilon)}, \text{当 } \varepsilon = \beta_{xy} \pm 2m\pi \text{ 时 } (m = 0, 1, 2, \cdots), \\ I &= I_{极小(\varepsilon)}, \text{当 } \varepsilon = \beta_{xy} \pm (2m+1)\pi \text{ 时}, (m = 0, 1, 2, \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

为了看出当 ε 固定而 θ 改变时强度如何变化，把(9)式改写成稍有不同的形式是方便的. 简单计算得出

$$I(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) + R\cos(2\theta - \alpha), \tag{15}$$

式中

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx}\cos^2(\beta_{xy} - \varepsilon)},$$

$$\tan\alpha = \frac{2|J_{xy}|\cos(\beta_{xy} - \varepsilon)}{J_{xx} - J_{yy}}. \tag{16}$$

由(15)式看出，当 θ 变化时，强度再次作正弦曲线型变化；其极值为

$$\left.\begin{aligned} I_{极大(\theta)} &= \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) + R, \\ I_{极小(\theta)} &= \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) - R. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

在(17)式右边，只有 R 依赖于 ε. 当 $\cos^2(\beta_{xy} - \varepsilon) = 1$，即 ε 为(14)式所给的值之一时，R 取最大值，它等于

$$\begin{aligned} R_{极大(\varepsilon)} &= \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx}} \\ &= \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy})\sqrt{1 - \frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}, \end{aligned} \tag{18}$$

式中 $|\boldsymbol{J}|$ 是相干矩阵的行列式(8). 由此得出，强度(相对于 θ 和 ε 两者)的绝对极大值和极小值为

$$\left.\begin{aligned} I_{极大(\theta,\varepsilon)} &= \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy})\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}\right], \\ I_{极小(\theta,\varepsilon)} &= \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy})\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此

$$\frac{I_{\text{极大}(\theta,\varepsilon)} - I_{\text{极小}(\theta,\varepsilon)}}{I_{\text{极大}(\theta,\varepsilon)} + I_{\text{极小}(\theta,\varepsilon)}} = \sqrt{1 - \frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}. \tag{20}$$

以后将看到，这个量具有简单的物理意义.

至此，所涉及的是在任意的但却是固定的直角坐标轴 OX，OY 上的电振动. 现在将考虑当选取一套新坐标轴时，相干矩阵如何变换. 设仍在垂直于传播方向的平面内取新的直角坐标轴 OX'，OY'，使 OX' 与 OX 的夹角为 Θ（见图 10.17). 电矢量在新坐标轴上的分量用 $E_{x'}$，$E_{y'}$ 表示为

$$\left.\begin{aligned} E_{x'} &= E_x \cos\Theta + E_y \sin\Theta, \\ E_{y'} &= -E_x \sin\Theta + E_y \cos\Theta. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

变换后的相干矩阵 $\boldsymbol{J}'$ 的矩阵元为

$$J_{k'l'} = \langle E_{k'} E_{l'}^* \rangle, \tag{22}$$

式中 k' 和 l' 各取 x' 和 y' 值. 由(21)和(22)式得出，

$$\boldsymbol{J}' = \begin{bmatrix} J_{xx}c^2 + J_{yy}s^2 + (J_{xy} + J_{yx})cs & (J_{yy} - J_{xx})cs + J_{xy}c^2 - J_{yx}s^2 \\ (J_{yy} - J_{xx})cs + J_{yx}c^2 - J_{xy}s^2 & J_{xx}s^2 + J_{yy}c^2 - (J_{xy} + J_{yx})cs \end{bmatrix}, \tag{23}$$

式中

$$c = \cos\Theta, \qquad s = \sin\Theta. \tag{24}$$

可以看出，矩阵的迹经坐标轴旋转是不变的. 简单计算表明，其行列式经此变换也是不变的，由熟知的矩阵代数定理也得到这两个结果.

现在考虑几种特别有意义的情况下相干矩阵的形式.

(a) 完全非偏振光（自然光）

自然界最常见的光具有下述特性：它在垂直于传播方向的任一方向上的分量强度都相同；而且，光可分解成两个直角坐标分量，其中一个分量相对于另一个分量事先有任何推迟，都不影响这一强度. 换句话说，对于所有的 θ 和 ε 值，

$$I(\theta, \varepsilon) = \text{常数} \tag{25}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这样的光可称为完全非偏振光，通常也称为自然光.

由(9)式明显看出，当而且仅当

$$\mu_{xy}=0 \quad 和 \quad J_{xx}=J_{yy} \tag{26a}$$

时，$I(\theta,\varepsilon)$ 才与 ε 和 θ 无关. 第一个条件意味着 E_x 和 E_y 互不相干. 根据(6)式和关系式 $J_{yx}=J_{xy}^*$，(26a) 式也可写为

$$J_{xy}=J_{yx}=0, \quad J_{xx}=J_{yy}, \tag{26b}$$

由此得出，强度为 $J_{xx}+J_{yy}=I_0$ 的自然光的相干矩阵为

$$\frac{1}{2}I_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{27}$$

(b) 完全偏振光

首先假定光是严格单色的. 于是(1)式中的振幅 a_1 和 a_2 以及位相因子 ϕ_1 和 ϕ_2 都与时间无关，而相干矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2e^{i\delta}\\ a_1a_2e^{-i\delta} & a_2^2\end{bmatrix}, \tag{28}$$

式中[1)]

$$\delta=\phi_1-\phi_2. \tag{29}$$

可以看出，在这种情况下

$$|\boldsymbol{J}|=J_{xx}J_{yy}-J_{xy}J_{yx}=0, \tag{30}$$

即相干矩阵的行列式为零. 这时，分量 E_x 和 E_y 的复相干度为

$$\mu_{xy}=\frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}}=e^{i\delta}, \tag{31}$$

即它的绝对值为 1 (完全相干)，而它的位相等于两个分量的位相差.

在线偏振光的特殊情况下，[参看 § 1.4(33) 式]，有 $\delta=m\pi$ $(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 因此，线偏振光的相干矩阵为

$$\begin{bmatrix}a_1^2 & (-1)^m a_1a_2\\ (-1)^m a_1a_2 & a_2^2\end{bmatrix}. \tag{32}$$

---

1) 为了以后应用 § 1.4 的某些结果，注意 ϕ_1 和 ϕ_2 相当于 § 1.4.2 的 $-\delta_1$ 和 $-\delta_2$，因此(29)式与早先 § 1.4(16) 式的定义即 $\delta=\delta_2-\delta_1$ 相同.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

电矢量沿 $E_y/E_x=(-1)^m a_2/a_1$ 所给出的方向振动. 特别是, 矩阵

$$I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ 和 } I\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{33}$$

各代表电矢量分别在 x 方向 ($a_2=0$) 和 y 方向 ($a_1=0$) 上强度为 I 的线偏振光;而矩阵

$$\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \text{ 和 } \frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{34}$$

各代表电矢量分别在与 x 方向成 45° 和 135° 角的方向上强度为 I 的线偏振光 ($a_1=a_2$, $m=0$ 和 $a_1=a_2$, $m=1$).

对于圆偏振光, [参看 § 1.4(35), (36) 式], 有 $a_1=a_2$, $\delta=m\pi/2(m=\pm1, \pm3, \cdots)$, 因此,相干矩阵为

$$\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & \pm i\\ \mp i & 1\end{bmatrix}, \tag{35}$$

式中 I 是光的强度. 由 § 1.4(38)和(40) 式,根据偏振是右旋的还是左旋的,来选取上面的或下面的符号.

如果光不是单色的,条件(30)仍可满足. 因为, 如果 a_1, a_2, ϕ_1 和 ϕ_2 对时间的依赖关系按照下述方式: 具振幅比与位相差均与时间无关,即

$$\frac{a_2(t)}{a_1(t)}=q, \quad \delta=\phi_1(t)-\phi_2(t)=\chi, \tag{36}$$

式中 q 和 χ 均为常数,则

$$\begin{aligned} J_{xx}&=\langle a_1^2\rangle, & J_{xy}&=q\langle a_1^2\rangle e^{i\chi},\\ J_{yx}&=q\langle a_1^2\rangle e^{-i\chi}, & J_{yy}&=q^2\langle a_1^2\rangle, \end{aligned} \tag{37}$$

从而条件(30)成立. 矩阵元为(37)式的相干矩阵与分量为

$$E_x=\sqrt{\langle a_1^2\rangle}\, e^{i[\alpha-2\pi\bar{\nu}t]}, \quad E_y=q\sqrt{\langle a_1^2\rangle}\, e^{i[-\chi+\alpha-2\pi\bar{\nu}t]} \tag{38}$$

的严格单色光的相干矩阵相同,式中 α 是任一实常数. 由此得出, 在包含一个起偏振器和一个补偿器的实验中, 遵从条件(36)的准单色波的表现,同严格单色从而完全偏振的波(38)正好一样. (当然, 已假定补偿器引入的位相差比用平均波长为单位测量的光的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

相干长度小得多）．所以条件(30)可以被认为表示完全偏振光波的特征．

§10.8.2 某些等价表示．光波的偏振度

如果把在同一方向上传播的几个独立的光波叠加，则合成波的相干矩阵等于各个波的相干矩阵之和．为了证明这一结果，设 $E_x^{(n)}$，$E_y^{(n)}$ $(n=1,2,\cdots,N)$ 是各个波的电矢量分量（用通常的复数表示）．合成波的电矢量分量为

$$E_x=\sum_{n=1}^{N}E_x^{(n)},\quad E_y=\sum_{n=1}^{N}E_y^{(n)},\tag{39}$$

因此，其相干矩阵元为

$$J_{kl}=\langle E_kE_l^*\rangle=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle E_k^{(n)}E_l^{(m)*}\rangle$$

$$=\sum_{n}\langle E_k^{(n)}E_l^{(n)*}\rangle+\sum_{n\neq m}\langle E_k^{(n)}E_l^{(m)*}\rangle.\tag{40}$$

因假定各个波是独立的，后一求和号内各项均为零，由此得出，

$$J_{kl}=\sum_{n}J_{kl}^{(n)},\tag{41}$$

式中 $J_{kl}^{(n)}=\langle E_k^{(n)}E_l^{(n)*}\rangle$ 是第 n 个波的相干矩阵元．(41)式表明，合成波的相干矩阵等于所有各个波的相干矩阵之和．

反之，任何一个波都可看成是若干个独立的波之和，它们显然可用许多种不同的方法来选择．现在扼要地讨论一种具有特殊意义的特定选择．

我们要证明：任一准单色光波都可看成是一个完全非偏振波和一个完全偏振波之和，两者是彼此独立的，并且这种表示是唯一的．

为了确定这一结果，只需证明任一相干矩阵 $\boldsymbol{J}$ 可唯一地表示为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^{(2)},\tag{42}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中，根据(27)和(30)式，

$$\boldsymbol{J}^{(1)}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}^{(2)}=\begin{bmatrix}B & D\\ D^* & C\end{bmatrix},\tag{43}$$

其中 $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$, $C\geqslant 0$, 并且

$$BC-DD^*=0.\tag{44}$$

如果 J_{xx}, J_{xy}, $\cdots$ 是表征原来光波的相干矩阵元，则根据(42)和(43)式，必有

$$\left.\begin{aligned}A+B&=J_{xx}, & D&=J_{xy},\\ D^*&=J_{yx}, & A+C&=J_{yy}.\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

将(45)式代入(44)式，得到 A 的下述方程：

$$(J_{xx}-A)(J_{yy}-A)-J_{xy}J_{yx}=0;\tag{46}$$

因此，A 是相干矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征根(本征值)．(46)式的两个根为

$$A=\frac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})\pm\frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|},\tag{47}$$

式中，同前，$|\boldsymbol{J}|$ 是行列式(8)．因 $J_{yx}=J_{xy}^*$，故乘积 $J_{xy}J_{yx}$ 为非负值，由(8)式得出，

$$|\boldsymbol{J}|\leqslant J_{xx}J_{yy}\leqslant\frac{1}{4}(J_{xx}+J_{yy})^2,$$

因此，(47)式所示的两个根均为非负的实值．首先考虑平方根前面带负号的解．则有

$$A=\frac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})-\frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|},\tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned}&B=\frac{1}{2}(J_{xx}-J_{yy})+\frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|},\quad D=J_{xy},\\ &D^*=J_{yx},\quad C=\frac{1}{2}(J_{yy}-J_{xx})+\frac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}.\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

这时

$$\begin{aligned}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}&=\sqrt{(J_{xx}-J_{yy})^2+4J_{xy}J_{yx}}\\ &\geqslant|J_{xx}-J_{yy}|.\end{aligned}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，同所要求的一样，B 和 C 也为非负值. (47)式所示的另一根(平方根前面带正号)导致 B 和 C 为负值，因此必须舍弃. 于是我们就得出所要求的一种唯一的分解.

波的总强度为

$$I_{总} = \mathrm{Tr}\boldsymbol{J} = J_{xx} + J_{yy}; \tag{50}$$

而偏振部分的总强度为

$$I_{偏振} = \mathrm{Tr}\boldsymbol{J}^{(2)} = B + C = \sqrt{(J_{xx} + J_{yy})^2 - 4|\boldsymbol{J}|}. \tag{51}$$

偏振部分的强度与总强度的比值称为波的**偏振度** P；根据(50)和(51)式，它由下式给出：

$$P = \frac{I_{偏振}}{I_{总}} = \sqrt{1 - \frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx} + J_{yy})^2}}. \tag{52}$$

由于这一表达式只包含相干矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的两个转动不变量，因此不出所料，偏振度与 OX，OY 轴的特定选择无关. 由(52)式以及(48)式之前的不等式得出，

$$0 \leqslant P \leqslant 1. \tag{53}$$

当 $P = 1$ 时，没有非偏振的分量，因此，波是**完全偏振**的. 在这种情况下，$|\boldsymbol{J}| = 0$，因此 $|\mu_{xy}| = 1$，结果 E_x 和 E_y 是互相干的. 当 $P = 0$ 时，偏振分量不存在. 因此，波是**完全非偏振**的. 在这种情况下，$(J_{xx} + J_{yy})^2 = 4|\boldsymbol{J}|$，即

$$(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx} = 0. \tag{54a}$$

由于 $J_{yx} = J_{xy}^*$，因此得出两平方之和等于零，这只可能是两者分别为零，即

$$J_{xx} = J_{yy} \quad 和 \quad J_{xy} = J_{yx} = 0, \tag{54b}$$

与(26b)式一致. 于是，E_x 和 E_y 是互不相干的，$(\mu_{xy} = 0)$. 在其他所有情况下，$(0 < P < 1)$，我们认为光是**部分偏振**的. 比较(52)和(20)式，表明

$(I_{极大(\theta,\varepsilon)} - I_{极小(\theta,\varepsilon)})/(I_{极大(\theta,\varepsilon)} + I_{极小(\theta,\varepsilon)})$ 这个量正好是偏振度 P.

当 E_x 和 E_y 互不相干(但不一定是自然光)时，偏振度的表达式有一简单形式. 因这时 $J_{xy} = J_{yx} = 0$，所以 $|\boldsymbol{J}| = J_{xx}J_{yy}$，而

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(52)式化为[1)]

$$P = \left|\frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{xx} + J_{yy}}\right|. \tag{55}$$

这一表达式与自然光经反射引起偏振时使用的公式§1.5(42)一致。

我们要指出自然光的几种有用的表示法。自然光的相干矩阵(27)式总可表示为下列形式：

$$\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}I\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{56}$$

根据(33)式，这意味着强度为 I 的自然光波，与两个独立的线偏振波等价，后者的强度各为 $\frac{1}{2}I$，其电矢量在垂直于传播方向的两个相互正交的方向上振动。

自然光的另一种有用的表示法为

$$\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}I\begin{bmatrix}1 & +i\\ -i & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}I\begin{bmatrix}1 & -i\\ +i & 1\end{bmatrix}, \tag{57}$$

根据(35)式，这意味着强度为 I 的自然光波，与两个独立的圆偏振波等价，一个为右旋，另一个为左旋，其强度各为 $\frac{1}{2}I$。

回到一般情况(部分偏振光)，应当注意，与偏振度 P 不同，相干度 $|\mu_{xy}|$ 依赖于 x 和 y 方向的选择。然而不难看出，$|\mu_{xy}|$ 不能大于 P。因为如果在(52)式中把行列式 $|J|$ 完全写出来，并利用(6)式，则得出

$$1 - P^2 = \frac{J_{xx}J_{yy}}{\left[\frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy})\right]^2}[1 - |\mu_{xy}|^2]. \tag{58}$$

---

1) 由于每一厄密矩阵均可通过一幺正变换对角化，而且 $|J|$ 和 $\mathrm{Tr}\,J$ 的值经此变换后保持不变，因此偏振度总可表示为下述形式：

$$P = \left|\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\right|,$$

式中 A_1 和 A_2 是[(47)式给出的]两个本征值。然而幺正变换一般并不代表坐标轴绕波传播方向的真实转动。

注意到本征值 A_1 和 A_2 等于(19)式给出的值 $I_{极大(\theta,\epsilon)}$ 和 $I_{极小(\theta,\epsilon)}$，这是有意义的。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因为任何两个正数的几何平均不能大于它们的算术平均，由此得出，$1-P^2 \leqslant 1-|\mu_{xy}|^2$，即

$$P \geqslant |\mu_{xy}|. \tag{59}$$

(59)式中的等号，当而且仅当 $J_{xx}=J_{yy}$ 时，即当与 x 和 y 方向相联系的(时间平均)强度相等时才成立．现在要证明总存在一对方向，满足这种情形．

如果 xy 轴在其本身平面内沿反时针方向转过角 θ，则 J_{xx} 和 J_{yy} 分别变换到 $J_{x'x'}$ 和 $J_{y'y'}$，根据(23)式，

$$\left.\begin{aligned} J_{x'x'} &= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + (J_{xy}+J_{yx})\cos\theta\sin\theta, \\ J_{y'y'} &= J_{xx}\sin^2\theta + J_{yy}\cos^2\theta - (J_{xy}+J_{yx})\cos\theta\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由(60)式得出，如果 x，y 轴都转过角 $\theta=\Theta$，其中

$$\tan 2\Theta = \frac{J_{yy}-J_{xx}}{J_{xy}+J_{yx}}, \tag{61}$$

则 $J_{x'x'}=J_{y'y'}$．因 $J_{yx}=J_{xy}^*$，而且 J_{xx} 和 J_{yy} 均为实值，所以(61)式对 Θ 总有一实数解．因此，总存在互相正交而强度相等的一对方向．对于这一对方向，电振动的相干度 $|\mu_{xy}|$ 有极大值，并且此值等于波的偏振度 P.[1)]

§ 10.8.3 准单色平面波的斯托克斯参量

我们已经看到，为了表示准单色平面波的特征，一般需要四个实量，例如 J_{xx}，J_{yy} 以及 J_{xy}(或 J_{yx}) 的实部和虚部．斯托克斯[2)]

---

1) E. Wolf 讨论过这对特殊方向的几何意义，见 *Nuovo Cimento*, **13** (1959), pp. 1180—1181.

2) G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **9** (1852), 399. 转载于他的 *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III (Cambridge University Press, 1901), p. 233. 又见 P. Soleillet, *Ann. de Physique* (10), **12** (1929), 23; F. Perrin, *J. Chem. Phys.*, **10** (1942), 415; S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Oxford, Clarendon Press, 1950), § 15; M. J. Walker, *Amer. J. Phys.*, **22** (1954), 170; E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884; S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **44** (1956), 398; 同上, **57** (1963), 218, 231.

斯托克斯参量也用于基本粒子极化的量子力学处理．参看 U. Fano, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39** (1949), 859; 同上, **41** (1951), 58; *Phys. Rev.*, **93** (1954), 121; D. L. Falkoff and J. E. MacDonald, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41**

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在部分偏振光的研究中，曾引入一种稍有不同的四参量表示法，它与目前这一种有密切关系．在§1.4.2中，我们曾见过它局限于单色光的形式．一般的斯托克斯参量是下述四个量：

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \langle a_1^2\rangle + \langle a_2^2\rangle, \\ s_1 &= \langle a_1^2\rangle - \langle a_2^2\rangle, \\ s_2 &= 2\langle a_1 a_2 \cos\delta\rangle, \\ s_3 &= 2\langle a_1 a_2 \sin\delta\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

式中，同前，a_1 和 a_2 是电矢量的两个正交分量 E_x，E_y 的瞬时振幅，$\delta = \phi_1 - \phi_2$ 是它们的位相差．当光是单色光时，a_1，a_2 和 δ 都与时间无关，而(62)式化为§1.4(43)式所定义的"单色斯托克斯参量"．

由(62)和(4)式得出，斯托克斯参量和相干矩阵元由下述公式相联系：

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= J_{xx} + J_{yy}, \\ s_1 &= J_{xx} - J_{yy}, \\ s_2 &= J_{xy} + J_{yx}, \\ s_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}). \end{aligned}\right\} \text{(63a)} \qquad \left.\begin{aligned} J_{xx} &= \frac{1}{2}(s_0 + s_1), \\ J_{yy} &= \frac{1}{2}(s_0 - s_1), \\ J_{xy} &= \frac{1}{2}(s_2 + is_3), \\ J_{yx} &= \frac{1}{2}(s_2 - is_3). \end{aligned}\right\} \text{(63b)}$$

同相干矩阵元一样，任一准单色的平面波的斯托克斯参量可由简单的实验确定．同前，设 $I(\theta, \varepsilon)$ 表示 y 分量相对于 x 分量有一推迟量 ε 时光振动在与 OX 成 θ 角的方向上的强度，则根据

(1951)，861；W. H. McMaster, *Amer. J. Phys.*, **22** (1954), 351；J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Cambridge, Mass., Addison-Wesley Publ. Co., 1955), §2.8．又见 N. Wiener, *Acta Math.*, **55** (1930), §9．尤其是 pp. 189—192．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(11)和 (63a) 式,有

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0), \\ s_1 &= I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0), \\ s_2 &= I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \\ s_3 &= I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

参量 s_0 显然代表总强度. 参量 s_1 等于起偏振器接收在方位角 $\theta = 0^\circ$ 上的线偏振时透过的光强度与起偏振器接收在方位角 $\theta = 90^\circ$ 上的线偏振时透过的光强度之差. 参量 s_2 对于方位角 $\theta = 45^\circ$ 和 $\theta = 135^\circ$ 来说,也有类似的解释. 最后,参量 s_3 等于接收右旋圆偏振的装置所透过的光强度与接收左旋圆偏振的装置所透过的光强度之差.

如果利用 (63b) 式,就可以用斯托克斯参量而不用相干矩阵来表示以前的结果. 特别是,条件(8)即 $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \geqslant 0$ 变为

$$s_0^2 \geqslant s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \qquad (65)$$

对于单色光,根据(30)式,有 $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0$,于是在(65)式中等号成立,与 § 1.4(44)式一致.

现在讨论利用斯托克斯参量表示法,把一给定的波分解为互相独立的非偏振部分和偏振部分. 由 (41) 和 (63) 式得出,各个独立波混合的斯托克斯参量是各个波各自的斯托克斯参量之和. 由(27)和 (63 a)式得出,非偏振波(自然光波)由 $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ 表征. 用单个符号 $\boldsymbol{s}$ 来表示四个斯托克斯参量 s_0, s_1, s_2, s_3,显然,由 $\boldsymbol{s}$ 表征的波所要求的分解为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^{(1)} + \boldsymbol{s}^{(2)}, \qquad (66)$$

式中

$$\boldsymbol{s}^{(1)} = s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},\ 0,\ 0,\ 0, \qquad (67a)$$

$$\boldsymbol{s}^{(2)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},\ s_1,\ s_2,\ s_3. \qquad (67b)$$

$\boldsymbol{s}^{(1)}$ 代表非偏振部分,$\boldsymbol{s}^{(2)}$ 代表偏振部分. 因此,用斯托克斯参量表示,原来的波的偏振度为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$P = \frac{I_{偏振}}{I_{总}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}, \tag{68}$$

把(63)式代入(52)式，同样亦可证实上式。也不难写出关于偏振部分(67b)的偏振椭圆的椭圆率和取向的表达式。同§1.4(28)式一样，如果

$$\tan\chi = \pm b/a \qquad (-\pi/4 < \chi \leqslant \pi/4)$$

代表短轴与长轴的比值，以及描绘椭圆采取的方向，($\chi \gtrless 0$ 取决于偏振是右旋或左旋)，则根据(67b)和§1.4(45c)式，

$$\sin 2\chi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}; \tag{69}$$

并且，根据(67b)和§1.4(46)式，长轴与 OX 的夹角 $\psi(0 \leqslant \psi < \pi)$ 为

$$\tan 2\psi = \frac{s_2}{s_1}. \tag{70}$$

我们看到，斯托克斯参量正如相干矩阵一样，为系统分析准单色波的偏振状态提供了一种有用的方法。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第十一章 严格的衍射理论

§11.1 引 言

根据麦克斯韦方程以及标准边界条件，电磁辐射经障碍物的散射就成为一个确定的数学边值问题. 本章中，根据这个观点发展了单色波衍射理论的某些方面，特别是详尽地给出完全导电半平面的衍射这一经典问题的严格解.

在杨氏，菲涅耳和基尔霍夫的早期理论中，曾假定衍射障碍物是完全“黑”的；这就是说，假定落在障碍物上的全部辐射都被吸收了，而没有任何反射. 这是使得绝对“黑度”这一概念不可能合理地精确定义而含糊的根源；这确实是同电磁理论不相容的.

衍射物体具有有限介电常数和有限电导率的一些情况已作过理论探讨，1908年米氏对球散射的讨论是对这种情况最早的综合处理之一，它将在第十三章金属光学中叙述. 然而，一般地说，有限电导率的假定导致数学上很复杂，通常希望采纳完全导电(因此完全反射)物体的概念. 这显然是理想化的，但它与电磁理论相容；而且，由于某些金属(例如铜)的电导率很大，因此当频率不太高时，它可作为一种良好的近似，不过应当强调这种近似对于光频决不是完全适用的. 在大多数基于严谨数学表述的处理中都作了衍射障碍物具有无限大电导率的简化假定，以后的讨论均限于这种情况.

索末菲[1]在1896年给出了这类衍射问题的第一个严格解，当时他处理了平面波入射到一个无限薄完全导电半平面上的二维情

1) A. Sommerfeld, *Math. Ann.*, **47** (1896), 317.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

况．这一成就之所以闻名，部分是依靠求解的技巧，部分是基于下述引人注目的事实：它可以用菲涅耳积分精确而简单地表达，而菲涅耳积分已成为先前的一些近似理论的显著特征．

许多数学家沿着索末菲的方向工作．他的问题的早期变型讨论了线源和点源，以及值得注意地推广到处理一个楔形物而不是半平面，这些工作是与卡斯洛（Carslaw）[1]，麦克唐纳（Macdonald）[2] 和布罗威奇（Bromwich）[3] 的名字联系在一起的．由于受到超短波射电技术进展的刺激，还着手于其他一些问题，并引入了一些更近代的新方法．在开始讨论本章主要内容以前，首先很简要地说明上述某些研究的实质．

如果存在一正交坐标系，如 u_1，u_2，u_3，使得衍射物体表面与诸曲面 u_i = 常数中之一相合，则适宜用分离变量解偏微分方程的经典方法；这正是上述有限电导率的球情况下的米氏方法．边值问题的解一般就作为无穷级数出现，它的有效性取决于能算出有关函数的容易程度及级数收敛的速度．这种方法已用于球以外的各种情况，特别是用于圆盘或圆孔[4]．不过应当指出，某些工作只与严格标量问题有关，例如小振幅声波理论中的一些工作；如后面所述，电磁理论中的二维问题本质上属于这一类型，否则电磁场的矢量性质导致进一步复杂化．

瑞利[5]显然最早考虑过另一种基于积分方程表述的方法．某些问题，最简单的是半平面问题，得出的积分方程可用维纳和霍普夫方法[6] 严格解出；科普森（Copson）[7]，施温格（Schwinger）和其他

---

1) H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30** (1899), 121.
2) H. M. Macdonald, *Electric Waves* (Cambridge University Press, 1902).
3) T. J. I'A. Bromwich, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1916), 450.
4) C. J. Bouwkamp, *Dissertation*, Groningen, 1941. J. Meixner and W. Andrejewski, *Ann. d. Physik*, **7** (1950), 157.
5) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43** (1897), 259.
6) 对维纳-霍普夫方法的讨论，见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 339.
7) E. T. Copson, *Quart. J. Maths.*, **17** (1946), 19.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

人对这一事实的评价导致了一些新的闭型解[1]. 关于这方面还应提到有效的变异方法，虽然有些复杂，但可用来计算通过小孔衍射的功率[2].

因篇幅所限，本章的讨论主要限于一种方法[3]. 首先，阐述电磁波被完全导电结构散射的理论中带有相当普遍性的某些方面. 其次，引入一种把任何场表示为对平面波谱求积分的方法，并证明这种表示法导致使用"对偶"积分方程[4]表述某些衍射问题. 因此索末菲半平面问题就容易处理了，由此得出并且相当详细地讨论了这个问题的解，以及一些衍生的结果. 还讨论了几个相近的问题.

§11.2 边界条件与面电流

众所周知，电磁场只有很小一部分透入到良导体内. 如下文的论证所示，电导率无限大的理想化情况则完全没有透入，结果形成了电流纯粹存在于导体表面上的概念.

麦克斯韦旋度方程的一个结果(见§1.1.3)是，在穿过一无限薄的电流层时，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量连续，而 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量不连续；更具

---

1) J. F. Carlson and A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **4**(1947), 313; **5** (1947), 82. A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6** (1948), 157, 215. H. Levine and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **73** (1948), 383. 更广泛的参考文献目录，见 J. W. Miles, *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 760, 和 C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17** (1954), 35.

2) H. Levine and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **74** (1948), 958; **75** (1949), 1423.

3) 对于其他方法的一般介绍，见 G. Wolfsohn 在 *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), p. 263 的论文; B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 1950), 第4章和第5章, 以及 H. Hönl, A. W. Maue 和 K. Westpfahl 在 *Handbuch d. Physik*, Vol. 25/1 (Berlin, Springer, 1961) 中的论文. Bouwkamp 上述的评述，概括给出了各种方法和公式的充分综合的选择.

4) "对偶"积分方程(其定义在后面746—747页)的讨论，见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 334.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

体地讲，$\boldsymbol{H}$ 的不连续性是在垂直于面电流密度[1] $\boldsymbol{J}$ 的切向分量中，其值为 $4\pi\boldsymbol{J}/c$，这些方向的相对指向如图 11.1 所示。而且，跟 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量的行为一致，穿过该电流薄层时，$\boldsymbol{H}$ 的法向分量连续，而 $\boldsymbol{E}$ 的法向分量不连续，其不连续值等于面电荷密度的 4π 倍。因此，显然得知，在一个完全导电物体外部自由空间中的场，将使得在该导体表面上

(a) $\boldsymbol{E}$ 的切向分量为零；

(b) $\boldsymbol{H}$ 的切向分量垂直于面电流密度 $\boldsymbol{J}$，其指向如上述，其值为 $4\pi\boldsymbol{J}/c$；

(c) $\boldsymbol{H}$ 的法向分量为零；

(d) $\boldsymbol{E}$ 的外法向分量等于面电荷密度的 4π 倍。

图 11.1 $\boldsymbol{H}$ 的不连续性与面电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的方向之间的关系的示意。$\boldsymbol{H}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{H}^{(2)}$ 是表面两侧 1 和 2 各自的磁场

辐射落在一完全导电物体上的效应，利用感生面电流可方便地作出解释。如果 $\boldsymbol{E}^{(i)}$ 是入射场的电矢量，$\boldsymbol{E}^{(s)}$ 是由感生电流引起的"散射"场的电矢量，则总电矢量处处均为 $\boldsymbol{E}^{(i)}+\boldsymbol{E}^{(s)}$。因此，衍射问题可表述如下：给定 $\boldsymbol{E}^{(i)}$，寻找这样的一个场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$，它能由导体表面的电流分布产生，并且它在该表面的切向分量是 $\boldsymbol{E}^{(i)}$ 相应切向分量的负值。值得重视的是，上述边界条件 (a) 是基本的，并且单用它就足以用上述形式唯一地确定问题[2]。至于其他的边界条件，(b)的意义是表示场与感生电流有关，而(c)和(d)没有特别的意义。

应当注意，导体内部各点处 $\boldsymbol{E}^{(s)}=-\boldsymbol{E}^{(i)}$ 的含义，是在任一闭曲面 S 上有唯一的电流密度存在，它在 S 内部所有各点处再生

1) 面电流在 § 1.1.3 中用 $\boldsymbol{j}$ 表示。
2) 唯一性证明的论述，出现某些困难，推迟到后面的 § 11.9。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的场是由位于 S 外部的源引起的. 同样，考虑辐射落在其上的完全导体界面是一完全无限大平面的情况，由此得出在任一平面上有唯一的电流密度存在，它在该平面一侧再生的场是由位于平面另一侧的源引起的.

在完全导电屏的衍射问题中，需要假定屏是无限薄的；如果不是这样的假定，则数学上的困难将变得很大. 当然，仍须保持屏的不透明性，事实上这一概念只是其厚度在极限时趋于零的完全导体的概念. 根据上述，这样的一个屏的效应可以用一个电流薄层来解释，现在的差别在于该薄层不再是闭曲面. 特别感兴趣的是该薄层为平面时的比较简单的情况；在这种情况下，可立即导出它辐射的场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$, $\boldsymbol{H}^{(s)}$ 所满足的某些重要关系式，它们在下面给出.

设电流薄层占有平面 $y=0$ 的一部分. 则由于对称性，显然有

$$\left.\begin{aligned}
E_x^{(s)}(x, y, z) &= E_x^{(s)}(x, -y, z),\\
E_y^{(s)}(x, y, z) &= -E_y^{(s)}(x, -y, z),\\
E_z^{(s)}(x, y, z) &= E_z^{(s)}(x, -y, z),\\
H_x^{(s)}(x, y, z) &= -H_x^{(s)}(x, -y, z);\\
H_y^{(s)}(x, y, z) &= H_y^{(s)}(x, -y, z),\\
H_z^{(s)}(x, y, z) &= -H_z^{(s)}(x, -y, z).
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

而且，如果薄层内电流密度具有分量 J_x 和 J_z，显然，在 $y=0$ 平面上，

$$H_x^{(s)} = \mp\frac{2\pi}{c}J_z, \qquad H_z^{(s)} = \pm\frac{2\pi}{c}J_x, \tag{2}$$

取上面或下面的符号随 y 通过正值或通过负值到零而定. 如下一节所述，这些简单关系式应用于有兴趣的平面屏衍射问题时，将导出一个有用的公式，特别是，它明显地给出巴俾涅原理的严格的电磁相似形式.

§11.3 平面屏的衍射：巴俾涅原理的电磁形式

设电磁场 $\boldsymbol{E}^{(i)}$, $\boldsymbol{H}^{(i)}$ 入射到位于 $y=0$ 平面内的一组无限薄

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的完全导电的层状体上．设 M 表示金属占有的平面面积，A 表示其余的“开孔”，因此，M 和 A 一起构成了整个平面． M 或 A，或 M 和 A 两者，都可能具有无限广延性．

如前所述，寻找一个在 M 上满足某种边界条件的散射场．现在由 § 11.2(1) 式看来，实际上，只要明确承认通过 A 的连续性要求，则仅需考虑在半空间 $y \geqslant 0$ 或 $y \leqslant 0$ 内的散射场．因此，问题可表述如下：在 $y \geqslant 0$（或 $y \leqslant 0$）内，寻找一个能由 $y = 0$ 上的电流产生的电磁场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$, $\boldsymbol{H}^{(s)}$，使得

$$\text{(I)}\quad E_x^{(s)} + E_x^{(i)} = E_z^{(s)} + E_z^{(i)} = 0, \qquad \text{在 } M \text{ 上},$$

$$\text{(II)}\quad H_x^{(s)} = H_z^{(s)} = 0, \qquad \text{在 } A \text{ 上}.$$

这里，(I) 是完全导体的基本边界条件，而由 § 11.2(2) 式得出的 (II) 是表示 A 上没有感生电流的简便方法． 如果散射场在 $y \geqslant 0$ 内满足 (II)，并用 § 11.2(1) 式推导出 $y \leqslant 0$ 内的散射场，则得出通过 A 是连续的．

现在可以容易地导出关于电磁波和完全导电屏的巴俾涅原理的一种精确形式[1]．同经典的原理(§ 8.3.2)一样，建立单有屏时存在的场和单有“互补”屏时存在的场之间的关系，互补屏是把导电的层状体和开孔互换得出的；二者的差别在于入射到互补屏上的场不再与入射到原来屏上的场相同，而是通过 $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$ 的变换由后者导出．

于是，在第一种情况下，设 $\boldsymbol{E}_1^{(i)} = \boldsymbol{F}^{(i)}$ 所定义的场(下标 1)在 $y > 0$ 内入射到上述的屏上．由 (I) 和 (II) 得出，

$$\text{(I}'\text{)}\quad E_{1x}^{(s)} = -F_x^{(i)},\quad E_{1z}^{(s)} = -F_z^{(i)}, \qquad \text{在 } M \text{ 上},$$

$$\text{(II}'\text{)}\quad H_{1x}^{(s)} = H_{1z}^{(s)} = 0, \qquad \text{在 } A \text{ 上}.$$

在第二种情况下，设 $\boldsymbol{H}_2^{(i)} = \boldsymbol{F}^{(i)}$ 所定义的场（下标 2）入射到互补屏上．因此，这时利用总场写出边界条件，有

$$\text{(I}''\text{)}\quad E_{2x} = E_{2z} = 0, \qquad \text{在 } A \text{ 上},$$

---

1) H. G. Booker, *J. Instn. Elect. Engrs.*, **93** Pt. III A (1946), 620. L. G. H. Huxley, *The Principles and Practice of Waveguides* (Cambridge University Press, 1947), p. 284.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(II″)　$H_{2x}=F_x^{(i)}$，　$H_{2z}=F_z^{(i)}$，在 M 上.

因为自由空间内的麦克斯韦方程经 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}$ 变换后不变，并且因为在 $y=0$ 上有唯一的面电流密度，它可在 $y\leqslant 0$ 内所有各点处产生入射场，所以，分别比较 (I′)，(II′) 与 (II″)，(I″)，就清楚地得出，在屏后面的半空间内，

$$\dot{\boldsymbol{H}}_1=-\boldsymbol{E}_1^{(i)}. \tag{1}$$

利用总场 $\boldsymbol{E}_1$，由(1)式得出，

$$\boldsymbol{E}_1+\dot{\boldsymbol{H}}_2=\boldsymbol{F}^{(i)}, \tag{2}$$

这就是所要求的巴俾涅原理的电磁形式.

§11.4　平面屏的二维衍射

§11.4.1　二维电磁场的标量性质

一个完全与某一笛卡儿坐标(如 z)无关的问题，称为二维问题. 曾经讲过，电磁理论中这类问题本质上是具有标量性质的，因为它们可以直接用单个因变量来表示. 现在将证明这一点.

略去时间因子 $\exp(-i\omega t)$，并写出 $k=\omega/c$，则自由空间内的麦克斯韦方程为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=-ik\boldsymbol{E},\qquad \mathrm{curl}\boldsymbol{E}=ik\boldsymbol{H}.$$

使所有对 z 的偏微商都等于零，上面这些式子可分为相互独立的两组：

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=ikH_x,\quad \frac{\partial E_z}{\partial x}=-ikH_y,\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-ikE_z, \tag{1}$$

和

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=-ikE_x,\quad \frac{\partial H_z}{\partial x}=ikE_y,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=ikH_z. \tag{2}$$

第一组只包含 H_x, H_y, E_z，第二组只包含 E_x, E_y, H_z. 因此把任何一组解分解为这两组解的线性组合，就能变得简单了，对于这两组解，上述两组因变量中总有一组的三个因变量都为零. 为了命名，我们把这两类场的特征表示如下：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

E偏振

$$E_x = E_y = H_z = 0,$$

$$H_x = \frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \qquad H_y = -\frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial x},$$

并且,将 H_x 和 H_y 代入(1)的第三式,显然得出

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0.$$

这里用 E_z 确定了完全场,它当然满足二维形式的标准波动方程.

H偏振

$$H_x = H_y = E_z = 0,$$

和

$$E_x = -\frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

这里用 H_z 确定了完全场.

§ 11.4.2 平面波的角谱

目前讨论限于二维问题,对此已证明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的笛卡儿分量满足下述方程:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0 \tag{3}$$

上式必须在适当的边界条件下求解.

(3)式的基本解是

$$e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}, \tag{4}$$

r, $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 是极坐标,由方程 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 与 x, y 相联系. 如果 α 是实数,则(4)式代表**均匀**平面波,即它的等幅平面与等相平面重合的平面波, α 是传播方向与 x 轴的夹角(图 11.2a). 另一方面,如果 α 是复数,则(4)式代表**非均匀**平面波,即它的等幅平面与等相平面不重合的平面波. 实际上,写出 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, 式中 α_1 和 α_2 都是实数,则(4)式变为

$$e^{ikr\cosh\alpha_2\cos(\theta-\alpha_1)}e^{-kr\sinh\alpha_2\sin(\theta-\alpha_1)}, \tag{5}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由此得出，等幅平面与等相平面相互垂直(图 11.2b)；位相传播方向与 x 轴的夹角为 α_1，相速减小到 $1/\text{sech}\,\alpha_2$，并且在垂直方向上有指数衰减，取决于衰减因子 $k\sinh\alpha_2$.

现在可以证明[1]，(3)式的任何解都可以通过适当选择积分路线和函数 $f(\alpha)$ 而纳入平面波角谱

$$\int f(\alpha)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$$

的形式. 这种表示法与一个任意函数利用傅里叶积分的表示法有密切联系，在应用中同样很有效. 可以规定某一条固定的积分路线而没有明显失去一般性，因此任一问题都变为确定适当的 $f(\alpha)$ 的问题. 我们将首先用这种方法表示由平面电流薄层产生的电磁场，然后证明这个结果导致使用对偶积分方程来表述平面屏的衍射问题.

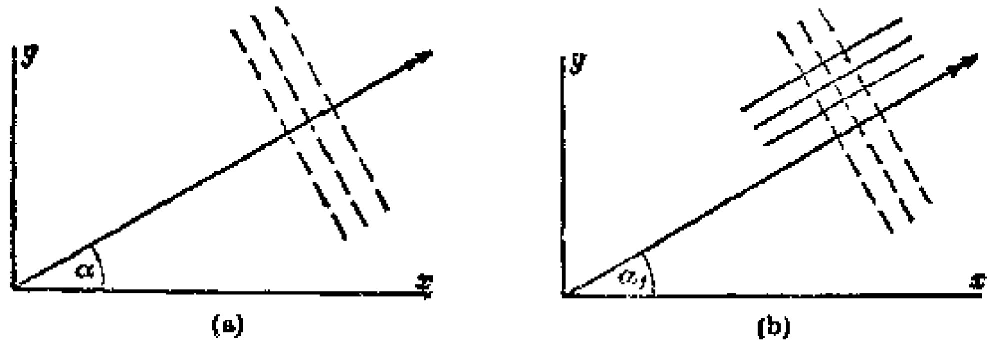


图 11.2

(a) α 为实数时用(4)式表示的均匀平面波；虚线表示等幅平面和等相平面两者

(b) α 为复数时用(4)式表示的非均匀平面波；实线表示等幅平面，虚线表示等相平面

考虑在 $y=0$ 上的二维电流薄层. 前已指出，分开处理 E 偏振和 H 偏振是方便的. 首先处理前一种情况，其中电流密度只有一个 z 分量 J_z，并且从下述提问开始，即怎样的特定分布会把 E 偏振的平面波

1) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, 1927), p. 397.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\boldsymbol{E}=(0,0,1)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)},\boldsymbol{H}=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} \quad (6)$$

辐射到 $y>0$ 的半空间中去. 实际上,由§11.2.(2)的第1式立即看出,在$(\xi,0)$点处,

$$J_z(\xi)=-\frac{c}{2\pi}e^{ik\xi\cos\alpha}\sin\alpha. \quad (7)$$

当然, 这可以用赫兹势的标准方法求出电流分布所产生的场来证实,不过这时需要计算一个很复杂的积分.

现在, 概括地说, 任何一种电流分布都可以由(7)式取不同的 α 值适当叠加而成,其辐射场则由平面波(6)式相应叠加得出. 更确切地说,设电流密度可以用傅里叶积分的形式写为

$$J_z(\xi)=-\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\mu)e^{ik\xi\mu}d\mu. \quad (8)$$

改换变量 $\mu=\cos\alpha$, 得出

$$J_z(\xi)=-\frac{c}{2\pi}\int_C \sin\alpha\ P(\cos\alpha)e^{ik\xi\cos\alpha}d\alpha, \quad (9)$$

式中 C 是复 α 平面上的路线, 沿着这条路线,从∞经 $\cos\alpha$ 实值范围到$-\infty$,如图11.3所示. 因此,得出的非零场分量为

$$E_z^{(s)}=\int_C P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \quad (10)$$

$$H_x^{(s)}=\pm\int_C \sin\alpha\ P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \quad (11)$$

$$H_y^{(s)}=-\int_C \cos\alpha\ P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \quad (12)$$

$y\geqslant 0$ 时用上面的符号, $y\leqslant 0$ 时用下面的符号.

(10), (11)和(12)式代表由函数 $P(\cos\alpha)$ 确定的平面波谱形式的场. 相应于 C 沿实轴那一段的各个平面波都是均匀的; 它们辐射到 $y>0$ 和 $y<0$ 的区域内, 其传播方向在每个区域内都包含角 π 的范围,如图11.4所示. 相应于 C 的两臂(其上 $\alpha=i\beta$ 和 $\alpha=\pi-i\beta$, $\beta=0$ 到∞) 的平面波都是非均匀的; 它们所有的位相传播方向都沿着正或负 x 轴, 并且它们在垂直离开 $y=0$ 平面的方向上按指数衰减. 通过考察坡印廷矢量不难证明, 平均说来没有能量被任何这些倏逝波 (evanescent wave) 从 $y=0$ 平面带

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

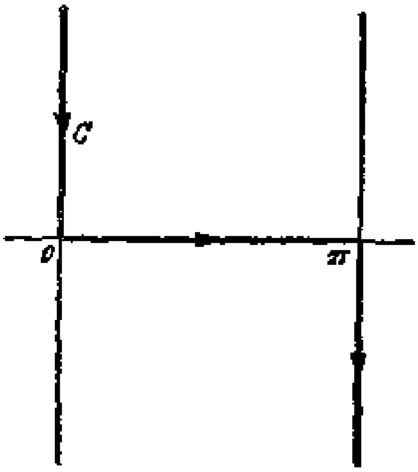


图 11.3 复 α 平面上的路线 C

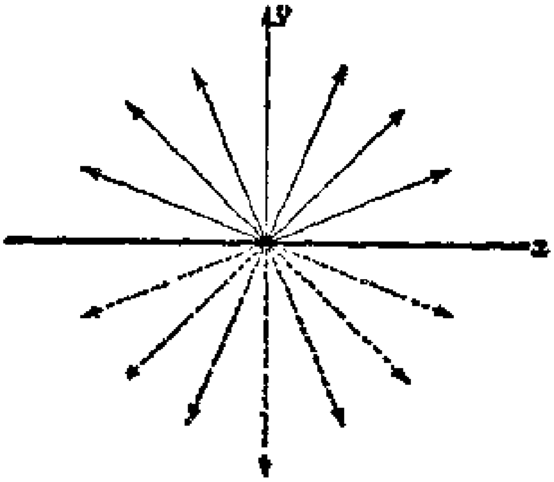


图 11.4 均匀波的传播方向示意，它们辐射到半空间 $y>0$（实线）和半空间 $y<0$（虚线）内

走. 为了计及比一个波长还精细的电流分布结构，这些倏逝波的存在是必要的.

对于H偏振的情况，由 $y=0$ 上的电流密度 J_x 产生的场同样可写成

$$H_z^{(s)}=\pm\int_C P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \tag{13}$$

$$E_x^{(s)}=-\int_C \sin\alpha\ P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \tag{14}$$

$$E_y^{(s)}=\pm\int_C \cos\alpha\ P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \tag{15}$$

$y\geqslant 0$ 时用上面的符号，$y\leqslant 0$ 时用下面的符号. 此时

$$J_x(\xi)=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}}e^{ik\xi\mu}d\mu. \tag{16}$$

§11.4.3 利用对偶积分方程表述

现在可以利用对偶积分方程表述被平面屏衍射的二维问题.

设电磁场 $\boldsymbol{E}^{(i)}$, $\boldsymbol{H}^{(i)}$ 入射到位于 $y=0$ 的一组无限薄的完全导电的条带上；用 M 标示金属占有的 x 轴范围，用 A 标示内无金属的 x 轴范围. 如果散射场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$, $\boldsymbol{H}^{(s)}$ 表示为平面波的角谱，其形式为 §11.4(10),(11),(12)或(13),(14),(15)随偏振而定，则由

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 11.3 的条件 (I) 和 (II) 得出下述积分方程:

E 偏振

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} e^{ikx\mu} d\mu = -E_z^{(i)}, \text{ 在 } M \text{ 上}, \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) e^{ikx\mu} d\mu = 0, \quad \text{在 } A \text{ 上}. \tag{18}$$

H 偏振

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) e^{ikx\mu} d\mu = E_x^{(i)}, \text{ 在 } M \text{ 上}, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} e^{ikx\mu} d\mu = 0, \text{ 在 } A \text{ 上}. \tag{20}$$

考虑到把 $\mathscr{R}\alpha = 0$ 和 $\mathscr{R}\alpha = \pi$ ($\mathscr{R}$ 表示实部) 之间的复 α 平面映射入整个复 μ 平面 ($\mu = \cos\alpha$) 的方法，得知沿实轴的积分路线避开了在 $\mu = \pm 1$ 处的可能支点，如图 11.5 所示。这类积分方程，其中单一未知函数 $P(\mu)$ 对于参量 x 的两个不同区域满足不同方程，称为"对偶"积分方程[1].

§ 11.1 中提到的科普森，施温格和其他人所使用的表述与上述稍有不同之处在于前者只包含单一积分方程. 虽然它不是这里需要的，但仍应指出它与上述方法的联系. 对于 E 偏振的情况，例如，(16)式的解通过取它的傅里叶变换得出，可写成下述形式:

$$P(\mu) = -\frac{k}{c}\int_M J_z(\xi) e^{-ik\mu\xi} d\xi, \tag{21}$$

它当然与(8)式以及在 A 上 $J_z(\xi) = 0$ 的事实一致. 把这个 $P(\mu)$

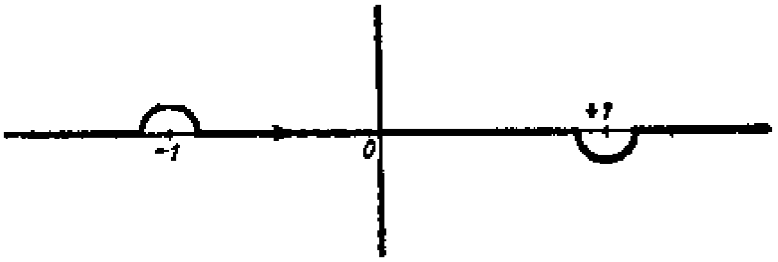


图 11.5 复 μ 平面上从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分路线

1) E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 334.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

值代入(17)式，并对 μ 积分，就得出对 $J_z(\xi)$ 求解的积分方程：

$$\frac{k}{c}\int_M J_z(\xi)H_0^{(1)}(k|x-\xi|)d\xi = E_z^{(i)}, \text{ 在 } M \text{ 上}, \qquad (22)$$

式中含有第一类零阶汉克耳（Hankel）函数 $H_0^{(1)}$。显然，(22)式左边可借助于感生电流密度从散射场的直接表达式导出。

§11.5 半平面对平面波的二维衍射

§11.5.1 E 偏振对偶积分方程的解

在下面几页中，通过得出适当对偶积分方程的简单的显解，严格处理平面波被半无限平面片的衍射。

首先考虑 E 偏振的平面波

$$E_z^{(i)} = e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)} \qquad (1)$$

入射到完全导电的半平面 $y=0$, $x>0$ 上，为了方便起见，上式中已假定 α_0 是实数，且 $0<\alpha_0<\pi$（图11.6）。现在，§11.4 的(17)和(18)式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}}e^{ikx\mu}d\mu = -e^{-ikx\mu_0}, \quad x>0, \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\mu)e^{ikx\mu}d\mu = 0, \quad x<0, \qquad (3)$$

式中 $\mu_0=\cos\alpha_0$。我们利用围道积分的标准方法着手解这些方程。

在(3)式左边的积分中，x 是负的，因此，由约旦引理[1]，只要当 $0\geqslant\arg\mu\geqslant-\pi$ 时，随着 $|\mu|\to\infty$, $P(\mu)\to 0$，我们就能够用一个在实轴下方的无限大的半圆来闭合积分路线，而不对积分造成任何附加的贡献。因此为了满足(3)式，仅进一步要求 $P(\mu)$ 应在积分路线下方的半平面内没有奇点，因为这时积分实际上绕一闭合围道，在其内部，被积函数是正则的。

---

1) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, 1920), p. 115.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

同样，在(2)式左边的积分中，x 是正的；假定当 $\pi \geqslant \arg\mu \geqslant 0$ 时，随着 $|\mu| \to \infty$，$\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} \to 0$，我们就能够用一个在实轴上方的无限大的半圆来闭合积分路线，而不对积分造成任何附加的贡献。因此，如果 $U(\mu)$ 是在积分路线上方的半平面内无奇点的任一函数，并在 $|\mu| \to \infty$ 处具有适当的特性，则只要积分路线凹在 $\mu = -\mu_0$ 处的极点之下，如图 11.7 所示，显然

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)}\frac{1}{(\mu+\mu_0)} \tag{4}$$

满足(2)式。因(4)式的右边函数唯一有关的奇点是 $\mu = -\mu_0$ 处的极点，其留数为 $\frac{-1}{(2\pi i)}$，根据柯西留数定理，它对(2)式中的积分正好贡献一项 $-\exp(-ikx\mu_0)$。

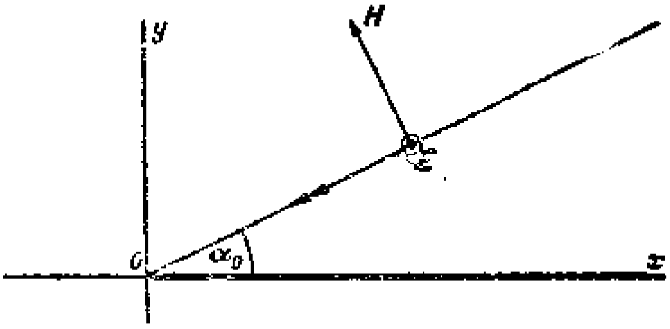


图 11.6 入射在完全导电半平面上的平面波

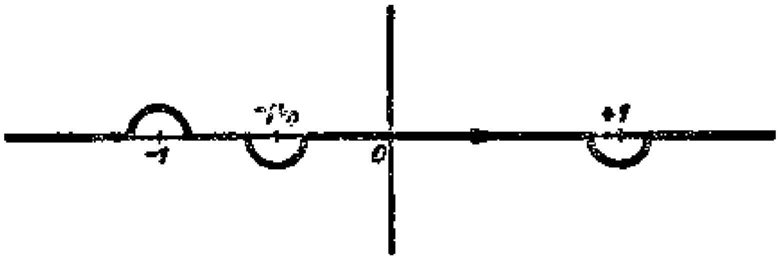


图 11.7 复 μ 平面上的积分路线

如果现在把(4)式改写为

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{(1-\mu)}}(\mu+\mu_0) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)}\sqrt{(1+\mu)}, \tag{5}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

则可以证明(5)式两边都是一个常数. 因左边在积分路线下方的半平面内无奇点,并且在无穷远处代数增长,而右边在积分路线上方的半平面内也同样如此. 所以,在整个复 μ 平面上使两边恒等的函数无奇点,并且在无穷远处代数增长. 因此它必定是一个多项式,而且由于对 $\arg\mu$ 的某些值,随着 $|\mu|\to\infty$, $P(\mu)\to 0$, 因此这个多项式只能含有一个常数项.

在(5)式右边令 $\mu=-\mu_0$, 就直接求出这一常数值,此时

$$P(\mu)=\frac{i}{2\pi}\frac{\sqrt{(1-\mu_0)(1-\mu)}}{\mu+\mu_0}, \tag{6}$$

或

$$P(\cos\alpha)=\frac{i}{\pi}\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}. \tag{7}$$

在§ 11.7.1 最后一段再阐明(7)式对 α 和 α_0 的对称性的含义.

由§ 11.4(10), (11), (12)式以及(7)式的 $P(\cos\alpha)$ 可得出散射场的分量,因此总场由下式给出:

$$E_z=e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}-\frac{1}{i\pi}\int_C\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \tag{8}$$

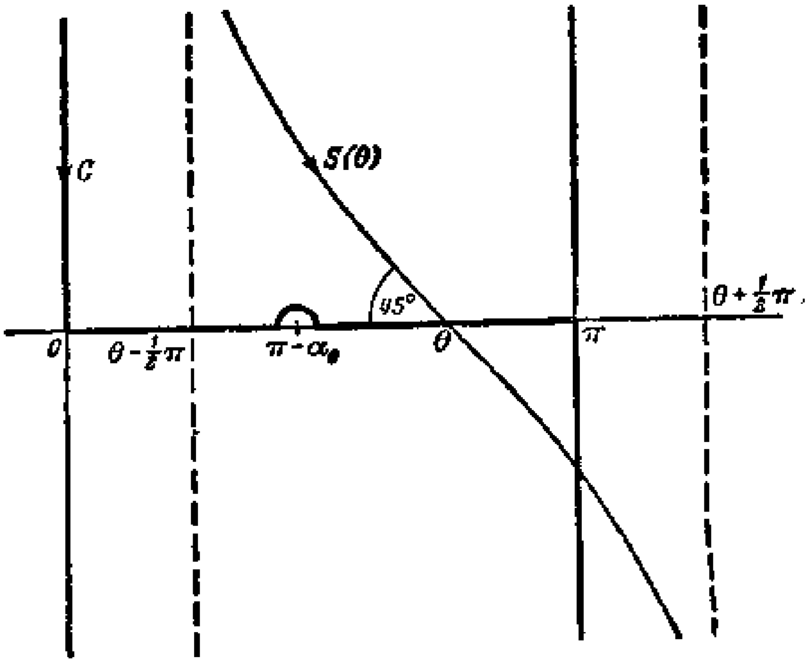


图 11.8 复 α 平面内的最速下降路线 $S(\theta)$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$y>0$ 时用上面的符号，$y<0$ 时用下面的符号. 这就完成了实际解，剩下的只是把它整理成更有效的形式.

§ 11.5.2 用菲涅耳积分表示的解

当 kr 较大时，即离原点的距离大于一个波长左右时，一般类型的积分

$$\int P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \tag{9}$$

可尝试用最速下降法(见附录 3)计算. 这种方法的第一步是把积分路线（正是考虑到被积函数中存在的任何奇点）变形为通过 $\alpha=\theta$ 处鞍点的最速下降路线 $S(\theta)$. 路线 $S(\theta)$ 如图 11.8 所示；沿着这条路线，新变量

$$\tau=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta) \tag{10}$$

从 $-\infty$ 经实数值到 ∞. 于是，积分(9)表现为下述形式：

$$\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{ikr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\cos\alpha)}{\sqrt{1+\frac{1}{2}i\tau^2}}e^{-kr\tau^2}d\tau, \tag{11}$$

由此可得出 $kr\gg1$ 时的渐近逼近.

实际上，这种方法应用于(8)式中的特殊积分，不用取近似，就能导出它用菲涅耳积分表示的表达式. 现在证明这一点.

首先考虑 $0<\theta<\pi$ 的情况. 因(7)式可表示为下述形式：

$$P(\cos\alpha)=\frac{1}{4\pi i}\left\{\sec\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)-\sec\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)\right\}, \tag{12}$$

所以计算

$$\int_{S(\theta)}\sec\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \tag{13}$$

就足够了，因为改变 α_0 的符号就可以接着写出 $\sec\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)$ 的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

贡献. 现在通过简单变换,(13)式成为

$$\int_{s(0)} \sec\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0+\theta)e^{ikr\cos\alpha}d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_{s(0)}\left\{\sec\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0+\theta)+\sec\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_0-\theta)\right\}e^{ikr\cos\alpha}d\alpha$$

$$=2\int_{s(0)}\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\theta)\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos(\alpha_0-\theta)}e^{ikr\cos\alpha}d\alpha, \qquad (14)$$

用代换

$$\tau=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

(14)式变为

$$-2e^{\frac{1}{4}i\pi}e^{ikr}\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-kr\tau^2}}{\tau^2-i\eta^2}d\tau, \qquad (15)$$

式中

$$\eta=\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0).$$

但

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi\tau^2}d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{\xi}},$$

上式乘以 $\exp(i\eta^2\xi)$, 然后对 ξ 从 kr 到无穷远积分,得出

$$e^{ikr\eta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-kr\tau^2}}{\tau^2-i\eta^2}d\tau=\sqrt{\pi}\int_{kr}^{\infty}\frac{e^{i\eta^2\xi}}{\sqrt{\xi}}d\xi$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}}{|\eta|}\int_{|\eta|\sqrt{kr}}^{\infty}e^{i\mu^2}d\mu. \qquad (16)$$

或引入记号

$$F(a)=\int_a^{\infty}e^{i\mu^2}d\mu \qquad (17)$$

作为复菲涅耳积分的一种形式[1], 则有

$$\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-kr\tau^2}}{\tau^2-i\eta^2}d\tau=\pm2\sqrt{\pi}\,e^{-ikr\eta^2}F\left\{\pm\eta\sqrt{kr}\right\}, \qquad (18)$$

---

1) 在这里,这种形式的菲涅耳积分比 §8.7(12) 式中定义的更方便;应注意积分限的改变.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\eta > 0$ 时用上面的符号，$\eta < 0$ 时用下面的符号.

综合这些结果，最后得出，对于 $y \geqslant 0$，

$$-\frac{1}{i\pi}\int_{S(\theta)} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0} e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$$

$$= -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}F\left[\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)\right]\right.$$

$$\left.\mp e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}F\left[\pm\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha_0)\right]\right\}, \quad (19)$$

$\theta+\alpha_0 < \pi$ 时用上面的符号，$\theta+\alpha_0 > \pi$ 时用下面的符号.

为了由(8)式得出完全场，只需考虑 $\alpha=\pi-\alpha_0$ 处的单极点. 当 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时，容易证明，把路线 C 变形为路线 $S(\theta)$，无穷远区是不作贡献的，并且由图 11.8 清楚地看出，当且仅当 $\pi-\alpha_0 > \theta$ 时，极点才被俘获. 由留数定理得出，它的贡献是

$$-e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}. \quad (20)$$

换句话说，它是几何光学的反射波，其中越过 $\theta=\pi-\alpha_0$ 的不连续性正好抵消了衍射场(19)式中的不连续性. 事实上，援引下述关系式：

$$F(a)+F(-a)=\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{4}i\pi}, \quad (21)$$

完全场(8)可写成下述形式：

$$E_z=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)\right]\right.$$

$$\left.-e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha_0)\right]\right\}, \quad (22)$$

它就是索末菲的著名结果.

当 $y<0$ 时，必须计算下述积分：

$$\int_C \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}e^{ikr\cos(\theta+\alpha)}d\alpha.$$

现在，适当的最速下降路线是 $S(2\pi-\theta)$，只当 $\theta>\pi+\alpha_0$ 时，$\alpha=\pi-\alpha_0$ 处的极点才被俘获，由此得出负的入射波. 整个场再

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

次由(22)式给出.

如§11.4.1所述，为了得出 **H** 的分量的相应表达式，只须求微商. 笛卡儿分量 H_x, H_y 和极坐标分量 H_r, H_θ 两者都是有兴趣的；鉴于(22)式是用 r, θ 表示的，因此方便的做法是，先由麦克斯韦方程

$$H_r = \frac{1}{ikr}\frac{\partial E_z}{\partial \theta}, \qquad H_\theta = -\frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{23}$$

导出后者，再由关系式

$$H_x = \cos\theta H_r - \sin\theta H_\theta, \qquad H_y = \sin\theta H_r + \cos\theta H_\theta$$

导出前者.

为使结果更简洁，引入下述记号：

$$u = -\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta - \alpha_0),$$

$$v = -\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta + \alpha_0), \tag{24}$$

$$G(a) = e^{-ia^2}F(a). \tag{25}$$

注意到

$$\frac{dG(a)}{da} = -1 - 2iaG(a).$$

因此(22)式表示为下述形式：

$$E_z = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr}\{G(u) - G(v)\}, \tag{26}$$

由此得出：

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr}\Big\{\sin(\theta - \alpha_0)G(u) - \sin(\theta + \alpha_0)G(v) \\ &\quad - i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\theta\Big\}, \\ H_\theta &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr}\Big\{\cos(\theta - \alpha_0)G(u) - \cos(\theta + \alpha_0)G(v) \\ &\quad + i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\theta\Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}H_x &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikr}\Big\{\sin\alpha_0[G(u)+G(v)] \\ &\quad + i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\theta\Big\}, \\ H_y &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikr}\Big\{\cos\alpha_0[G(u)-G(v)] \\ &\quad - i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\theta\Big\}.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

§ 11.5.3 解的性质

现在较详细地考察 § 11.5.2 中所给结果的性质. 由它们的推导清楚地看出，并能直接证明，对于任一个 α_0 值，$G(u)\exp(ikr)$ 本身是二维波动方程的一个解；值得注意之点是，它具有周期 4π，因此在屏的两面 $\theta=0$，$\theta=2\pi$ 上，$G(u)-G(v)$ 为零，但在 $\theta=\pi$ 上不为零；索末菲确实是通过寻求周期为 4π 的波动方程的一个适当解，并把它与它的"象"相结合，才得出他的结果(22)式[1]. 附带地，由(28)式得出，

$$\cos\frac{1}{2}\theta\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \qquad \sin\frac{1}{2}\theta\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

也是二维波动方程的解，这是一个众所周知的结果.

(26)式需考察的另一方面，是当 $r\to\infty$ 时它的特性. 这是一个简单易懂的问题，也是本节中随后讨论的主题.

半平面问题的一个很吸引人的特性是可以用菲涅耳积分表[2]计算任何一点的场. 而且在特别感兴趣的两种情况下，即 $kr\gg1$ 和 $kr\ll1$，可利用菲涅耳积分的简单近似(在 § 8.7.2 中已提到).

---

1) B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed. 1950), 第 4 章中较好的叙述了这种方法.

2) 为此目的，最方便的看来出自下文，见 R. A. Rankin, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **241** (1949), 457.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当然，前一种条件在光学实验中总是满足的，其中观察点离衍射棱边很可能有上百万个波长；后一种条件的出现与锐棱边附近场的特性有关，并可以在厘米射电波长下研究(见 § 11.5.6)。

$kr \gg 1$. 在这种情况下，除了 θ 的值分别充分接近 $\pi+\alpha_0$ 和 $\pi-\alpha_0$ 以外，$|u|$ 和 $|v|$ 都比 1 大得多。确切地说，我们引入五个区域，如图 11.9 所示。形成区域 II 和 IV 的边界的曲线方程分别取为 $u^2=1$ 和 $v^2=1$，因此这两条曲线都是抛物线，其焦点都在原点处，其轴各为 $\theta=\pi+\alpha_0$ 和 $\theta=\pi-\alpha_0$。充分深入区域 II 的内部(即在抛物线 $u^2=\varepsilon$ 内侧，式中 $\varepsilon \ll 1$)，则 $|u| \ll 1$；充分远离区域 II 之外，(即在抛物线 $u^2=\gamma$ 外侧，式中 $\gamma \gg 1$)，则 $|u| \gg 1$。$|v|$ 与区域 IV 有同样的关系。而且，$0<\theta<\pi-\alpha_0$ 时，u 和 v 都是负的；$\pi-\alpha_0<\theta<\pi+\alpha_0$ 时，u 是负的而 v 是正的；$\pi+\alpha_0<\theta<2\pi$ 时，u 和 v 都是正的。

区域 I，III 和 V 显然与由几何光学处理得出的那些区域密切有关，按照几何光学处理，光沿直线传播；即，如图 11.10 所示，在屏后面的阴影扇形区那里完全没有场存在，受照扇形区那里只有入射平面波，反射扇形区那里有入射平面波与适合于在无限大的屏上反射的反射平面波在一起。概括地说，事实上，区域 II 和 IV 是精确解从一个扇形区内的几何场到另一个邻近扇形区内的几何场之间实现平滑过渡的区域。为了更详细地了解这一点，我们应暂停推导自变量值较大时的菲涅耳积分的渐近逼近。

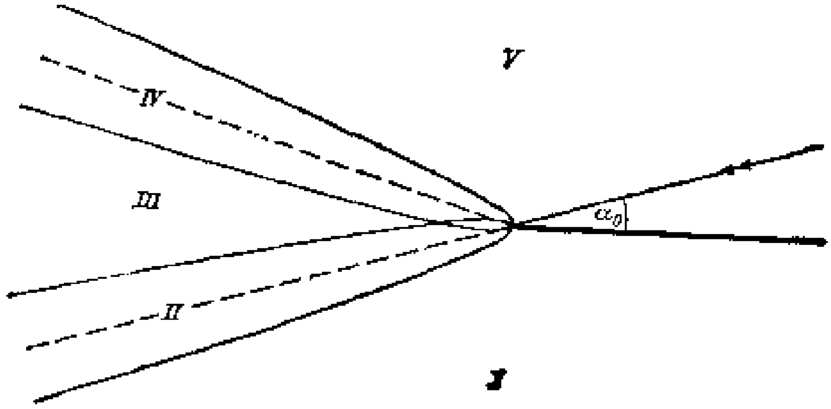


图 11.9　平面波被一完全导电的半平面衍射。可用五个区域来描述场的特性

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

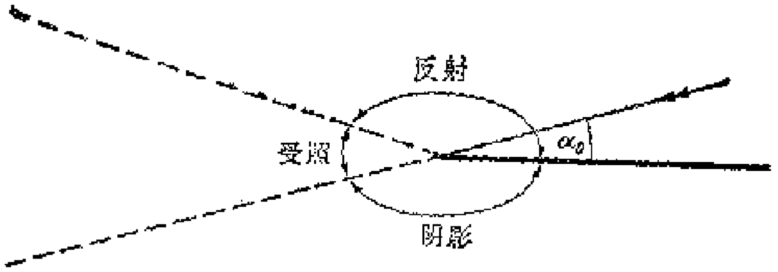


图 11.10 平面波被一完全导电的半平面衍射.几何光学的三个区域

如果 a 为正值,写出

$$G(a)=e^{-ia^2}\int_a^\infty \frac{d(e^{i\mu^2})}{2i\mu},$$

分部积分两次,得出

$$G(a)=\frac{i}{2a}+\frac{1}{4a^3}-\frac{3}{4}e^{-ia^2}\int_a^\infty \frac{e^{i\mu^2}}{\mu^4}d\mu. \tag{29}$$

事实上,这样继续做下去会得出 $G(a)$ 的完全的渐近展开式,但为了当前的目的,我们只注意到(29)式最后一项中的积分的模小于

$$\int_a^\infty \frac{d\mu}{\mu^4}=\frac{1}{3a^3}, \tag{30}$$

由此

$$G(a)=\frac{i}{2a}+O\left(\frac{1}{a^3}\right). \tag{31}$$

值得注意的是,根据§11.5.2 中概述的一般方法,把(18)式被积函数中的因子 $(\tau^2-i\eta^2)^{-1}$ 展开成 τ 的幂级数,然后逐项积分,也能得出上述结果.

如果 a 为负值,则(30)式左边发散,但这种情况利用(21)式以及自变量为正值的结果就可以容易地处理. 这时

$$G(a)=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}e^{-ia^2}+\frac{i}{2a}+O\left(\frac{1}{a^3}\right). \tag{32}$$

a 为正值时的渐近逼近式(31)与 a 为负值时的渐近逼近式(32)不同,这一事实是斯托克斯现象[1]的一个特例.

---

1) G. G. Stokes, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **10** (1864), 105.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现在写出

$$E_z = E_z^{(g)} + E_z^{(d)},$$

式中 $E_z^{(g)}$ 是由下式给出的几何光学场:

$$E_z^{(g)} = \begin{cases} e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)} - e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}, & 0 \leqslant \theta < \pi - \alpha_0, \\ e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}, & \pi - \alpha_0 < \theta < \pi + \alpha_0, \\ 0, & \pi + \alpha_0 < \theta \leqslant 2\pi, \end{cases} \quad (33)$$

$E_z^{(d)}$ 是衍射场,它单纯是这样一个场,应与几何光学场相加而给出完全场. 因此,对于 $kr \gg 1$, 把(31)和(32)式用于(26)式,在上述意义上,在不太靠近区域 II 和 IV 的那些点处,得出

$$E_z^{(d)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\frac{1}{4}i\pi} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\theta}{(\cos\theta + \cos\alpha_0)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (34)$$

由(23)或(27)式,很容易看出,按与(34)式同级的近似, $\boldsymbol{H}^{(d)}$ 的分量为 $H_\theta^{(d)} = -E_z^{(d)}$ 和 $H_r^{(d)} = 0$. 显然,(34)式意味着,衍射场的表现就好象它来自一个沿着衍射棱边放置的线光源,其“极坐标图”按(34)式的规定随角度而变化. 这与下述实验事实一致,即为了对比起见,从阴影扇形区看去时,衍射棱边好象被照亮了.

当 $\cos\theta + \cos\alpha_0$ 趋于零时,近似式(34)不成立,必须求助于精确解. 因为

$$G(0) = \int_0^\infty e^{i\mu^2} d\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{4}i\pi}, \quad (35)$$

所以由(26)式看出,在 $\theta = \pi + \alpha_0$ 处,

$$E_z = \frac{1}{2} e^{ikr} + O\left\{\frac{1}{\sqrt{kr}}\right\}, \quad (36)$$

而在 $\theta = \pi - \alpha_0$ 处,

$$E_z = e^{ikr\cos(2\alpha_0)} - \frac{1}{2} e^{ikr} + O\left\{\frac{1}{\sqrt{kr}}\right\}. \quad (37)$$

因此,靠近 $\theta = \pi + \alpha_0$ 和 $\theta = \pi - \alpha_0$ 处,衍射场与入射场同一数量级. 特别是在无限远处,两个邻近的扇形区内的几何光学场之间是经由它们的算术平均来过渡的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在几何光学场与衍射场可比较的那些区域内，这两个场之间的干涉产生条纹。这在图 11.11 中很明显，将在 § 11.5.5 中讨论。

$kr \ll 1$. 在这种情况下，$|u|$ 和 $|v|$ 比 1 小得多，菲涅耳积分的级数展开是有用的。写出

$$F(a)=\int_0^{\infty} e^{i\mu^2}d\mu-\int_0^{a} e^{i\mu^2}d\mu,$$

并将第二个积分的被积函数中的指数展开，则有

$$F(a)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}-a+O(a^3). \tag{38}$$

因此，由(26)和(28)式，略去 kr 的大于 1/2 的幂次，得出

$$\left.\begin{aligned}
E_z&=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}\sqrt{kr}\,\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\theta,\\
H_x&=-\sin\alpha_0-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\theta\\
&\quad\times\left\{\frac{i}{\sqrt{kr}}+(1+2\cos\alpha_0)\sqrt{kr}\right\},\\
H_y&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\theta\\
&\quad\times\left\{-\frac{i}{\sqrt{kr}}+(1+2\cos\alpha_0)\sqrt{kr}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

应当注意，在 $r=0$ 处，E_z 是有限和连续的，但 H_x 和 H_y 象 $r^{-1/2}$ 那样发散，除了在 $\theta=\pi$ 处，此时 $H_x=-\sin\alpha_0\times\exp(ikr\cos\alpha_0)$，以及在 $\theta=0$，2π 处，此时 $H_y=0$。物理问题中特有的这种特性，当然是由无限锐的棱边的理想化概念引起的。在这种情况下，表述关于解的唯一性的任何定理都必须考虑到场分量中奇点的存在(见 § 11.9)。

我们通过考察在衍射屏中感生的电流密度来结束这一段对于解的性质的研究。它为 $-c/4\pi$ 乘以 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 处的 H_x 之差；即，由(28)式得出，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{2\pi}{c} J_z = \sin\alpha_0 e^{-ikx\cos\alpha_0} - \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikx}\left\{2\sin\alpha_0\right.$$

$$\left. \times G\left[\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\right] - i\sqrt{\frac{2}{kx}}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\right\}. \qquad (40)$$

当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0 \gg 1$ 时,(40)式改为

$$J_z = \frac{c}{2\pi}\sin\alpha_0 e^{-ikx\cos\alpha_0} + O\{(kx)^{-3/2}\}. \qquad (41)$$

这个结果的意义在于指出了容许假定电流密度为几何光学给出值的可能范围,这是不能精确求解的问题中的一种标准方法. 显然,这个假定只对于不靠近 π 的 α_0 值才是合理的,并且它从下述事实中得到好处: 即(41)式中的"修正项"随着 $x\to\infty$ 按 $x^{-3/2}$ 而不是按 $x^{-1/2}$ 趋于零.

另一方面,当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0 \ll 1$ 时,

$$J_z = \frac{c}{\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha_0\left\{\frac{i}{\sqrt{kx}} + 4\cos^2\frac{1}{2}\alpha_0\sqrt{kx}\right\}e^{ikx}, \qquad (42)$$

它在衍射棱边上发散.

§ 11.5.4 *H*偏振的解

H 偏振的情况,即入射场由

$$H_z^{(i)} = e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)} \qquad (43)$$

确定时,可以用同 *E* 偏振一样的方法来处理,事实上,其分析实际相同. 换句话说,援引 § 11.3 中给出的巴俾涅原理的精确电磁形式,就能由后者导出前者,因为与半平面互补的屏本身就是半平面. 结果是,完全场由下式给出:

$$H_z = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)\right]\right.$$

$$\left. + e^{-ikr\cos(\theta+\alpha_0)}F\left[-\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha_0)\right]\right\}. \qquad (44)$$

它与 *E* 偏振场 E_z 的相应表达式(22)的差别只在于第二项的符号.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

利用 § 11.5.2 的记号，非零场分量表示为下述形式：

$$
\left.\begin{aligned}
H_z &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr}\{G(u)+G(v)\},\\
E_x &= \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr}\Big\{\sin\alpha_0[G(u)-G(v)]\\
&\quad - i\sqrt{\frac{2}{kr}}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\theta\Big\},\\
E_y &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikr}\Big\{\cos\alpha_0[G(u)+G(v)]\\
&\quad + i\sqrt{\frac{2}{kr}}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\theta\Big\}.
\end{aligned}\right\} \tag{45}
$$

显然，在 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 处，E_x 为零，而 $kr\gg 1$ 时场的特性，可再次用看来象是来自一个沿着衍射棱边的线光源对于离 $\theta=\pi-\alpha_0$ 和 $\theta=\pi+\alpha_0$ 充分远的各点的衍射场来解释。随着 $r\to 0$，H_z 保持有限和连续，而 E_x 和 E_y 象 $r^{-1/2}$ 那样发散，除了 $\theta=0$，2π 时，$E_x=0$，以及 $\theta=\pi$ 时，$E_y=-\cos\alpha_0\exp(ikr\times\cos\alpha_0)$。

电流密度由下式给出：

$$
\frac{2\pi}{c}J_x = e^{-ikx\cos\alpha_0} - \frac{2e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{ikx}G\left\{\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\right\}. \tag{46}
$$

当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\gg 1$ 时，

$$
\frac{2\pi}{c}J_x = e^{-ikx\cos\alpha_0} - \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}}\sec\frac{1}{2}\alpha_0\frac{e^{ikx}}{\sqrt{kx}}, \tag{47}
$$

它与 E 偏振的情况相比，逼近几何光学的电流密度要更慢些。当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\ll 1$ 时，

$$
J_x = \frac{c}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\sqrt{kx}\,e^{ikx}. \tag{48}
$$

在 $x=0$ 处，它为零，因此不出所料，在棱边本身处没有垂直于棱

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

边的电流。

§11.5.5 某些数值计算

由(26)式得出的一条典型的理论曲线如图 11.11 所示。它适用于振幅为 1 的正入射 E 偏振平面波，画出了在屏后方距离三个波长处 ($ky=-6\pi$) E_z 的振幅对 x 的曲线。它明显地画出受照区内的衍射条纹，以及随着更深地穿入阴影区而单调衰减。

布劳恩贝克 (Braunbek) 和劳基恩 (Laukien)[1] 曾作过一些有意义的计算。对于振幅为 1 的正入射 H 偏振平面波，他们给出了在离衍射棱边大约在一个波长左右的区域内 H_z 的振幅恒值线 (图 11.12) 和位相恒值线 (图 11.13)。他们也给出了与位相恒值线正交的平均能流线(图 11.14)。很容易证明，对于任何二维 H 偏振场，情况就是这样。写出 $H_z=he^{i\phi}$，式中 h 和 ϕ 均为实值；然后利用关系式

$$E_x=-\frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial y},\quad E_y=\frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

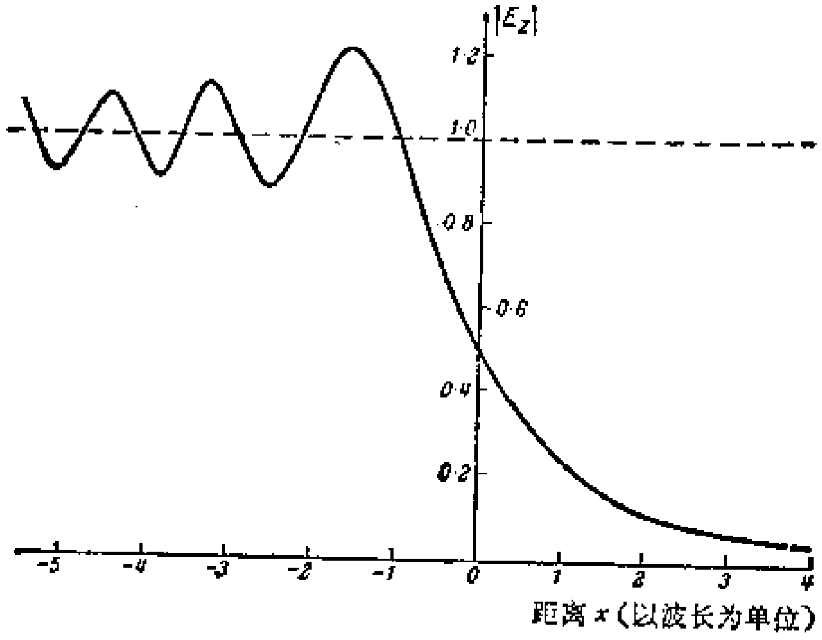


图 11.11 振幅为 1 的正入射 E 偏振平面波被完全导电半平面的衍射，在屏后方距离三个波长处，$|E_z|$ 随 x 的变化

---

1) W. Braunbek and Laukien, *Optik*, **9** (1952), 174.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

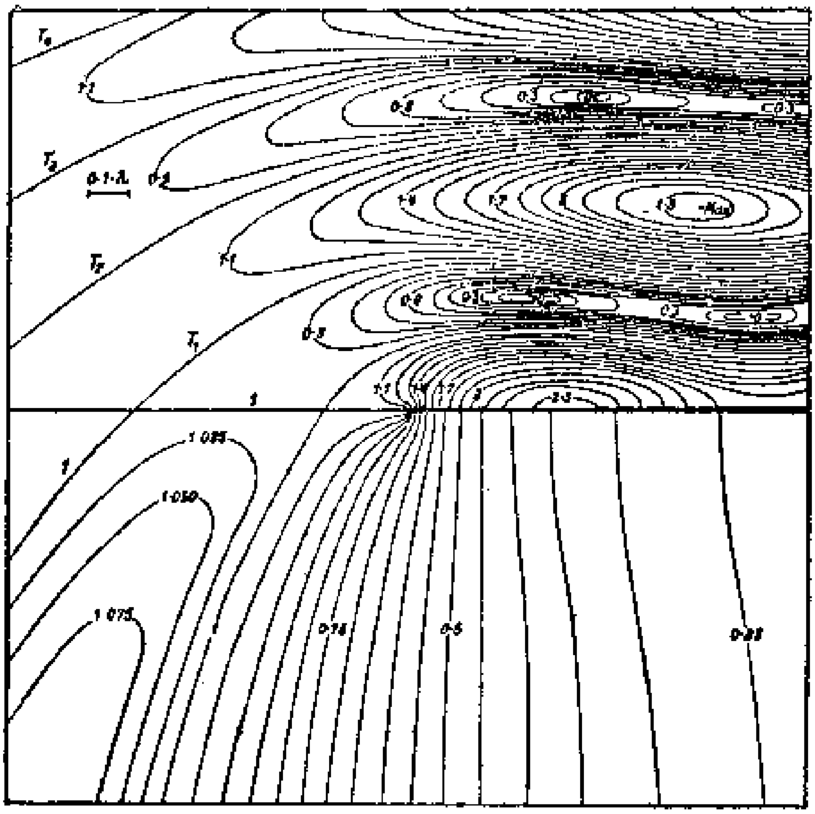


图 11.12 H_z 的振幅恒值线(入射波的振幅取为 1). 正入射 H 偏振平面波被完全导电半平面的衍射[引自 W. Braunbek and G. Laukien, *Optik* 9 (1952), 174.]

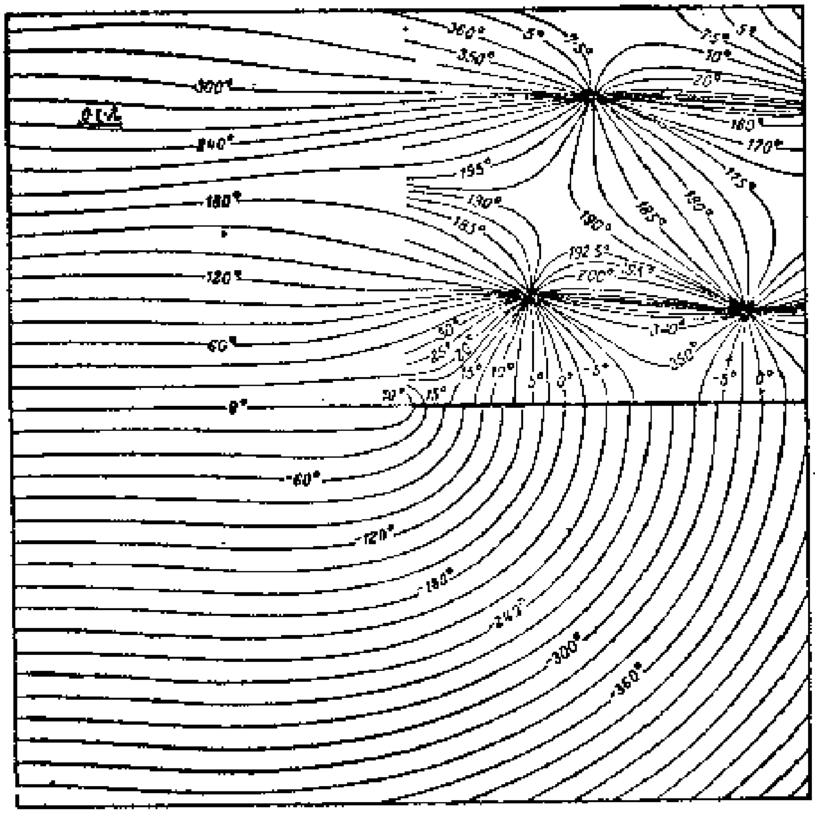


图 11.13 H_z 的位相恒值线. 正入射 H 偏振平面波被完全导电半平面的衍射[引自 W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, 9 (1952), 174.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

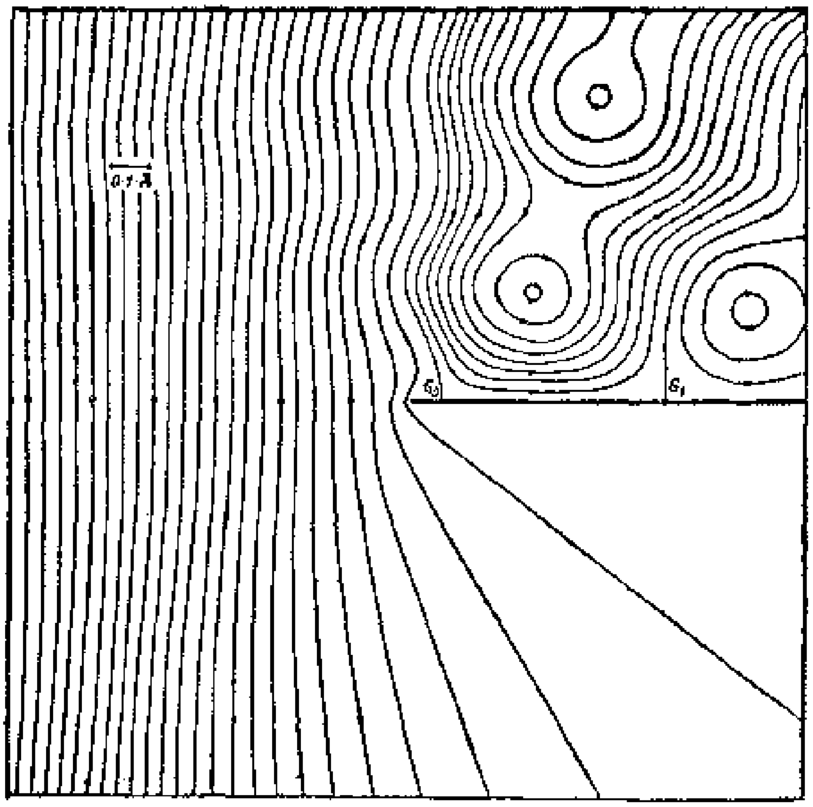


图 11.14 平均能流线

正入射 H 偏振平面波被完全导电半平面的衍射

[引自 W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, 9 (1952), 174.]

则平均坡印廷矢量 [§1.4(56)式]

$$\frac{c}{8\pi}\mathscr{R}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\frac{c}{8\pi}\mathscr{R}(E_yH_z^*, -E_xH_z^*, 0)$$

可见就是

$$\frac{c}{8\pi}\frac{h^2}{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, 0\right), \tag{49}$$

它与诸曲面 ϕ=常数正交. 对于任何 E 偏振场,相应的结果成立.

§11.5.6 与近似理论及实验结果的比较

对于区域 II 受照部分(见图 11.9, 那里有条纹出现)内离衍射边缘很远的那些点,其解(22)和(44)两式中的第二项均可略去,因此, E 偏振和 H 偏振以及非偏振光的强度均为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\mathscr{C}\left[2\sqrt{\frac{2r}{\lambda}}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)\right]\right\}^2$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\mathscr{S}\left[2\sqrt{\frac{2r}{\lambda}}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)\right]\right\}^2, \quad (50)$$

式中 λ 是波长，$\mathscr{C}$，$\mathscr{S}$ 是 § 8.7(12) 式所定义的菲涅耳"余弦"和"正弦"积分。这个结果可与菲涅耳-基尔霍夫理论中关于一个黑的半平面的类似结果 § 8.7(28) 式作比较。确实曾经建议[1]，完全导电半平面的精确解第一项可看作是给出了黑的半平面的解。

深入区域 I 阴影区内，E 偏振场由(34)式给出，即

$$E_z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\theta}{(\cos\alpha_0+\cos\theta)}\,\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (51)$$

同样可证，该处的 H 偏振场为

$$H_z=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_0\cos\frac{1}{2}\theta}{(\cos\alpha_0+\cos\theta)}\,\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (52)$$

因此，相应的场强度[2]之比为

$$\frac{E\text{ 偏振}}{H\text{ 偏振}}=-\tan\frac{1}{2}\alpha_0\tan\frac{1}{2}\theta, \quad (53)$$

而非偏振的入射光会因衍射从而变为部分偏振光。这些结果与光学实验一般符合[3]。

微波射电技术的发展为电磁波衍射的实验研究提供了极好的机会。特别是，能采用比光学测量中所能做到的更接近于理想化完全导电半平面的衍射屏，并且能考察衍射棱边附近的场。曾作过一些测试，主要用约 3 厘米的波长，结果表明理论与实验符合得

---

1) 见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1950), p. 149 及其后的说明。

2) 文中的场强度 (field strength) 其实是指(51)和(52)式的 E_z 和 H_z。——译者注

3) 见 Wolfsohn 的论文，载于 *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), 275, 和 J. Savornin, *Ann. de Physique*, **11** (1939), 129.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

很好[1]。

§11.6 半平面对平面波的三维衍射

实际上，我们在 §11.5 中求解的平面波被半平面衍射问题，除了限制波的传播方向垂直于衍射棱边以外，平面波是任意的. 现在将证明，利用简单的方法就能推广以前的结果而得出完全任意的入射平面波的解.

设入射平面波用下述位相因子表征:

$$e^{-ikS}=e^{-ik(x\cos\alpha\cos\beta+y\sin\alpha\cos\beta+z\sin\beta)},\tag{1}$$

式中，同前，完全导电屏占有 $y=0$, $x>0$. 角 α 和 β 确定传播方向，如图 11.15 所示.

现在注意到，(1)式是由相应于 $\beta=0$ 的二维形式先用 $k\cos\beta$ 代替 k 再乘以 $\exp(-ikz\sin\beta)$ 得出的. 事实上，这种适用于波动方程

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+k^2V=0\tag{2}$$

的任何二维解的方法，显然可得出三维波动方程

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}+k^2V=0\tag{3}$$

的解，其中 z 只通过因子 $\exp(-ikz\sin\beta)$ 引入. 而且，如果 U 是满足 (3) 式的一个解，则不难证明满足麦克斯韦方程的两个电磁场为

$$\left.\begin{aligned}E&=\left(-\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial x},\ -\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial y},\ \cos^2\beta U\right),\\H&=\left(-\frac{i}{k}\frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{i}{k}\frac{\partial U}{\partial x},\ 0\right),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

---

1) C. W. Horton and R. B. Watson, *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), 16; B. N. Harden, *Proc. Inst. Elec. Engrs.*, **99** Pt. III (1952), 229; R. D. Kodis, *J. Appl. Phys.* **23** (1952), 249; R. V. Row, *J. Appl. Phys.*, **24** (1953), 1448.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

和

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\left(\frac{i}{k}\frac{\partial U}{\partial y},\ -\frac{i}{k}\frac{\partial U}{\partial x},\ 0\right),\\ \boldsymbol{H}&=\left(-\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial x},\ -\frac{i\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial y},\ \cos^2\beta U\right).\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

当 $\beta=0$ 时,(4)式给出一个 E 偏振的二维场,(5)式给出一个 H 偏振的二维场.

如果 U 取表达式(1),则(4)和(5)式分别得出两个平面波

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=(-\cos\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)e^{-ikS},\\ \boldsymbol{H}&=(-\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0)e^{-ikS},\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

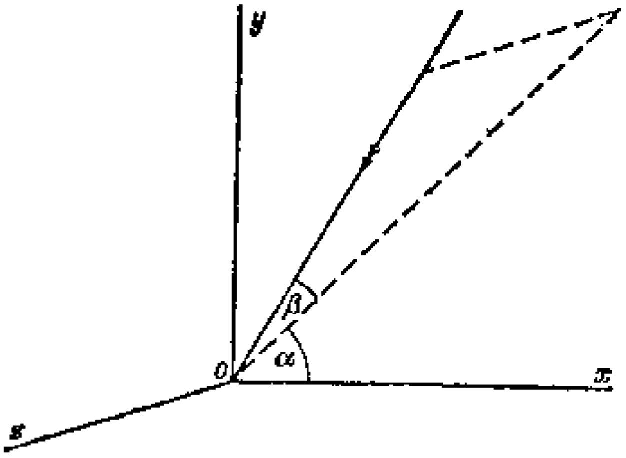


图 11.15　入射平面波的传播方向

和

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=(\sin\alpha,\ -\cos\alpha,\ 0)e^{-ikS},\\ \boldsymbol{H}&=(-\cos\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)e^{-ikS},\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

式中已全部去掉因子 $\cos\beta$. 现在,任一具有空间变化 (1) 的平面波由 $\boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{H}$)的两个分量确定,因第三个分量可由 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0$ (或 $\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0$) 得出. 因此,任一平面波可由(6)和(7)式的适当叠加构成;其结果是,在衍射问题中,可限于注意(6)和(7)式是各自的入射场这两种情况,而不失去普遍性.

现在很清楚,以(6)式为入射波的衍射问题的解,是由(4)式给出的,式中的 U 由二维情况中先用 $k\cos\beta$ 代替 k 再乘以 $\exp(-ikz\times\sin\beta)$ 而已知的 $E_z\sec\beta$ 表达式得出: 因 $y=0$, $x>0$ 处,

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$U=0$，这一事实也意味着该处 $\partial U/\partial x=0$，由此根据(4)式得出，在屏上 $E_x=E_z=0$，合乎要求。显然，由§11.5(24)和§11.5(26)式，有

$$U=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\sec\beta e^{ik(r\cos\beta-z\sin\beta)}\{G(p)-G(q)\},\tag{8}$$

式中

$$p=-\sqrt{2kr\cos\beta}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha),$$

$$q=-\sqrt{2kr\cos\beta}\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha).\tag{9}$$

因此，由(4)式得出

$$\left.\begin{aligned}
E_z&=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}\cos\beta e^{ik(r\cos\beta-z\sin\beta)}\{G(p)-G(q)\},\\
H_x&=-\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ik(r\cos\beta-z\sin\beta)}\Big\{\sin\alpha[G(p)+G(q)]\\
&\quad+i\sqrt{\frac{2}{kr\cos\beta}}\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\theta\Big\},\\
H_y&=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ik(r\cos\beta-z\sin\beta)}\Big\{\cos\alpha[G(p)-G(q)]\\
&\quad-i\sqrt{\frac{2}{kr\cos\beta}}\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\theta\Big\},\\
E_x&=-H_y\sin\beta,\quad E_y=H_x\sin\beta,\quad H_z=0.
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

当 $\beta=0$ 时，(10)中各式立即化为§11.5(26)和(28)中相应各式。

对于入射波由(7)式给出的情况，可同样得到类似的结果，对于H偏振，适当的二维解就是§11.5(44)式的 H_z 表达式。如前所述，因此可以导出对于一个完全任意的入射平面波的解。而且，由§11.5.2的论证作简单推广得知，任一种源分布所辐射的场都能表示为平面波谱。因此，原则上，任一种源分布的衍射问题的解都能由各个平面波相应的解构成。两种感兴趣的情况是平行于衍射棱边的线源(二维问题)和点源；它们均在下一节讨论。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§11.7 半平面对局域源的衍射

§11.7.1 平行于衍射棱边的线电流

考虑一个位于 T [即点 (r_0, θ_0)，其中 $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi$] 的线源，它在自由空间内辐射 E 偏振的柱面波

$$E_z^{(i)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{1}{4}i\pi} H_0^{(1)}(kR) \sim \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}, \qquad (1)$$

式中 $H_0^{(1)}$ 是第一类零阶汉克耳函数，R 是从 T 测量起的距离(见图 11.16)。

事实上，此线源是通过 T 平行于 z 轴流动并且处处以相同位相振荡的电流。众所周知，(1)式是代表只依赖于径向距离的发散波的二维波动方程基本解。

为了把(1)式写成平面波的角谱，我们大体上采用汉克耳函数的索末菲积分表示法[1]，因为要求谱的各个平面波都入射到屏上，

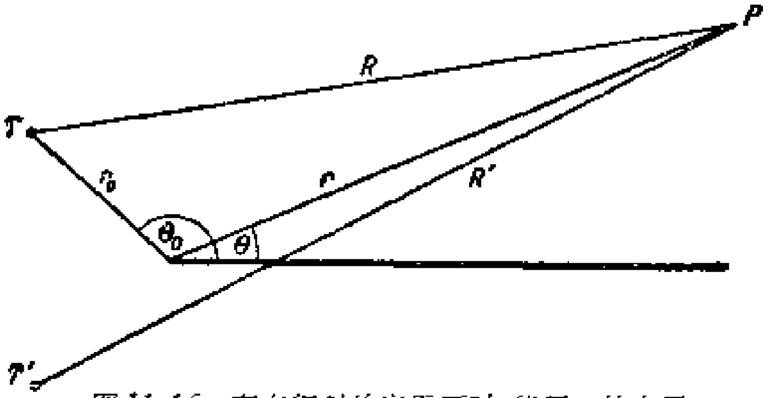


图 11.16 存在衍射的半平面时，线源 T 的布局

所以考虑在半空间 $y < r_0 \sin\theta_0$ 中的表达式，即

$$H_0^{(1)}(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{S(\frac{1}{2}\pi)} e^{ikr_0 \cos(\theta_0 - \alpha)} e^{-ikr\cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \qquad (2)$$

这里选择了特殊的路线 $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$，因为(除了它对于 $y < r_0 \sin\theta_0$

---

1) 例如，见 J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (New York, McGraw-Hill, 1941), p. 367.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

中所有各点都有效以外)它平行于最速下降路线,这在以后的分析中证明是方便的。(2)式的被积函数中出现位相因子 $\exp\{ikr_0\times\cos(\theta_0-\alpha)\}$,是因为谱的各个平面波在 T 处都必须具有零位相。

因此很明显,对于入射场(1)的衍射问题的解,是由对于入射场 $\exp\{-ikr\cos(\theta-\alpha)\}$ 的解乘以因子

$$\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}}e^{ikr_0\cos(\theta_0-\alpha)} \tag{3}$$

并对 α 沿路线 $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ 积分而得出的。

现在,如 § 11.5 所述,对于入射场 $\exp\{-ikr\cos(\theta-\alpha)\}$ 的解,可写成

$$E_z^{(p)}=E_z^{(pg)}+E_z^{(pd)}, \tag{4}$$

(这里引入的附标 p 表示入射波是平面波),式中 $E_z^{(pg)}$ 由 § 11.5 (33)式给出,并且[见 § 11.5(19)式]

$$E_z^{(pd)}=\frac{i}{\pi}\int_{S(0)}\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(\theta+\beta)}{\cos\alpha+\cos(\theta+\beta)}e^{ikr\cos\beta}d\beta. \tag{5}$$

即将看到,采用 $E_z^{(pd)}$ 的这种形式(而不用菲涅耳积分表示)是因为它显示出 α 和 β 之间的对称性。于是,对于入射场(1)的解为

$$\begin{aligned}E_z=&\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}E_z^{(pg)}e^{ikr_0\cos(\theta_0-\alpha)}d\alpha\\&+\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}E_z^{(pd)}e^{ikr_0\cos(\theta_0-\alpha)}d\alpha.\end{aligned} \tag{6}$$

为了把(6)式分成几何光学项和衍射项,第二个积分中对 α 的积分路线必须换为 $S(\theta_0)$。在此路线置换中,必须考虑到 $E_z^{(pd)}$ 的极点,它们作为 α 的函数:由(5)式,对于 $S(0)$ 上所有的 β,它们出现在 $\cos\alpha=-\cos(\theta+\beta)$ 处,并且不难证明,这些极点留数的贡献与(6)式中第一个式子相结合,就得到几何光学项

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
E_z^{(g)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\ e^{\frac{1}{4}i\pi}\{H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR')\}, & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0, \\ \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\ e^{\frac{1}{4}i\pi} H_0^{(1)}(kR), & \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0, \\ 0, & \pi + \theta_0 < \theta \leqslant 2\pi, \end{cases} \tag{7}
$$

式中 R' 是从 T 在平面 $y=0$ 上所成的象 T' 测量起的距离(图 11.16)。衍射项可写成

$$
E_z^{(d)} = \frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{S(0)}\int_{S(0)} \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta_0)\sin\frac{1}{2}(\beta+\theta)}{\cos(\alpha+\theta_0)+\cos(\beta+\theta)} \times e^{ik(r_0\cos\alpha + r\cos\beta)} d\alpha d\beta. \tag{8}
$$

将(8)式表示成

$$
E_z^{(d)} = \mathscr{I}(\theta_0) - \mathscr{I}(-\theta_0) \tag{9}
$$

是方便的，式中

$$
\mathscr{I}(\theta_0) = -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int_{S(0)}\int_{S(0)} \frac{e^{ik(r_0\cos\alpha + r\cos\beta)}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\theta_0+\theta)} d\alpha d\beta. \tag{10}
$$

最后一步是把 $\mathscr{I}(\theta_0)$ 化为单个积分. (10)式中被积函数上下各乘以 $4\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\theta_0+\theta)$，并弃去 β 的奇函数部分，则有

$$
\mathscr{I}(\theta_0) = -\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{8\pi\sqrt{2\pi}} \int_{S(0)}\int_{S(0)} \times \left\{ \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\theta_0+\theta) - \sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\theta_0+\theta) + \sin\frac{1}{2}\beta} \right\}
$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\times \cos\frac{1}{2}\beta e^{ik(r_0\cos\alpha+r\cos\beta)}d\alpha d\beta. \tag{11}$$

在(11)式被积函数的第二项中把α改变为$-\alpha$，再把这两项重新组合，得出

$$\mathscr{I}(\theta_0)=-\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{S(0)}\int_{S(0)}\frac{1}{N}$$

$$\times\left\{\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta e^{ik(r_0\cos\alpha+r\cos\beta)}\right\}d\alpha d\beta, \tag{12}$$

式中

$$N=(\cos\alpha-1)+(\cos\beta-1)-4\sin\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\frac{1}{2}\alpha$$

$$\times\sin\frac{1}{2}\beta+2\cos^2\frac{1}{2}(\theta_0+\theta).$$

在(12)式中作“最速下降”代换，

$$\xi=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha,\quad \eta=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}\sin\frac{1}{2}\beta,$$

并写出 $R_1=r_0+r$，就得到

$$\mathscr{I}(\theta_0)=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}}e^{ikR_1}\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k(r_0\xi^2+r\eta^2)}d\xi d\eta}{\xi^2+\eta^2+2\sin\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\xi\eta-2i\cos^2\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)}. \tag{13}$$

其次，作极坐标代换

$$\xi=\sqrt{R_1/r_0}\,\rho\cos\phi,\quad \eta=\sqrt{R_1/r}\,\rho\sin\phi.$$

因此

$$\mathscr{I}(\theta_0)=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}}e^{ikR_1}\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\int_0^{\infty}\rho K(\rho)e^{-kR_1\rho^2}d\rho, \tag{14}$$

式中

$$K(\rho)=\int_0^{2\pi}\left\{\rho^2\left[\sqrt{\frac{r}{r_0}}\cos^2\phi+\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sin^2\phi\right.\right.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$+2\sin\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\phi\cos\phi\Big]$$

$$-2i\frac{\sqrt{rr_0}}{R_1}\cos^2\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\Big\}^{-1}d\phi. \tag{15}$$

现在 $K(\rho)$ 可利用令 $z=\exp(i\phi)$ 的标准方法计算，此时积分路线变为单位圆，并且只需计算被包围的极点的留数。由此求出

$$K(\rho)=2\pi\left|\sec\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\right|$$

$$\times\left\{\rho^4-2i\rho^2-\frac{4rr_0}{R_1^2}\cos^2\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

式中平方根的分支位于(对于 ρ 的实值)复平面的第四象限。因此(10)式变为

$$\mathscr{I}(\theta_0)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{ikR_1}$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\rho e^{-kR_1\rho^2}}{\sqrt{[\rho^2-i(R_1-R')/R_1][\rho^2-i(R_1+R')/R_1]}}d\rho, \tag{17}$$

$\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\gtrless 0$ 时，相应地用上面或下面的符号。最后作代换

$$\mu^2=ikR_1\rho^2+k(R_1-R'),$$

就给出所要求的结果，即

$$\mathscr{I}(\theta_0)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{ikR'}\int_{\sqrt{k(R_1-R')}}^\infty\frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+2kR'}}d\mu, \tag{18}$$

$\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\gtrless 0$ 时，相应地用上面或下面的符号。

因为入射场(1)可写成下述形式：

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{ikR}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+2kR}}d\mu, \tag{19}$$

几何光学项(7)与衍射项(9)相结合，得出总场为

$$E_z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}\left\{e^{ikR}\int_m^\infty\frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+2kR}}d\mu-e^{ikR'}\right.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\times \int_{m'}^{\infty} \frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2 + 2kR'}} d\mu \Big\}, \tag{20}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} m &= -2\sqrt{\frac{krr_0}{R_1 + R}} \cos\frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) = \mp\sqrt{k(R_1 - R)}, \\ &\qquad \cos\frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) \gtrless 0 \text{ 时取} \mp, \\ m' &= -2\sqrt{\frac{krr_0}{R_1 + R'}} \cos\frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) = \mp\sqrt{k(R_1 - R')}, \\ &\qquad \cos\frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \gtrless 0 \text{ 时取} \mp. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

麦克唐纳[1] 首次给出了实质上具有 (20) 式形式的解，他是通过对卡斯洛[2] 的更早的解作变换而得到的. 它在型式上很类似于索末菲对于入射平面波的解，确实，把它乘以 $\sqrt{kr_0}\exp(-ikr_0)$ 并令 $r_0 \to \infty$，就立即重新得出后者. H 偏振的解不同之处仅在于(20)式中两项是相加的而不是相减的.

如果 $kR_1 \gg 1$，则在(18)式被积函数的非指数因子中，μ 可用它的下限值代替，而得出近似结果

$$\mathscr{I}(\theta_0) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \frac{e^{ikR'}}{\sqrt{k(R_1 + R')}} F\left[\sqrt{k(R_1 - R')}\right]; \tag{22}$$

于是，再利用 $\mathscr{I}(-\theta_0)$ 的相应近似，衍射场就用菲涅耳积分示出，其精确度为，仅当源和观察点两者距衍射棱边均明显在一个波长以内时才不适用.

此外，如果 $k(R_1 - R') \gg 1$，则渐近逼近式 §11.5(31) 可用于(22)式，得出

$$\mathscr{I}(\theta_0) = \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{2\sqrt{2\pi}} \sec\frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}; \tag{23}$$

---

1) H. M. Macdonald, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1915), 410.

2) H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.* **30** (1899), 121.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

同样，如果 $k(R_1 - R) \gg 1$，则

$$\mathscr{I}(-\theta_0) = \frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{2\sqrt{2\pi}} \sec\frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)\frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \tag{24}$$

因此，对于远离两条双曲线 $k(R_1 - R') = 1$ 和 $k(R_1 - R) = 1$ 之外的所有各点来说，衍射场类似于某个位于衍射棱边的线源的场，这两条双曲线的轴分别为 $\theta + \theta_0 = \pi$ 和 $\theta - \theta_0 = \pi$. 对于入射柱面波，这些双曲线同 § 11.5.3 所讨论的与入射平面波的解有关的抛物线相对应.

最后，应注意下述事实：把 r_0, θ_0 与 r, θ 互换，(20)式不变，在这种意义上说，(20)式这个解是倒易的. 当然，这是麦克斯韦方程中隐含的关于倒易性的一般定理[1]的一个特例：上述分析表明，§ 11.5(7)式的谱函数对 α 和 α_0 对称这一事实与此有关.

§ 11.7.2 偶极子

局域于一点的最基本的电磁波源是电偶极子或磁偶极子. 有半平面存在时，偶极子问题可通过把不受扰的偶极场表示为(三维的)平面波谱并对各个平面波应用 § 11.6 的结果来求解. 西尼尔(Senior)[2] 曾用这种方法处理过电偶极子的轴垂直于衍射薄片的情况，这里扼要介绍这种分析.

图 11.17 中，目前，用笛卡儿坐标 x, y, z 和柱极坐标 r, θ, z 表示其布局，其中衍射薄片占有 $y = 0$, $x > 0$. 偶极子在 T 处，即 (x_0, y_0, z_0) 或 (r_0, θ_0, z_0)处，使它平行于 y 轴；T' 是 T 在平面 $y = 0$ 上所成的象，R, R' 分别是从 T 和 T' 到观察点 P 的距离.

对偶极矩的大小作适当的选择，不受扰的偶极场(参看 § 2.2)就可取作

---

1) L. G. H. Huxley, *The Principles and Practice of Waveguides* (Cambridge University Press, 1947), §7.17.

2) T. B. A. Senior, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **6** (1953), 101. 其他方法见 A. E. Heins, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, AP-4 (1956), 294; B. D. Woods, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **10** (1957), 90; W. E. Williams, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **10** (1957), 210.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

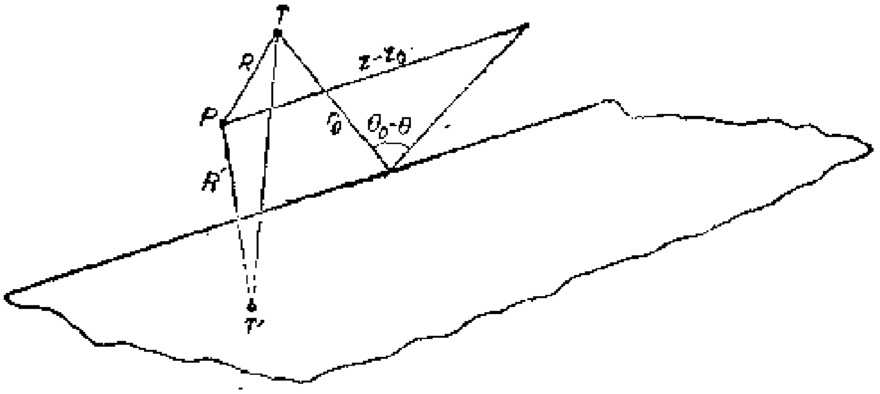


图 11.17　存在衍射的半平面时，T 处偶极子的布局

$$\boldsymbol{E}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}+k^2\Pi,\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z}\right),$$

$$\boldsymbol{H}=ik\left(\frac{\partial\Pi}{\partial z},\ 0,\ -\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right),\tag{25}$$

式中

$$\Pi=\frac{e^{ikR}}{kR}.\tag{26}$$

然后，需要将(25)式分解为平面波，可由下述公式[1]得出：

$$\frac{e^{ikR}}{kR}=\frac{i}{2\pi}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}\cos\beta$$
$$\times\ e^{-ik\{(x-x_0)\cos\alpha\cos\beta+(y-y_0)\sin\alpha\cos\beta-(z-z_0)\sin\beta\}}d\alpha d\beta.\tag{27}$$

所以，这种方法就是在存在衍射薄片时，写出由隐含在(27)式被积函数中的每一个平面波入射到衍射薄片上所引起的总场，然后作积分。

考虑到以后的积分(参看 § 11.7(5) 式)，采用 § 11.5(8) 形式(E 偏振)的入射平面波的基本解与相应形式的H偏振的基本解是方便的。用 § 11.6 中说明过的方法，修改这些表达式，以得出(27)式隐含的入射平面波所相应的三维解。因此，$\boldsymbol{E}$ 平行于偶极子的分量表示为下述形式：

$$E_y=E_y^{(g)}+E_y^{(d)},\tag{28}$$

1) 这是对 H. Weyl. *Ann. d. Physik*,**60** (1919), 481 给出的公式的简单修改。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $E_y^{(g)}$ 是几何光学场，而

$$E_y^{(d)} = \frac{ik}{2\pi}\{A(\theta_0) + A(-\theta_0)\} - \frac{i}{2\pi k}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right)B(\theta_0)$$
$$+ \frac{i}{2\pi k}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} + k^2\right)B(-\theta_0), \qquad (29)$$

式中

$$A(\theta_0) = \frac{ik}{2\pi}\int_{s(0)}\int_{s(\frac{1}{2}\pi)}\int_{s(0)} \cos\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\theta-\theta_0)$$
$$\times e^{ik(r\cos\gamma\cos\beta + r_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta)}d\alpha d\beta d\gamma, \qquad (30)$$

$$B(\theta_0) = \frac{ik}{2\pi}\int_{s(0)}\int_{s(\frac{1}{2}\pi)}\int_{s(0)} \cos\beta\sec\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\theta-\theta_0)$$
$$\times e^{ik(r\cos\gamma\cos\beta + r_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta)}d\alpha d\beta d\gamma. \qquad (31)$$

借助与卡斯洛[1]和麦克唐纳[2]类似的分析，可以证明

$$A(\theta_0) = \frac{\pi}{\sqrt{rr_0}}\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)H_0^{(1)}(kR_1), \qquad (32)$$

式中

$$R_1^2 = (r+r_0)^2 + (z-z_0)^2; \qquad (33)$$

$$B(\theta_0) = \pm\pi k\int_{\pm m}^{\infty} H_1^{(1)}(kR\cosh\mu)d\mu,\quad \theta-\theta_0 \lesseqgtr \pi \text{时取}\pm, \qquad (34)$$

$$B(-\theta_0) = \pm\pi k\int_{\pm m'}^{\infty} H_1^{(1)}(kR'\cosh\mu)d\mu,\quad \theta+\theta_0 \lesseqgtr \pi \text{时取}\pm, \qquad (35)$$

式中

$$m = \sinh^{-1}\left\{2\frac{\sqrt{rr_0}}{R}\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\},$$

$$m' = \sinh^{-1}\left\{2\frac{\sqrt{rr_0}}{R'}\cos\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)\right\}. \qquad (36)$$

这些结果与公式

$$\frac{1}{2}i\int_{-\infty}^{\infty} H_1^{(1)}(kR\cosh\mu)d\mu = \frac{e^{ikR}}{kR} \qquad (37)$$

---

1) H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30** (1899), 121.
2) H. M. Macdonald, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1915), 410.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一起，使(28)式能写成

$$E_y = \frac{ik}{\sqrt{rr_0}} \cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0 H_0^{(1)}(kR_1) - \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} - k^2\right)\mathscr{I} + \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y_0} + k^2\right)\mathscr{I}', \tag{38}$$

式中

$$\mathscr{I} = \int_{-m}^{\infty} H_1^{(1)}(kR\cosh\mu)d\mu, \quad \mathscr{I}' = \int_{-m'}^{\infty} H_1^{(1)}(kR'\cosh\mu)d\mu. \tag{39}$$

其余的场分量同样可用 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{I}'$ 精确地表示如下：

$$E_x = -\frac{ik}{\sqrt{rr_0}} \sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0 H_0^{(1)}(kR_1) - \frac{1}{2}i\frac{\partial^2\mathscr{I}}{\partial x\,\partial y_0} + \frac{1}{2}i\frac{\partial^2\mathscr{I}'}{\partial x\,\partial y_0}, \tag{40}$$

$$E_z = -\frac{1}{2}i\frac{\partial^2\mathscr{I}}{\partial z\,\partial y_0} + \frac{1}{2}i\frac{\partial^2\mathscr{I}'}{\partial z\,\partial y_0}, \tag{41}$$

$$H_x = \frac{k(z-z_0)}{R_1\sqrt{rr_0}} \cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0 H_1^{(1)}(kR_1) + \frac{1}{2}k\frac{\partial\mathscr{I}}{\partial z_0} + \frac{1}{2}k\frac{\partial\mathscr{I}'}{\partial z_0}, \tag{42}$$

$$H_y = \frac{k(z-z_0)}{R_1\sqrt{rr_0}} \sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta_0 H_1^{(1)}(kR_1), \tag{43}$$

$$H_z = -\frac{1}{2}k\frac{\partial\mathscr{I}}{\partial x_0} - \frac{1}{2}k\frac{\partial\mathscr{I}'}{\partial x_0}. \tag{44}$$

人们感兴趣地注意到，在完全场中，$\boldsymbol{H}$的非零分量平行于偶极子，因此这种分析不能用单个分量赫兹矢量（Single Component Hertz Vector）[1] 表述。

在一较不重要的限制之下，还可用菲涅耳积分表示解．如果 $kR_1 \gg 1$，则不难建立渐近逼近

1) A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6** (1948), 157, 和 L. A. Vainstein, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.* (*Bull. Acad. Sci.USSR*), **12** (1948), 144 和 166，利用 Schwinger 引入的方法（§11.1 中提到过），最早给出了对于入射平面波的解．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mathscr{I} = -\frac{2e^{\frac{1}{4}i\pi}}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi R_1(R+R_1)}}e^{ikR}$$

$$\times F\left\{-2\sqrt{\frac{kr r_0}{R+R_1}}\cos\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\}, \tag{45}$$

对 $\mathscr{I}'$ 有类似的结果。

§11.8 其他问题

本节中扼要地评述其他几个衍射问题。

§11.8.1 两个平行的半平面

利用本章中用于单个半平面的方法，两个平行半平面(与通过其棱边的公共平面相垂直)的衍射问题是易于处理的[1]。

考虑 E 偏振，除了衍射障碍物现在由两层薄片组成以外，其问题同 § 11.5.1 正好一样；薄片 1 占有 $y=0$，$x>0$；薄片 2 占有 $y=-a$，$x>0$。引入从薄片 2 的边缘 $(0, -a)$ 测量起的附加坐标 r', θ' 是方便的。

由薄片 1 和 2 中的感生电流引起的散射场可分别写成

$$E_x^{(s1)} = \int_C P_1(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \quad y \gtrless 0 \text{ 时取干}, \tag{1}$$

$$E_x^{(s2)} = \int_C P_2(\cos\alpha)e^{ikr'\cos(\theta'\mp\alpha)}d\alpha, \quad y \gtrless -a \text{ 时取干}, \tag{2}$$

积分路线如图 11.7 所示，取 $P_1(\mu)$ 和 $P_2(\mu)$ 在积分路线下方没有奇点，就保证了 $H_x^{(s1)}$ 和 $H_x^{(s2)}$ 分别通过区域 $y=0$，$x<0$ 和 $y=-a$，$x<0$ 时的连续性。而且，E_x 在两块薄片上为零的边界条件导致下述积分方程：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}e^{ikx\mu}d\mu + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}e^{ika\sqrt{1-\mu^2}}e^{ikx\mu}d\mu = -e^{-ikx\mu_0}, \tag{3}$$

---

1) 参阅第 778 页注解。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ika\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu} d\mu$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu} d\mu = -e^{ika\sqrt{1-\mu_0^2}} e^{-ikx\mu_0}, \qquad (4)$$

对于 $x>0$，它们必须成立。

如果写成

$$P_1(\mu)+P_2(\mu)=Q_1(\mu),\ P_1(\mu)-P_2(\mu)=Q_2(\mu), \qquad (5)$$

分别将(3)和(4)式相加及相减，对于 $x>0$，给出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \{1+e^{ika\sqrt{1-\mu^2}}\} e^{ikx\mu} d\mu$$

$$= -\{1+e^{ika\sqrt{1-\mu_0^2}}\} e^{-ikx\mu_0}, \qquad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \{1-e^{ika\sqrt{1-\mu^2}}\} e^{ikx\mu} d\mu$$

$$= -\{1-e^{ika\sqrt{1-\mu_0^2}}\} e^{-ikx\mu_0}. \qquad (7)$$

(6)和(7)式各自的形式都与 § 11.5(2) 式类似，为了得出类似于 § 11.5(4) 式的解，积分路线必须用实轴上方的无限大的半圆来闭合。为此，选择具有一正虚部的 $\sqrt{1-\mu^2}$ 的分枝。于是所需的(6)式的解为

$$\frac{Q_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \{1+e^{ika\sqrt{1-\mu^2}}\} = \frac{i}{2\pi} \{1+e^{ika\sqrt{1-\mu_0^2}}\}$$

$$\times \frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)} \frac{1}{\mu+\mu_0}, \qquad (8)$$

式中 $U(\mu)$ 是 μ 的任意函数，它在积分路线上方的半平面内没有奇点，并随着 $|\mu|\to\infty$，它趋于零。

尚须了解应如何选择 $Q_1(\mu)$ 和 $U(\mu)$ 使之满足(8)式，记住 $Q_1(\mu)$ 在积分路线下方没有奇点。方法是把(8)式中 $Q_1(\mu)$ 的系数分解因子，使成为下述形式：

$$\frac{1+e^{ika\sqrt{1-\mu^2}}}{\sqrt{1-\mu^2}} = U_1(\mu) L_1(\mu), \qquad (9)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $U_1(\mu)$ 在积分路线上方的半平面内没有奇点和零点，并且在无穷远处是代数增长的，而 $L_1(\mu)$ 在积分路线下方的半平面内具有同样特性．从维纳和霍普夫的一般理论[1]得知，这种因子分解是可能的，汉斯(Heins)[2] 给出了 $U_1(\mu)$ 和 $L_1(\mu)$ 的显式．因此清楚地得出

$$Q_1(\mu) = \frac{i}{2\pi}\sqrt{1-\mu_0^2}\, U_1(\mu_0) \frac{1}{L_1(\mu)(\mu+\mu_0)}, \tag{10}$$

式中已援引隐含在(9)式中的关系式 $U_1(\mu) = L_1(-\mu)$，(除了任意常数因子外)．

同样，如果

$$\frac{1-e^{ika\sqrt{1-\mu^2}}}{\sqrt{1-\mu^2}} = U_2(\mu)L_2(\mu), \tag{11}$$

则有

$$Q_2(\mu) = \frac{i}{2\pi}\sqrt{1-\mu_0^2}\, U_2(\mu_0) \frac{1}{L_2(\mu)(\mu+\mu_0)}. \tag{12}$$

把(1)和(2)式相加，得出总散射场．因此，例如在 $y>0$，总散射场为

$$\begin{aligned} E_z^{(s)} &= \int_C \{P_1(\cos\alpha) + P_2(\cos\alpha)e^{ika\sin\alpha}\} e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int_C \{Q_1(\cos\alpha)(1+e^{ika\sin\alpha}) + Q_2(\cos\alpha)(1-e^{ika\sin\alpha})\} \\ &\quad \times e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \\ &= \int_C P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha, \end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \frac{1}{2}\sqrt{1-\mu^2}\,\{Q_1(\mu)U_1(\mu)L_1(\mu) + Q_2(\mu)U_2(\mu)L_2(\mu)\} \\ &= \frac{i}{4\pi}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}\sqrt{1-\mu^2}}{\mu+\mu_0}\{U_1(\mu_0)U_1(\mu) + U_2(\mu_0)U_2(\mu)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

---

1) E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 339.
2) A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6** (1948), 157.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

应再次记住 $P(\mu)$ 对 μ 和 μ_0 的对称性。还有，当 $a=0$ 时，$U_1(\mu)=\sqrt{2/(1+\mu)}$，$U_2(\mu)=0$，因此(14)式理所当然地化为§ 11.5(6)式。

§ 11.8.2 平行错开的半平面的无限堆垛

在这个问题[1]中，有一组无限多的衍射薄片，第 n 片占有 $y=na$，$x>nb$，其中 $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

因此，同前，对于 E 偏振的入射平面波，由第 m 块薄片中的感生电流引起的散射场可写为

$$E_z^{(sm)}=\int_C P_m(\cos\alpha)e^{-ikm(a\cos\alpha\pm b\sin\alpha)}e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha, \quad (15)$$

$y>ma$ 时用上面的符号，$y<ma$ 时用下面的符号。所有的 $P_m(\mu)$ 都必须在 $\mu=\cos\alpha$ 平面的积分路线下方没有奇点。

由第 n 块薄片上的边界条件得出下述积分方程：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}e^{ika|n-m|\sqrt{1-\mu^2}}e^{ik(x-mb)\mu}d\mu$$
$$=-e^{-ikx\mu_0}e^{-ikna\sqrt{1-\mu_0^2}}, \quad (16)$$

对于 $x>nb$，上式必须成立。

根据本问题的周期性，显然

$$P_m(\mu)=P_0(\mu)e^{-ikm(b\mu_0+a\sqrt{1-\mu_0^2})}, \quad (17)$$

并且令 $n-m=q$，因此对于 $x>0$，(16)式变为

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_0(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}e^{ikq(b\mu_0+a\sqrt{1-\mu_0^2})}e^{ika|q|\sqrt{1-\mu^2}}e^{ik(qb+x)\mu}d\mu$$
$$=-e^{-ikx\mu_0}. \quad (18)$$

对 q 的无限求和可写成闭合形式，又剩下的积分方程可利用柯西留数定理求解。同前一个问题一样，需要把某一函数“分解”

---

1) J. F. Carlson and A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **4** (1947), 313 and **5** (1947), 82.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

成一对因子，其中一个因子在上半平面内没有奇点和零点，并且在无穷远处是代数增长的，而另一个因子在下半平面内具有同样特性；在已经引用过的卡耳森（Carlson）和汉斯的论文中给出了这些因子的显式，以及进一步的细节。

§ 11.8.3 窄条

另一个有本质意义的问题是一个容易使人误解的简单问题，其中衍射障碍物是一无限长且两棱边平行的完全导电的平面窄条；或者相当于其互补"屏"为无限大平面内的一条狭缝的问题。曾经给出过不同的求解方法[1]但没有一个得出闭合形式的结果。对于正入射的平面波，曾利用对偶积分方程的办法[2]按下述方式得出 ka 的幂级数解的前两项，其中 $2a$ 是窄条的宽度。

对于占有 $y=0$, $|x|<a$ 的窄条，以及正入射的 H 偏振的平面波，§ 11.4(19) 和 § 11.4(20) 的积分方程为

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu)e^{ikx\mu}d\mu = 1 \qquad |x|<a, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu}d\mu = 0, \qquad |x|>a; \tag{20}$$

或者，因本问题的对称性意味着 $P(\mu)=P(-\mu)$，所以

---

1) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43** (1897), 259 [又载于 *Scientific Papers*, **4**, 283]; K. Schwarzschild, *Math. Ann.*, **55** (1902), 177; P. M. Morse and P. J. Rubenstein, *Phys. Rev.*, **54** (1938), 895; A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic Press, 1954), p. 273; B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd ed., 1950), p. 117 及其后; S. Skavlem, *Arch. Math. Naturvid.*, **51** (1951), 61; E. B. Moullin and F. M. Phillips, *Proc. Inst. Elec. Engrs.*, **99** Pt. IV (1952), 137; R. Müller and K. Westpfahl, *Z. f. Phys.*, **134** (1953), 245; P. C. Clemmow, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, AP-4 (1956), 282; S. N. Karp and A. Russek, *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 886; R. F. Millar, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54** (1958), 479, 497.

2) E. Groschwitz and H. Hönl, *Z. f. Phys.*, **131** (1952), 305; H. Hönl and E. Zimmer, *Z. f. Phys.*, **135** (1953), 196; C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **7** (1954), 317.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\int_0^\infty P(\mu)\cos(kx\mu)d\mu = \frac{1}{2}, \quad |x| < a, \tag{21}$$

$$\int_0^\infty \frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\cos(kx\mu)d\mu = 0, \quad |x| > a. \tag{22}$$

寻找下述形式的解：

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{J_{2m+1}(ka\mu)}{\mu}, \tag{23}$$

这是因为此级数每一项都满足(22)式．代入(21)式得知，待求的 c_m 必须满足

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \Phi_m = \frac{1}{2}, \qquad |x| < a, \tag{24}$$

式中

$$\Phi_m = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} J_{2m+1}(ka\mu)\cos(kx\mu)d\mu. \tag{25}$$

现在可以证明，对于 $|ka| \ll 1$,

$$\Phi_m = i\int_0^\infty J_{2m+1}(ka\mu)\cos(kx\mu)d\mu + O(ka)$$

$$= \frac{i\cos\left[(2m+1)\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]}{ka\sqrt{1-x^2/a^2}} + O(ka); \tag{26}$$

由此，到一级近似，(24)式为

$$\frac{i}{\sqrt{1-x^2/a^2}}\sum_{m=0}^{\infty} c_m\cos\left[(2m+1)\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] = \frac{1}{2}ka, \tag{27}$$

给出

$$c_0 = \frac{ka}{2i}, \quad c_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{28}$$

因此，到一级近似，有

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} = \frac{ka}{2i}\frac{J_1(ka\mu)}{\mu}, \tag{29}$$

而由 § 11.4(16) 式导出的电流密度为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$J_x(x) = \frac{cka}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{J_1(ka\mu)}{\mu}\cos(kx\mu)d\mu = \frac{cka}{2\pi i}\sqrt{1 - x^2/a^2}. \quad (30)$$

下一级近似包含 $(ka)^3$ 的项，更加复杂得多了。几位作者[1] 已独立地得出它的同样表达式。

§11.8.4 某些进一步的问题

还有一些其他的感兴趣的问题，与我们已讨论过的那些类似，它们能求解，但这里只能简单提及。

很多年以前[2] 已解过二维楔形物的衍射。当外楔角为 2π 时，楔就化为半平面。它含有周期为 $2\pi/n$ 的角谱，其中 π/n 是外楔角。

汉森 (Hanson)[3] 最早考虑过位于两种不同的均匀媒质界平面的半平面问题。它用本章的方法是容易处理的，并已应用于[4] 地球表面上无线电波传播理论。

在偏离理想化条件下的半平面效应，已构成两项研究成果。第一项中[5]，引入有限的然而很大的电导率，它需要采用近似的边界条件；第二项中[6]，假定金属板是完全导电的，但具有有限的然而很薄的厚度。

§11.9 解的唯一性

在 §11.2 中已经看到，我们考虑过的一般衍射问题可表述为下述形式：给定一个入射到完全导电表面 S 上的场 $\boldsymbol{E}^{(i)}$，求一个

---

1) R. Müller and K. Westpfahl, *Z. f. Phys.*, **134** (1953), 245; C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **7** (1954), 317. 又见 C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17** (1954), 73.

2) H. M. Macdonald, *Electric Waves* (Cambridge University Press, 1902); H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **18** (1919), 291.

3) E. T. Hanson, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **237** (1938), 35.

4) P. C. Clemmow, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **246** (1953), 1.

5) T. B. Senior, *Proc. Roy. Soc.* A, **213** (1952), 436.

6) D. S. Jones, *Proc. Roy. Soc.* A. **217** (1953), 153.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

能由 S 中电流分布引起的场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$，并使它在 S 上的切向分量是 $\boldsymbol{E}^{(i)}$ 相应切向分量的负值.

当然，用公式表示应得出唯一解[1]，这是不可缺少的，但证明实际上不能有多于一个场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$ 满足上述条件，决不是一件简单的事情，特别是考虑到 S 是无限的以及场由许多平面波组成的可能性时更是如此. 仅到了较近代，看来才满意地建立了这一结果[2]，虽然它曾长期被默认.

进一步的困难出现在一类特殊的然而最普通的衍射问题里，其中障碍物可假定具有无限锐的棱边，而本章的讨论确实已作此限制. 附加的复杂性的原因在于，如前所见，这时解包含一个在棱边处的奇点，因而违反了刚才提到的唯一性证明所必需的一个假定.

很容易看出，如果容许一个任意的棱边奇点，则通过微分法[3]可得出解的无限序列. 例如，半平面问题的 E 偏振解 § 11.5(22) 式对 x 求微商，给出一个本质上是新的表达式，它也满足波动方程，并且在屏上为零；或者，再把 § 11.5(22) 式对 y 求微商得出一个表达式，它显然满足 H 偏振的解，但它不同于 § 11.5(44) 式.

每一次微分，在衍射棱边处引入一个更高阶的奇点，显然为了保证唯一性，必须在奇点的性质上规定某种限制. 适当的限制及可能表述这种限制的不同方法曾经是一些论文[4]的课题. 读者欲知其详，须参考这些论文，但一般可以说，应取包含可能的最低阶

---

1) 确定解的存在恐怕较不重要，因为在任一特殊情况下找到了一个解时，这个问题就解决了. 但可参看 C. Müller, *Math. Ann.*, **123** (1951), 345, 和 W. K. Saunders, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38** (1952), 342.

2) F. Rellich, *Jahr. Deut. Math. Ver.*, **53** (1943), 57. 见 A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics* (New York, Academic Press, 1949), § 28 中的说明. W. K. Saunders, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38** (1952), 342.

3) C. J. Bouwkamp, *Physica*, **12** (1946), 467.

4) J. Meixner, *Ann. d. Physik*, **6** (1949), 1; A. W. Maue, *Z. f. Phys.*, **126** (1949), 601; E. T. Copson, *Proc. Roy. Soc. A*, **202** (1950), 277; D. S. Jones, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3** (1950), 420; A. E. Heins and S. Silver, *Proc Camb. Phil. Soc.*, **51** (1955), 149; 同上, **54** (1958), 131.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

奇点的解来代表物理问题的答案，事实上，这就排除了在衍射棱边随着 $r\to 0$ 有大于 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶的任何奇点．尤其是，可以确定，解是唯一的就意味着感生电流在整个衍射表面上是可积分的，并且它垂直于棱边的分量在棱边处为零． $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 各分量在棱边附近的性质可以从这些条件导出．

最后，人们会问，既然已看到无限多个“解”的可能性，为什么本章所用的方法显然只得出唯一解，而且它被上述判据断定为正确的解．答案是因为假定在衍射屏平面内的场分量可表示为收敛的傅里叶积分；这就避免了它们具有过于高阶的奇点．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第十二章　光被超声波衍射

第一章和第二章中曾看到，电磁波的传播既可用麦克斯韦方程并补充以物质方程来研究，也可借助于某些利用媒质偏振性质的积分方程来研究。特别是，这两种方法中任何一种也都可用来研究光通过其密度取决于空间坐标和时间的媒质的传播。虽然前一种方法过去曾广泛地应用，但后一种方法仅在近年来才应用于这类研究。本章中，我们将把积分方程法应用于被超声波通过所扰动的透明均匀媒质对光的衍射问题。不过，首先给出这种衍射现象的定性描述，并在麦克斯韦微分方程的基础上给出关于这个问题的理论工作概要，将是有用的。

§ 12.1　现象的定性描述和基于麦克斯韦微分方程的理论概要

§ 12.1.1　现象的定性描述

超声波是一种其频率高于人耳正常能听到频率的声波。实验室中产生的超声波角频率约为 10^5 秒$^{-1}$ 至 3×10^9 秒$^{-1}$，前一值代表人耳能听到的极限。相应波长 Λ 的范围，当然取决于这些波在它们所通过的媒质中的速度 v。例如，在水中，$v=1.2\times10^5$厘米/秒，与上述频率范围相应的波长范围是 $\Lambda=7.5$ 厘米至 2.5×10^{-4} 厘米[1]。

1921 年，布里渊[2] 曾预言，有短波长的压缩波横向通过的液体被可见光辐照时，会产生类似于光栅产生的衍射现象。为了理

1) 超声波的产生方法及其多种应用，例如参看 L. Bergmann, *Der Ultraschall* (Zürich, Hirzel, 1954).

2) L. Brillouin, *Ann. de Physique*, **17** (1921), 103.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

解这种现象，考虑位于两个无限大的平面 $y=0$ 和 $y=d$ 之间的液体，并令波长为 Λ 的平面压缩波沿正 x 方向通过它，这就引起了物质沿 x 轴周期性地分层，两个相邻的密度为极大值的平面之间的距离为 Λ.

设入射的单色平面光波在媒质中的角频率为 ω，波长为 $\bar{\lambda}$，其波法线位于 xy 平面并与 y 轴成 $\bar{\theta}$ 角(见图 12.1). 又设 $\bar{\phi}$ 表示衍射光线与 y 轴的夹角. 因为压缩波的速度 v 总是比光速小得很多，所以作为一级近似，可以认为物质所分层次是稳定的. 因此，具有可观强度的方向 $\bar{\phi}$ 由下述条件决定，即来自相距为 Λ 的两相邻平面的光线之间的光程差应为 $\bar{\lambda}$ 的整数倍. 这个条件给出了 $\bar{\lambda}$, $\bar{\theta}$ 与衍射光谱中不同序的波传播方向 $\bar{\phi}_l$ 之间的关系：

$$BC-AD=\Lambda(\sin\bar{\phi}_l-\sin\bar{\theta})=l\bar{\lambda}(l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),\quad(1)$$

AB 和 CD 分别是与折射光线和衍射光线对应的波阵面一部分. 用在媒质外部的角 θ 和 ϕ 及波长 λ 来改写(1)式是很方便的. 如果在(1)式中应用折射定律

$$\frac{\sin\bar{\theta}}{\sin\theta}=\frac{\sin\bar{\phi}}{\sin\phi}=\frac{\bar{\lambda}}{\lambda},$$

则得出

$$\Lambda(\sin\phi_l-\sin\theta)=l\lambda\quad(l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).\qquad(2)$$

由(2)式，对于相邻两序之间的角分离，有

$$\sin\phi_l-\sin\phi_{l-1}\simeq\phi_l-\phi_{l-1}=\frac{\lambda}{\Lambda}.$$

因此，对于给定的 λ，角分离随着 Λ 的增加而减小. 如果 Λ 足够大，则各主线将彼此靠近到一起以致观察仪器分辨不出来，由于这个原因，当普通的声波被可见光辐照时，观察不到衍射效应.

在布里渊预言后约过了十年，德拜和席尔斯 (Sears)[1] 以及卢卡斯 (Lucas) 和比夸特 (Biquard)[2] 分别独立地观察到光被超声波衍射. 从那时起，很多研究工作者在改变下述一个或多个物理

1) P. Debye and F. W. Sears, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, **18** (1932), 409.
2) R. Lucas and P. Biquard, *J. Phys. Radium*, **3** (1932), 464.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

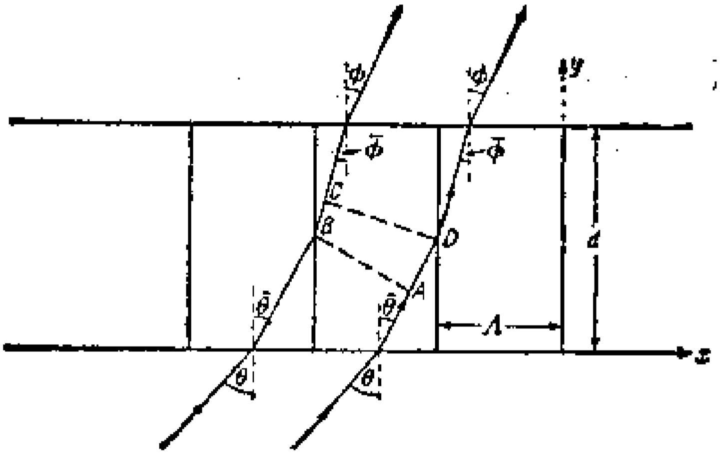


图 12.1　作为衍射光栅的超声波

量而得出的各种实验条件下研究过这种现象：(a) 入射角 θ，(b) 超声波的波长 Λ，(c) 入射光的波长 λ，(d) 超声波的振幅，(e) 超声束的宽度 d。

当然，屏上各序的位置及其数目与相对强度，均取决于这些因子中的一个或多个[1]。图 12.3 (811 页)示出在一种典型情况下，对于不同的入射角 θ，在透射束两侧出现的序数。通常用于研究衍射光谱的实验装置如图 12.2 所示。

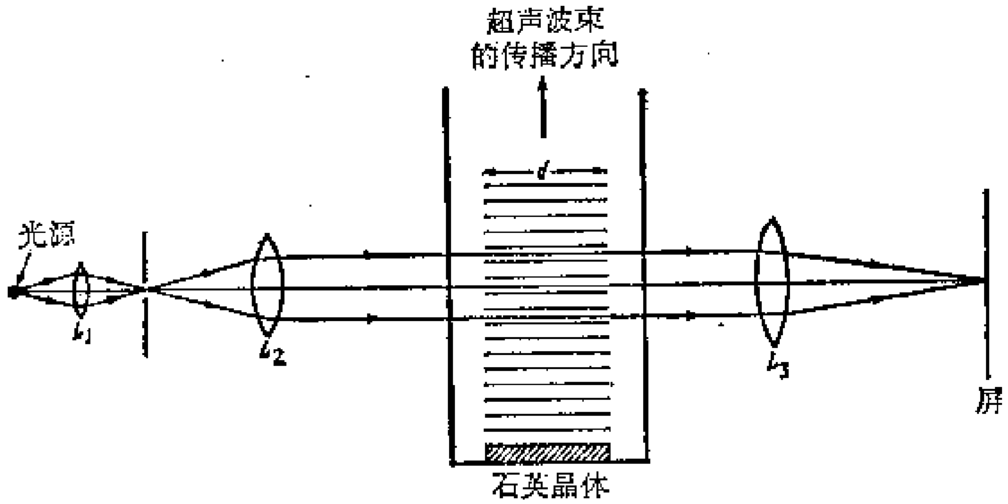


图 12.2　观察光被超声波衍射的实验装置

1) 衍射光谱对这些因子的依赖关系的半定量讨论，见 G. W. Willard, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **21** (1949), 101.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

至此，定义本章所惯用的某些符号和记号是合宜的。

媒质的分子（原子）数密度用 $N(\mathbf{r}, t)$ 表示。对于被一个沿正 x 方向传播的平面压缩波横向通过的各向同性均匀媒质，$N(\mathbf{r}, t)$ 可写成下述形式[1]：

$$N(\mathbf{r}, t) = N_0[1 + \Delta\cos(Kx - \Omega t)], \tag{3}$$

式中 N_0 是媒质的平均分子数密度，$N_0\Delta$（通常约为 $10^{-4}N_0$）是压缩波的振幅，$K = 2\pi/\Lambda$ 是它的波数（波矢的大小），$\Omega = Kv$ 是超声扰动的角频率。在这样的一种媒质中，介电常数 ε 也是空间和时间坐标的函数；其依赖关系可假定为下述形式：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\cos(Kx - \Omega t). \tag{4}$$

当然，ε_1 和 Δ 之间存在关系，可写成

$$\varepsilon_1 = \gamma\Delta. \tag{5}$$

如果我们假定洛伦兹-洛伦茨定律（参看§2.3(17)式）

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\cdot\frac{1}{N} = \text{常数}, \tag{6}$$

对(6)式的对数求微分，并记住 Δ 和 $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ 两者都比 1 小很多，则得出

$$\varepsilon_1\left[\frac{1}{\varepsilon_0 - 1} - \frac{1}{\varepsilon_0 + 2}\right] - \frac{N_0\Delta}{N_0} = 0,$$

或

$$\gamma = \frac{1}{3}(\varepsilon_0 - 1)(\varepsilon_0 + 2); \tag{7}$$

对于大多数液体，γ 的数量级为 1。

又令

1) 为了简单起见，我们只涉及平面前进超声波。光被驻波衍射也曾在实验上研究过（参看 Bergmann，上述引文）；理论的相应推广是简单易懂的。

应当注意，完全平面超声波在实验上是难以产生的；不过，一般地说，经过线度远远大于 Λ 的区域，就有可能把波阵面看成是平面。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
&n=\sqrt{\varepsilon_0}, \quad k=\frac{2\pi}{\lambda}, \quad \bar{k}=nk, \\
&\delta=\frac{\Delta\Lambda^2}{\lambda^2}, \quad \xi=\frac{\Lambda}{\lambda}\sin\theta, \quad \beta=\frac{\pi\lambda}{n\Lambda^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

最后,角 θ, ϕ 等都是从正 y 方向顺时针量度到光前进方向的(参看图 12.1). 可以假定 $0 \leqslant \theta < \pi/2$.

§12.1.2 基于麦克斯韦方程的理论概要

在没有电流和电荷的区域内,对于一种非磁性,不导电且其介电常数 ε 可能是空间和时间坐标函数的媒质,麦克斯韦方程为

$$
\operatorname{curl} \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{9a}
$$

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{H}=0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D}=0. \tag{9b}
$$

从(9a)式中消去 $\boldsymbol{H}$, 并利用关系式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}=0$, $\operatorname{curl}\operatorname{curl}=-\nabla^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}$, 得出

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon\boldsymbol{E})=\nabla^2\boldsymbol{E}+\operatorname{grad}(\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{grad}\log\varepsilon). \tag{10}
$$

如果现在利用(4)式, 并把 $\boldsymbol{E}$ 看成是波长 $\bar{\lambda}\sim\lambda/n$ 的若干个平面波的叠加,则可求出(10)式右边第二项数量级为 $\varepsilon_1(\lambda/\Lambda)$ 与第一项的积.因为在通常的实验条件下, ε_1 和 λ/Λ 两者都远小于 1, 所以可略去(10)式中这一项而得出

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon\boldsymbol{E})=\nabla^2\boldsymbol{E}. \tag{11}
$$

现在, 考虑图 12.1 中说明的物理情况, 并设入射的单色平面电磁波是线偏振的,其电矢量垂直于入射平面(E 偏振),即沿着 z 轴. 于是,由上述讨论得出,在媒质内部, $\boldsymbol{E}$ 的 E_x 和 E_y 分量都是数量级为 $\varepsilon_1(\lambda/\Lambda)$ 与 E_z 的积的很小的量, 因此可以略去. 结果 E_x 和 E_y 在媒质外也可略去.

根据问题的对称性,显然, E_z 应与 z 坐标无关;因此,利用(4)和(11)式得出 E_z 的方程为:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\left[\varepsilon_0+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(e^{i(Kx-\Omega t)}+e^{-i(Kx-\Omega t)}\right)\right]E_z\right\}=0. \qquad (12)$$

为了解出(12)式，假定 E_z 的形式为

$$E_z=\sum_l V_l(y)e^{i[(k\sin\theta+lK)x-(\omega+l\Omega)t]}, \qquad (13)$$

式中求和是对 l 的全部整数(正，负和零)值.

把(13)式代入(12)式，并使各指数的系数等于零，就得出 $V_l(y)$ 的下述递推关系：

$$V_l''(y)+\{\varepsilon_0 c^{-2}(\omega+l\Omega)^2-(k\sin\theta+lK)^2\}V_l(y)$$
$$=-\frac{1}{2}\varepsilon_1 c^{-2}(\omega+l\Omega)^2\{V_{l-1}(y)+V_{l+1}(y)\},$$
$$(l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots), \qquad (14)$$

式中 $V_l(y)$ 上的一撇表示对 y 的微商. 这些方程必须在下述边界条件[1]下求解：

$$\left.\begin{aligned}&V_0(0)=B,\quad \text{入射光波的振幅}\\ \text{和}\quad &\\ &V_l(0)=0,\quad \text{对所有 } l\neq 0.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

在解(14)式之前，我们注意到(13)式代表频率 $\omega_l=\omega+l\Omega$ $(l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 的波的叠加. 而且，对于频率为 ω_l 的波，波矢的 x 分量为 $k\sin\theta+lK$. 因此，频率为 ω_l 的波离开散射媒质后与 y 轴夹角 ϕ_l 的正弦由下式给出：

$$\sin\phi_l=\frac{c(k\sin\theta+lK)}{\omega+l\Omega}$$
$$\sim\sin\theta+l\frac{\lambda}{\Lambda},\qquad \text{因}\ \frac{\Omega}{\omega}\ll 1, \qquad (16)$$

与(2)式相符. 而且，特定的 l 序的强度可取为 $|V_l(d)|^2$.

---

1) 当然，这些边界条件仅当反射波的强度可略去时才是正确的；在现在的问题中正是如此，因为要使衍射波的振幅可以看得出来，入射角 θ 至多约为 3°(又见§12.2.4).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

首先通过假定 $|V_0| \gg |V_{\pm1}| \gg |V_{\pm2}|\cdots$ 来解(14)式. 记住只须考虑(14)式的那些相应于沿 y 增加方向传播的光波的解，我们可以令(14)式中除 V_0 外所有的 V_l 都等于零,并利用(15)式,则作为一级近似,有

$$V_0^{(0)}(y) = Be^{i\sqrt{\varepsilon_0-\sin^2\theta}ky} + O(\delta^2). \tag{17}$$

同样,令(14)式中除 $V_{\pm1}$ 和 V_0 外所有的 V_l 都等于零,则经简单计算后得出,

$$V_{\pm1}(y) = \frac{1}{4}\gamma\delta\frac{1-e^{-2i\beta(\xi\pm\frac{1}{2})y}}{\xi\pm\frac{1}{2}}V_0^{(0)}(y). \tag{18}$$

这里也用到了(5)和(8)式. 如果现在对于 $l=0$ 和 $l=\pm2$,将(18)式代入(14)式，则得出 $V_0^{(0)}(y)$ 的校正项和 $V_{\pm2}(y)$的表达式;在这级近似下,两者都正比于 δ^2. 用这种方法,就得到了任一 l 序强度的具有 δ 的升幂级数形式的表达式. 布里渊[1] 最早导出了用这样的幂级数表示的解，他用了比这里介绍的稍为复杂的分析,而戴维 (David)[2] 仿照上述方法,假定更高序的强度可略去而给出了第一序和第二序谱线强度的显式. 后者的公式见 § 12.2.5 [(38)式].

如果 $\delta \ll 1$ 或 $\delta/\xi \ll 1$,则布里渊的近似(以及戴维的近似)是合宜的,因为这时逐次逼近法和幂级数都很快地收敛. 当满足这些条件时,显然只有前几序具有可觉察的强度.

喇曼和纳斯 (Nath)[3] 最早给出了关于许多序同时出现的解

---

1) L. Brillouin, *La Diffraction de la Lumière par des Ultrasons* (Paris, Hermann, 1933).

2) E. David, *Phys. Z.*, **38** (1937), 587.

3) C. V. Raman and N. S. N. Nath, *Proc. Ind. Acad. Sci.* A, **2** (1935), 406, 413; 同上, **3** (1936), 75, 119.

不妨提及，喇曼和纳斯在他们头两篇论文(上述引文)中，仿照瑞利关于位相光栅的研究工作 (*Proc. Roy. Soc.* A, **79** (1907), 399)，发现衍射波的振幅可用贝塞耳函数表示. 这种方法只考虑平面光波横向通过超声束时光波位相的变化.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

释，以及它们强度的近似表达式。他们解(14)式的方法如下。在(14)式中令

$$V_l(y)=e^{\frac{1}{2}il\pi}e^{i\bar{k}(\cos\bar{\theta})y}U_l(y), \tag{19}$$

记住 $\Omega/\omega\sim 10^{-5}$ 或更小，$\bar{k}=nk$ 和 $k\sin\theta=\bar{k}\sin\bar{\theta}$，就得到 $U_l(y)$ 的下述递推关系：

$$U_l''(y)+2i\bar{k}\cos\bar{\theta}U_l'(y)-(2l\bar{k}K\sin\bar{\theta}+l^2K^2)U_l(y)$$
$$+\frac{1}{2}i(\bar{k})^2\varepsilon_1\varepsilon_0^{-1}[U_{l+1}(y)-U_{l-1}(y)]=0,$$
$$(l=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{20}$$

引入一个新变量

$$\chi=\frac{1}{2}y\bar{k}\varepsilon_1\varepsilon_0^{-1}\sec\bar{\theta},$$

(20)式变为

$$2U_l'(\chi)+U_{l+1}(\chi)-U_{l-1}(\chi)=\left(\frac{1}{2}i\varepsilon_0^{-1}\varepsilon_1\right)\sec^2\bar{\theta}U_l''(\chi)$$
$$-2i\varepsilon_0\varepsilon_1^{-1}\{2lK(\bar{k})^{-1}\sin\bar{\theta}+l^2K^2(\bar{k})^{-2}\}U_l(\chi), \tag{21}$$

式中 U 上的一撇表示对 χ 的微商。因 $\lambda/d\ll1$，所以右边第一项通常约为 ε_1U，即 $10^{-4}U$，从而可以略去。此外，如果仿照喇曼和纳斯的方法，令第二项也等于零，则所得到的方程组是被整数阶贝塞耳函数满足的递推关系[1]。利用边界条件(15)，第 l 序波的强度的表达式为 $B^2J_l^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_0^{-1}\bar{k}d\sec\bar{\theta}\right)$。

注意到喇曼和纳斯所作的近似，实质上是对所有的 l 都略去 l^2/δ 和 $l\xi/\delta$。因此，如果 δ 与 1 相比足够大，则这种近似对于较低序的强度是很好的近似。然而贝塞耳函数表达式过高估计了较高序的强度。这已被埃克斯托曼(Extermann)和瓦尼耳(Wannier)[2]对参量 δ 的三个值作强度数值计算证明过。在这些作者的工作

1) 例如，见 E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, *4th ed.*, 1946), p. 360.

2) R. Extermann and G. Wannier, *Helv. Phys. Acta*, 9 (1936), 520.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

中，(12)式的解最终是由本质上类似于下一节的(18)和(19)这样的方程确定的.

最后讲一下，纳斯[1]和阿加瓦 (Aggarwal)[2] 曾得出(21)式具有 $1/\delta$ 的升幂级数形式的解；这些级数由于收敛很慢，看来只有相当有限的适用范围. 瓦格纳 (Wagner)[3] 给出了另一种基于麦克斯韦方程的处理方法，其中衍射作为边值问题来处理.

§12.2 用积分方程法处理光被超声波衍射

§2.4中曾经指出，有效电场 $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}, t)$ 的积分方程§2.4(4)和 $\boldsymbol{H}'$ 的伴随公式§2.4(5)，与各向同性非磁性物质的麦克斯韦方程等效. 那里曾假定媒质的密度与时间无关，但不难推广到包括它依赖于时间的更一般的情况. 目前，假定媒质为非磁性和不导电的.

记住积分方程法的主要内容是，物质对电磁波传播的影响与真空中放入电偶极子的效应等价，在其线度远小于 λ 的任一物理上无限小的体积元[4] $d\boldsymbol{r}'$ 内感生的偶极矩，与作用在其上的场 $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}', t)$ 以及该体积内的分子(原子)数成正比. 与这样一个在 $\boldsymbol{r}'$ 处的偶极子相联系的赫兹矢量为

$$\boldsymbol{\Pi}_e = \alpha N\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{c}\right)\frac{\boldsymbol{E}'(t - R/c, \boldsymbol{r}')}{R}\,d\boldsymbol{r}',$$

时刻 t 在点 $\boldsymbol{r}$ 处的场可用

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div}$$

对上式作运算导出(参看§2.2(43)式). 这里各个符号具有同

---

1) N. S. N. Nath, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **4** (1936), 222; 同上, A, **8** (1938), 499.
2) R. R. Aggarwal, 印度德里大学哲学博士论文 (1954).
3) E. H. Wagner, *Z. f. Phys.*, **141** (1955), 604, 622.
4) 对于光学波长，几乎总可选取这样的体积元，即比单个原子(分子)的体积大很多但其线度却比 λ 小很多的体积元.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 2.4 中一样的意义；因此 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，而算符 grad div 作用在变量 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 上. 然后通过类似于导出 § 2.4(4) 式的论证，就得出媒质内部 $\boldsymbol{E}'$ 的下述积分方程[1]：

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}, t)=\boldsymbol{E}^{(i)}(\boldsymbol{r}, t)+\alpha \iiint\left\{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}+\operatorname{grad} \operatorname{div}\right\}$$

$$\left\{N\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{R}{c}\right) \frac{\boldsymbol{E}'\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{R}\right\} d \boldsymbol{r}'. \qquad (1)$$

同 § 2.4(4)式中一样，积分遍及全部媒质，除了被观察点 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 处的原子占有的一个很小的区域外.

这就是该理论的基本积分方程. 当解出媒质内部所有各点处的 $\boldsymbol{E}'$ 时，媒质之外的场可把入射场 $\boldsymbol{E}^{(i)}(\boldsymbol{r}, t)$ 和偶极场 $\boldsymbol{E}^{(d)}(\boldsymbol{r}, t)$ 加在一起算出，后者由(1)式中的积分给出，但现在积分要扩展到遍及全部媒质. 应当注意到，与通常的建立媒质和真空中的麦克斯韦方程的方法不同，这种对于光通过媒质传播的处理避免了明显引入折射表面处的边界条件，而代之以在遍及全部媒质的积分过程中引入媒质的尺寸大小. 而且，在麦克斯韦方程中，媒质密度的变化是通过它对介电常数 ε 的影响来考虑的，而在积分方程(1)中，密度函数 $N(\boldsymbol{r}, t)$ 是明显出现的.

(1)式仅在某些限制条件下才成立. 首先，每个分子的极化率 α 一般依赖于 $\boldsymbol{E}'$ 的频率，因此 $\boldsymbol{E}'$ 应是严格单色的. 不过，如果不太靠近色散频率，α 随外场频率的变化是很小的. 因此，只要 $\boldsymbol{E}'$ 的所有成分的频率彼此接近，就仍然可用(1)式. 即使入射场 $\boldsymbol{E}^{(i)}$ 是严格单色的，当 $N(\boldsymbol{r}, t)$ 由于热骚动或其他某种无序的原因而依赖于时间时，作用于一个分子上并产生偶极子的那个场 $\boldsymbol{E}'$ 也不一定是单色的；其频率的展开取决于 $N(\boldsymbol{r}, t)$ 随时间的变化. 因

---

1) (1)式与 § 2.4(4) 式的区别在于后者中的算符 curl curl 已被 $\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}+\operatorname{grad} \operatorname{div}\right)$ 所代替，并且现在依赖于空间和时间坐标的密度 N，正如 $\boldsymbol{E}'$ 一样，也必须取在推迟时间 $t-R/c$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

此，仅当N随时间的变化比$\boldsymbol{E}^{(i)}$随时间的变化慢得多时，才能安心地应用(1)式[1]. 幸而这一限制并不严重，因为所要求的条件在光的散射和衍射问题中几乎总是满足的.

再者，我们已取α为标量，这一假定对于原子和具有特殊对称性的分子是完全合理的，而且如§2.3所述，只要分子无规取向时，这一假定也更一般地成立. 最后，这里已假定光被媒质吸收可以忽略；它可以容许α为复值来考虑.

现在将仿效巴蒂亚（Bhatia）和诺布耳（Noble）[2]的分析，把积分方程法应用于被超声波横向通过的流体对光的衍射问题.

§12.2.1 $\boldsymbol{E}$偏振的积分方程

让我们再次考虑§12.1.1中所描述的物理情况，并假定入射光是线偏振的，其电矢量垂直于入射平面；因此，入射光波的电矢量$\boldsymbol{E}^{(i)}(\boldsymbol{r}, t)$的各个分量为(实部照常代表物理量)，

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(i)} &= E_y^{(i)} = 0, \\ E_z^{(i)} &= Be^{i(kx\sin\theta + ky\cos\theta - \omega t)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

根据789页中所作的论证，可以推断，这时在媒质内部的有效场$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}, t)$将几乎平行于$z$轴，因此可以假定$E'_x = E'_y = 0$，而$\boldsymbol{E}'$的矢量积分方程(1)就化为$E'_z$的单个积分方程. 记住$N(\boldsymbol{r}, t)$现在是由§12.1(3)式给出的，就可以把$E'_z$的积分方程写成下述形式：

$$\begin{aligned} E'_z(\boldsymbol{r}, t) = Be^{i(kx\sin\theta + ky\cos\theta - \omega t)} + \frac{\tau_0}{4\pi}\iiint\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \\ \times\left[\frac{1}{R}\left\{1 + \frac{1}{2}\Delta\left(e^{i[Kx' - \Omega(t - R/c)]} + e^{-i[Kx' - \Omega(t - R/c)]}\right)\right\}\right. \\ \left. \times E'_z\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{c}\right)\right] d\boldsymbol{r}', \end{aligned} \tag{3}$$

---

1) 对于非均匀媒质，在麦克斯韦方程中应用关系式$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$，实际上也仅在与$N$同样的限制下才是合理的.

2) W. J. Noble, 爱丁堡 (Edinburgh) 大学哲学博士论文(1952); A. B. Bhatia and W. J. Noble, *Proc. Roy. Soc.*, A, **220** (1953), 356, 369.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中,为了方便起见,已引入[1]

$$4\pi N_0\alpha = \tau_0.$$

由 § 2.3(17) 式得出

$$\tau_0 = \frac{3(n^2-1)}{n^2+2}. \tag{4}$$

§ 12.2.2 积分方程的试探解

因为所有垂直于 z 轴的平面在物理上都是等效的，所以我们把下式取作积分方程(3)的试探解[2]:

$$E'_z = \sum_{l,m} N_{lm} e^{-i(\omega_{lm}t-p_l x-q_m y)}, \tag{5}$$

式中 l 和 m 都是整数(正,负和零). 看来(5)式代表双无限的平面波束;可以设想这种形式的可能解,是由于预料到在具有平行平面表面的分层媒质的一无限大的厚层中多次反射和折射的结果. 马上将看到，各个未知量 N_{lm}, ω_{lm}, p_l 和 q_m 可由(5)式满足积分方程(3)的条件确定.

为了解出(3)式,必须计算积分 $\mathscr{J}(\omega, p, q)$，其定义为

$$\begin{aligned}
&\mathscr{J}(\omega, p, q) \times e^{\{-i(\omega t-px-qy)\}} \\
&= \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \frac{e^{-i[\omega(t-R/c)-px'-qy']}}{R}\, dx'dy'dz' \\
&= \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} e^{-i(\omega t-px'-qy')} \left\{\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} \frac{e^{i\omega R/c}}{R}\, dx'dy'dz',
\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $\omega^2 > c^2p^2$. 如果观察点 x, y, z 在散射媒质之外,则体积 V' 遍及全部媒质 $(-\infty < x' < \infty,\ 0 \leqslant y' \leqslant d,\ -\infty < z' < \infty)$. 如果观察点在散射媒质内部,则积分遍及同一体积,除了围绕观察点的半径为 a (最后取极限 $a \to 0$)的小球以外. 令

$$x_1 = x' - x,\quad y_1 = y' - y,\quad z_1 = z' - z,$$

---

1) 宏观量 $\tau(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\alpha N(\boldsymbol{r},t)$，有时称为媒质的散射指数 (scattering index).

2) 振幅 N_{lm} 和分子数密度 $N(\boldsymbol{r},t)$ 之间不会出现混淆，因为从这里起后一个量不在我们的方程中明显出现.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(6)式两边消去因子 $e^{-i\omega t}$ 以后,可写成下述形式:

$$\mathscr{J}(\omega, p, q) = \mathscr{J}_1 + \mathscr{J}_2, \tag{7}$$

式中

$$\mathscr{J}_1 = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V_1}\left\{e^{i(px_1+qy_1)}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right\}dx_1dy_1dz_1, \tag{8}$$

$$\mathscr{J}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\iiint_{V_1}\left\{e^{i(px_1+qy_1)}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right\}dx_1dy_1dz_1, \tag{9}$$

现在,散射媒质扩展到遍及体积 V_1: $-\infty < x_1 < \infty$, $-y \leqslant y_1 \leqslant d - y$, $-\infty < z_1 < \infty$. 在附录 9 中计算了这些积分,给出

(a) 当 (x, y, z) 位于散射媒质内部时[1)]

$$\mathscr{J}(\omega, p, q) = \frac{1}{\sigma(\omega, p, q)} - \frac{\omega^2}{2c^2}\frac{\exp\{-ig(\omega, p, q)y\}}{g(\omega, p, q)[\omega^2c^{-2} - p^2]^{1/2}} + \frac{\omega^2}{2c^2}\frac{\exp\{-ih(\omega, p, q)(y-d)\}}{h(\omega, p, q)[\omega^2c^{-2} - p^2]^{1/2}}; \tag{10a}$$

(b) 当 (x, y, z) 位于散射媒质之后时,

$$\mathscr{J}(\omega, p, q) = \frac{\omega^2\exp[-ig(\omega, p, q)y]}{2c^2g(\omega, p, q)[\omega^2c^{-2} - p^2]^{1/2}} \times (\exp[ig(\omega, p, q)d] - 1); \tag{10b}$$

(c) 当 (x, y, z) 位于散射媒质之前时(即在入射光同一侧),

$$\mathscr{J}(\omega, p, q) = \frac{\omega^2\exp[-ih(\omega, p, q)y]}{2c^2h(\omega, p, q)[\omega^2c^{-2} - p^2]^{1/2}} \times (\exp[ih(\omega, p, q)d] - 1). \tag{10c}$$

在这些表达式中,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma(\omega, p, q) &= 3(p^2 + q^2 - \omega^2c^{-2})(p^2 + q^2 + 2\omega^2c^{-2})^{-1},\\
g(\omega, p, q) &= q - [\omega^2c^{-2} - p^2]^{1/2},\\
h(\omega, p, q) &= q + [\omega^2c^{-2} - p^2]^{1/2}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

如果现在把(5)式代入(3)式,并利用(6)和(10a)式,则以直接的方式得出

---

1) 除非另有说明,§12.2 全节均取表达式的正平方根。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$- \sum_{l,m} N_{lm} \exp[(-i)(\omega_{lm}t - p_l x - q_m y)]$$

$$+ B\exp[(-i)(\omega t - kx\sin\theta - ky\cos\theta)]$$

$$+ \tau_0 \sum_{l,m} N_{lm} \left[\frac{\exp[(-i)(\omega_{lm}t - p_l x - q_m y)]}{\sigma(\omega_{lm}, p_l, q_m)} \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\Delta \sum_{+,-} \frac{\exp[(-i)\{(\omega_{lm} \pm \Omega)t - (p_l \pm K)x - q_m y\}]}{\sigma(\omega_{lm} \pm \Omega, p_l \pm K, q_m)}$$

$$- \frac{\omega_{lm}^2 \exp[(-i)\{\omega_{lm}t - p_l x - [\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} y\}]}{2c^2 g(\omega_{lm}, p_l, q_m)[\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2}}$$

$$- \frac{1}{2}\Delta \sum_{+,-} \{(\omega_{lm} \pm \Omega)^2 \exp[(-i)\{(\omega_{lm} \pm \Omega)t - (p_l \pm K)x$$

$$- [c^{-2}(\omega_{lm} \pm \Omega)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2} y\}]\}/$$

$$\{2c^2 g(\omega_{lm} \pm \Omega, p_l \pm K, q_m)[c^{-2}(\omega_{lm} \pm \Omega)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2}\}$$

$$+ \{\omega_{lm}^2 \exp[(-i)\{\omega_{lm}t - p_l x + [\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2} y\}]$$

$$\times \exp[ih(\omega_{lm}, p_l, q_m)d]\}/\{2c^2 h(\omega_l, p_l, q_m)[\omega_{lm}^2 c^{-2} - p_l^2]^{1/2}\}$$

$$+ \frac{1}{2}\Delta \sum_{+,-} \{(\omega_{lm} \pm \Omega)^2 \exp[(-i)\{(\omega_{lm} \pm \Omega)t - (p_l \pm K)x$$

$$+ [c^{-2}(\omega_{lm} \pm \Omega)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2} y\}]\}/$$

$$\{2c^2 h(\omega_{lm} \pm \Omega, p_l \pm K, q_m)\}$$

$$\left. \times \frac{\exp[ih(\omega_{lm} \pm \Omega, p_l \pm K, q_m)d]}{[c^{-2}(\omega_{lm} \pm \Omega)^2 - (p_l \pm K)^2]^{1/2}} \right] = 0, \qquad (12)$$

式中在任一表达式前面的求和号 $\sum_{+,-}$ 应解释如下:

$$\sum_{+,-} F(a \pm b, c \pm d) = F(a + b, c + d) + F(a - b, c - d).$$

为了使(12)式在所有时刻和在散射媒质内部所有各点处都被满足，每一个指数项的系数在任何一个变量 (x, y, t) 上不同于所有其他各项的都必须单独为零. 由(12)式看出，ω_{lm} 与 Ω 同步地变化，并且总是伴随有 p_l 与 K 同步的变化. 然而在各个指数项中 y 的系数，若不是保持不变的 (q_m)，就总是相应的 ω 和 p 的相同函数. 因此，我们可以取 ω_{lm} 只依赖于指标 l. 此外，因为可以

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

假定 ω_0 为入射光的频率 ω 而不失去普遍性，所以有

$$\left.\begin{aligned}&\omega_0=\omega,\ \omega_l=\omega+l\Omega,\\&p_0=k\sin\theta,\ p_l=k\sin\theta+lK\end{aligned}\right\}(l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots). \qquad (13a)\ (13b)$$

把这些关系式用于(12)式，并将各项重新组合，(12)式变为

$$\begin{aligned}&\sum_{l,m}\left[N_{lm}(\tau_0/\sigma_{lm}-1)+\frac{1}{2}\Delta(\tau_0/\sigma_{lm})(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})\right]\\&\quad\times\exp[(-i)(\omega_lt-p_lx-q_my)]\\&\quad+\sum_l(B\delta_{l,0}-G_l)\exp[(-i)(\omega_lt-p_lx-[\omega_l^2c^{-2}-p_l^2]^{1/2}y)]\\&\quad+\sum_lH_l\exp[(-i)(\omega_lt-p_lx+[\omega_l^2c^{-2}-p_l^2]^{1/2}y)]=0,\end{aligned} \qquad (14)$$

式中 $\delta_{l,l'}$ 是克朗内克 δ 符号[1]（即当 $l\neq l'$ 时 $\delta_{l,l'}=0$，而 $\delta_{ll}=1$），G_l 和 H_l 由下式给出

$$\begin{aligned}G_l=\tau_0\omega_l^2&\sum_m\left[N_{lm}+\frac{1}{2}\Delta(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})\right]\\&\times\{2c^2g_{lm}[\omega_l^2c^{-2}-p_l^2]^{1/2}\}^{-1},\end{aligned} \qquad (15)$$

$$\begin{aligned}H_l=\tau_0\omega_l^2&\sum_m\left[N_{lm}+\frac{1}{2}\Delta(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})\right]\\&\times[\exp(ih_{lm}d)]\{2c^2h_{lm}[\omega_l^2c^{-2}-p_l^2]^{1/2}\}^{-1}.\end{aligned} \qquad (16)$$

这里也已用到下述缩写(参看(11)式)

$$\begin{aligned}&\sigma_{lm}=\sigma(\omega_l,\ p_l,\ q_m),\ g_{lm}=g(\omega_l,\ p_l,\ q_m)\\&\text{和 } h_{lm}=h(\omega_l,\ p_l,\ q_m).\end{aligned} \qquad (17)$$

使(14)式中每一个指数项的系数为零，就得到对于 q_m 的容许值和振幅 N_{lm} 的下述方程组:

$$N_{lm}(1-\sigma_{lm}/\tau_0)+\frac{1}{2}\Delta(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})=0, \qquad (18)$$

对于所有的 l 和 m，

---

1) 克朗内克符号 $\delta_{l,l'}$ 和 § 12.1(8) 式中引入的参量 δ 之间不会出现混淆，因为前者总是带下标出现的。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$B\delta_{l,0}-G_l=0, \quad (19)$$
$$H_l=0, \quad (20)$$
对于所有的 l。

§ 12.2.3 衍射和反射光谱中光波振幅的表达式

在讨论(18)至(20)式的解之前，我们写下散射媒质后方外部(x, y, z)点处总光扰动的表达式．为此，必须把(5)式代入(3)式右边的被积函数中，对整个散射媒质积分，并把入射场加到这一结果中．再次碰到前一节讨论过的积分$\mathscr{J}(\omega, p, q)$；记住对于散射媒质后方外部的一点，$\mathscr{J}(\omega, p, q)$由(10b)式给出，并利用(18)式，就得出总透射电场唯一不为零的分量的下述表达式：

$$E_z=\sum_l B_l\exp[(-i)\{\omega_l t-p_l x-[\omega_l^2 c^{-2}-p_l^2]^{1/2}y\}], \quad (21)$$

式中

$$B_l=\omega_l^2\sum_m \sigma_{lm}N_{lm}\{\exp[ig_{lm}d]\}\times\{2c^2 g_{lm}[\omega_l^2 c^{-2}-p_l^2]^{1/2}\}^{-1}. \quad (22)$$

根据(21)和(22)式，透射波可看作是由许多平面波组成的，每一个平面波具有不同的频率与不同的传播方向．把(13)式代入(21)式的指数项中，可以很容易地得出频率 ω_l 和角 ϕ_l 的表达式；这些表达式同 § 12.1.2 中给出的一样．

借助于(10c)式，也可同样写出反射光谱中振幅 $B_l^{(r)}$ 的表达式．$B_l^{(r)}$ 由下式给出：

$$B_l^{(r)}=-\omega_l^2\sum_m \sigma_{lm}N_{lm}\{2c^2 h_{lm}[\omega_l^2 c^{-2}-p_l^2]^{1/2}\}^{-1}. \quad (23)$$

然而，这里只涉及在散射媒质后方外部的那些点，因为在目前的问题中，反射光谱中各序的波强度一般是很小的．

§ 12.2.4 方程用逐次逼近法得出的解

在 § 12.2.4 和 § 12.2.5 中，根据超声波振幅Δ很小这一假定，将解出(18)—(20)式，并得到透射光谱中第一序和第二序谱线强度的近似表达式．§ 12.2.6 中将定性地讨论这种近似失效的情况，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

最后在§12.2.7中，将利用本质上等效于喇曼和纳斯近似的方法，解出(18)—(20)式.

首先考虑方程组(18). 这些方程中的附标m用来区别涉及q的不同容许值的那些量. 因此可以略去这个附标，并把(18)式写成下述形式：

$$f_l(q^2)N_l(q^2)-\frac{1}{2}\Delta[N_{l-1}(q^2)+N_{l+1}(q^2)]=0,$$
$$(l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots), \tag{24}$$

其中

$$f_l(q^2)=\frac{\sigma_l(q)}{r_0}-1=\frac{3(p_l^2+q^2-n^2\omega_l^2c^{-2})}{(n^2-1)(p_l^2+q^2+2\omega_l^2c^{-2})}. \tag{25}$$

方程组(24)构成了振幅$N_l(q^2)$的线性齐次方程的无穷集. 存在一个非平凡解(即对于所有的l, $N_l\neq0$)的条件是N_l的系数构成的行列式为零. 这个行列式方程的根给出q^2的容许值；它们可表示为$q_m^2(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$. 当然，对应于每一个这样的$q^2$值，有两个$q$值，即$+|q|$和$-|q|$，并且有两组振幅，即$N_l(+|q|)=N_l^+(q^2)$和$N_l(-|q|)=N_l^-(q^2)$，$(l=0,\pm1,\cdots)$. 然后对于一个给定的$q^2$的容许值，如$q_m^2$，利用$N_l^+(q_m^2)(l=0,\ \pm1,\ \cdots)$中的一个，如$N_m^+(q_m^2)$，所有的$N_l^+(q_m^2)$就可由递推关系(24)确定了. 用这种方法就可以利用$N_m^\pm(q_m^2)(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$得出所有的振幅$N_l^\pm(q^2)$. $N_m^\pm(q_m^2)$这一组振幅可由(19)和(20)式确定，这两式为此目的在数目上刚好足够. [注意，在(5)，(12)，(15)等式中，符号$\sum\limits_m$意指对$N_{l,m}^+$项和$N_{l,m}^-$项两者求和].

这里将用微扰法求出(24)式的近似解. 把Δ看作一个很小的参量，仿照通常的微扰方法，把$\eta(=q^2)$和N_l展开为$(1/2)\Delta$的幂级数：

$$N_l(\eta)=N_l^{(0)}+\frac{1}{2}\Delta N_l^{(1)}+\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2N_l^{(2)}+\cdots, \tag{26a}$$

$$\eta=\eta^{(0)}+\frac{1}{2}\Delta\eta^{(1)}+\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2\eta^{(2)}+\cdots. \tag{26b}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

利用(26b)式，$f_l(\eta)$ 可写为

$$f_l(\eta)=f_l(\eta^{(0)})+\frac{1}{2}\Delta\eta^{(1)}f_l'(\eta^{(0)})+\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2[\eta^{(2)}f_l'(\eta^{(0)})+\frac{1}{2}(\eta^{(1)})^2f_l''(\eta^{(0)})]+\cdots, \tag{27}$$

式中 f 上的一撇表示对 η 的微商. (注意：对于 η 的每一个正实值，$f_l'(\eta)$, $f_l''(\eta)\cdots$ 都不为零). 把(26)和(27)式代入(24)式，则有 $(l=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\left\{f_l(\eta^{(0)})+\frac{1}{2}\Delta\eta^{(1)}f_l'(\eta^{(0)})+\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2\left[\eta^{(2)}f_l'(\eta^{(0)})+\frac{1}{2}(\eta^{(1)})^2f_l''(\eta^{(0)})\right]+\cdots\right\}$$
$$\times\left\{N_l^{(0)}+\frac{1}{2}\Delta N_l^{(1)}+\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2N_l^{(2)}+\cdots\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\Delta\left[N_{l-1}^{(0)}+\frac{1}{2}N_{l-1}^{(1)}+\cdots+N_{l+1}^{(0)}+\frac{1}{2}\Delta N_{l+1}^{(1)}+\cdots\right]=0. \tag{28}$$

首先使(28)式中那些与 Δ 无关的项为零，就得出零级近似:

$$f_l(\eta^{(0)})N_l^{(0)}=0, \quad (l=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{29}$$

(29)式具有与

$$f_l(\eta^{(0)})=0,\ N_l^{(0)}\neq 0 \ \text{或}\ N_l^{(0)}=0,\ f_l(\eta^{(0)})\neq 0 \tag{30}$$

相同的解. 用 $\eta_l^{(0)}$ 代表由 $f_l(\eta^{(0)})=0$ 给出的 $\eta^{(0)}$ 值，由(30)式得出

$$\eta_l^{(0)}=n^2\omega_l^2c^{-2}-p_l^2, \qquad N_l^{(0)}(\eta_l^{(0)})=N_{ll}\neq 0, \tag{31}$$

和

$$N_{l'}^{(0)}(\eta_l^{(0)})=N_{l'l}^{(0)}=N_{ll}\delta_{l'l}. \tag{32}$$

其次使(28)式中 Δ 的系数为零，得出

$$f_l(\eta_m^{(0)})N_l^{(1)}(\eta_m^{(0)})+\eta_m^{(1)}f_l'(\eta_m^{(0)})N_l^{(0)}(\eta_m^{(0)})=N_{l-1}^{(0)}(\eta_m^{(0)})+N_{l+1}^{(0)}(\eta_m^{(0)}). \tag{33}$$

在(33)式中依次令 $l=m, m+1, m-1, m+2, m-2,$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

…，并且利用(32)式，得出

$$\eta_m^{(1)}=0, \tag{34a}$$

$$N_{m\pm1,m}^{(1)}=\frac{N_{mm}}{f_{m\pm1}(\eta_m^{(0)})}, \tag{34b}$$

和

$$N_{m\pm j,m}^{(1)}=0\text{，当 } j\geqslant 2 \text{ 时.} \tag{34c}$$

同样，使(28)式中 Δ^2 的系数为零，就得出直至二级的对 $\eta_m^{(0)}$ 的校正和振幅 N_{lm} 的表达式如下[1]：

$$\eta_m^{(2)}=\frac{1}{f_m'(\eta_m^{(0)})}\left[\frac{1}{f_{m+1}(\eta_m^{(0)})}+\frac{1}{f_{m-1}(\eta_m^{(0)})}\right], \tag{35a}$$

$$N_{m\pm2,m}^{(2)}=\frac{N_{mm}}{f_{m\pm1}(\eta_m^{(0)})f_{m\pm2}(\eta_m^{(0)})}, \tag{35b}$$

和

$$N_{m\pm1,m}^{(2)}=0\text{，}N_{m\pm j,m}^{(2)}=0\text{，当 } j\geqslant 3 \text{ 时.} \tag{35c}$$

由上述计算可以看出，在零级微扰计算中只有 $N_{mm}(m=0,\pm1,\cdots)$ 各量不为零；在一级计算中 N_{mm} 和 $N_{m\pm1,m}$ 不为零，而在二级计算中 $N_{m\pm2,m}$ 也不为零。同样，继续作更高级的微扰计算，得出越来越多的不为零的非对角振幅（即两个附标不等的振幅）。这些计算是冗长的，这里不能给出；但可以假定，只要微扰方法有效，就可忽略更高级项.

一旦已知构成(24)式零级解的对角振幅，(34b)和(35b)式的非对角振幅就完全确定了．我们由(19)和(20)式确定上述对角振幅．然而，首先在 $\Delta=0$ 的简单情况下考察它们的解是有益的，因为这时很容易得出(18)—(20)式的精确解．在这种情况下，唯一可能的非零振幅是对角振幅 $N_{m,m}^{\pm}$ $(m=0,\pm1,\cdots)$．如果令(19)和(20)式中所有的非对角振幅等于零，则发现除 $N_{0,0}^{\pm}$ 外所有

1) 这里给出的公式仅当 $f_{m\pm1}(\eta_m^{(0)})$，$f_{m\pm2}(\eta_m^{(0)})$，…均不为零时才有效．如果不是这样，必须修改上述微扰方法以计及这种简并性．在直至二级的微扰计算中，当光以角 $\theta=0$ 和 $\theta=\sin^{-1}(\lambda/2\Lambda)$ 入射时，简并性开始起作用．然而这里将不探究此问题，但将在 §12.2.5 中给出这两种情况的结果．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的振幅 $N^{\pm}_{m,m}$ 均等于零，$N^{\pm}_{0,0}$ 由下式给出[1]:

$$N^{+}_{0,0}=(2B/\sigma_{0,0})\cos\theta[(n^2-\sin^2\theta)^{1/2}-\cos\theta]\times(1+\rho^2-2\rho\cos 2q_0d)^{-1/2}e^{i\psi},$$

$$N^{-}_{0,0}=N^{+}_{0,0}(g_{0,0}/h_{0,0})e^{2iq_0d},$$

式中

$$\rho=\left|\frac{N^{-}_{0,0}}{N^{+}_{0,0}}\right|^2,\quad \psi=\tan^{-1}\left[\frac{\rho\sin 2q_0d}{1-\rho\cos 2q_0d}\right].\tag{36}$$

对于正入射 ($\theta=0$)，由(11)，(31)和(36)式给出

$$\rho_0=\left|\frac{N^{-}_{0,0}}{N^{+}_{0,0}}\right|^2_{\theta=0}=\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.\tag{37}$$

利用(36)，(27)和(23)式，很容易得出正入射在一平面平行板上时反射率的表达式:

$$\left|\frac{B_0^{(r)}}{B}\right|^2=\frac{4\rho_0\sin^2 q_0d}{1+\rho_0^2-2\rho_0\cos 2q_0d},$$

与 § 7.6(9) 式一致，因 $\theta=0$ 时，$q_0=nk$.

当 Δ 不为零，但对于所用的微扰法而言仍足够小时，由上述 $\Delta=0$ 时的解推知，

$$|N_{0,0}|\gg|N_{\pm1,\pm1}|\gg|N_{\pm2,\pm2}|\cdots.$$

因此，可用逐次逼近法解(19)和(20)式得出对角振幅. 而且，因为对于正入射或接近正入射（在超声衍射实验中，θ 至多约为 3°），一个给定的 N^- 与相应的 N^+ 的比值很小(参看(37)式)，所以可一概略去 N^-，而单独由(19)式确定 N^+ [2]. 回想起在应用边界条件 § 12.1(15) 式时也暗含同样的近似.

现在把 (34b)，(34c)，(35b) 和 (35c) 式用于 (19) 式中，可得出对角振幅 $N^{+}_{0,0}$，$N^{+}_{\pm1,\pm1}$ 和 $N^{+}_{\pm2,\pm2}$ 的表达式. 进而借助于(22)式，可以很容易地写出透射光谱中第一序和第二序谱线强度的表达式. 这些表达式在下一节中给出.

---

1) Bhatia 和 Noble (上述引文中) 给出的 $N^{+}_{0,0}$ 和 $N^{-}_{0,0}$ 表达式中有某些印刷错误，这里已改正.

2) 关于这些问题的详细讨论，见 Bhatia 和 Noble (上述引文). 特别是，其中指出 N^- 对反射光谱振幅 $B_l^{(r)}$ 的影响一般不可忽略.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§12.2.5 某些特殊情况下第一序和第二序谱线强度的表达式

(a) $\delta/\xi \ll 1$ 并且 ξ 比 1 大得多

这是在上一节中详细讨论过的情况．第一序和第二序谱线强度 $I_{\pm1}$ 和 $I_{\pm2}$ 分别为

$$I_{\pm1} = |B_{\pm1}|^2 = \frac{1}{4} B^2\gamma^2\delta^2 \frac{\sin^2\left[\beta d\left(\xi \pm \frac{1}{2}\right)\right]}{\left(\xi \pm \frac{1}{2}\right)^2}, \tag{38a}$$

和

$$I_{\pm2} = |B_{\pm2}|^2 = \frac{1}{64} B^2\gamma^4\delta^4 \left\{\frac{1}{2(\xi\pm1)\left(\xi\pm\frac{1}{2}\right)\left(\xi\pm\frac{3}{2}\right)}\right\}$$

$$\times\left[\frac{\sin^2\left[\beta d\left(\xi\pm\frac{1}{2}\right)\right]}{\left(\xi\pm\frac{1}{2}\right)} + \frac{\sin^2\left[\beta d\left(\xi\pm\frac{3}{2}\right)\right]}{\left(\xi\pm\frac{3}{2}\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin^2[2\beta d(\xi\pm1)]}{2(\xi\pm1)}\right]. \tag{38b}$$

这些方程应理解为或全用上面的正号，或全用下面的负号．

对于巴蒂亚和诺布耳（上述引文中）考虑过的其他两种情况，我们引用其强度表达式，而不证明．

(b) $\xi \sim \frac{1}{2}$, $\delta \ll 1$

$$I_0 = \frac{1}{4}\frac{B^2\delta^2\gamma^2}{\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2}$$

$$\times\left[\frac{\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2} + \cos^2\left[\beta d\left\{\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2\right\}^{1/2}\right]\right], \tag{39a}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$I_{-1}=\frac{1}{4}\frac{B^2\delta^2\gamma^2}{\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2}$$

$$\times\sin^2\left[\beta d\left\{\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2\right\}^{1/2}\right]. \qquad (39b)$$

I_1 和 I_{-2} 的表达式更为复杂．然而，对于 $\xi=\frac{1}{2}$，它们有简单形式：

$$I_1=\frac{1}{16}B^2\delta^2\gamma^2\left[-\sin^2\left(\frac{\pi d\Delta\gamma}{2\lambda n}\right)\right.$$

$$\left.+2\sum_{+,-}\sin^2\left\{\beta d\left(1\pm\frac{1}{4}\delta\gamma\right)\right\}\right], \qquad (39c)$$

和

$$I_{-2}=\frac{1}{16}B^2\delta^2\gamma^2\sin^2\left(\frac{\pi d\Delta\gamma}{2\lambda n}\right). \qquad (39d)$$

(c)　正入射（$\xi=0$），$\delta\ll 1$

$$I_1=I_{-1}=B^2\delta^2\gamma^2\sin^2\left[\frac{1}{2}\beta d\left(1+\frac{1}{8}\delta^2\gamma^2\right)\right], \qquad (40a)$$

$$I_2=I_{-2}=\frac{1}{48}B^2\delta^4\gamma^4\left[-\frac{1}{4}\sin^2 2\beta d\right.$$

$$+\sin^2\left\{\frac{1}{2}\beta d\left(1+\frac{1}{8}\delta^2\gamma^2\right)\right\}$$

$$\left.+\frac{1}{3}\sin^2\left\{\frac{3}{2}\beta d\left(1-\frac{1}{24}\delta^2\gamma^2\right)\right\}\right]. \qquad (40b)$$

如果略去(40)式正弦函数的自变量中出现的量 $\delta^2\gamma^2$，则所得出的表达式也可由(38)式令其中 $\xi=0$ 而得出．

如前所述，布里渊[1]，戴维[2] 和赖托夫（Rytov）[3] 用 § 12.1 中介

---

1) L. Brillouin *La Diffraction de la Lumière par des Ultrasons* (Paris, Hermann, 1933).
2) E. David, *Phys. Z.*, **38** (1937), 587.
3) S. Rytov, *Diffraction de la Lumiere par les Ultra-sons* (Paris, Hermann, 1938).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

绍的方法导出了第一序和第二序谱线强度的表达式(38). 阿加瓦[1]曾由喇曼和纳斯微分方程§12.1(21)导出了(38)式. 法里斋(Phariseau)[2]曾证明,当$\xi \sim \frac{1}{2}$时,第一序和第二序谱线强度的表达式(39)也能由(21)式导出[3]. 当然理应如此,因为基于麦克斯韦微分方程的方法与本节的积分方程法是等价的.

§12.2.6 某些定性的结果

根据上一节中给出的强度表达式,显然,对于满足(a) $\delta \ll 1$ 或 (b) $\delta/\xi \ll 1$ 的 δ 和 ξ 值,只有前几个低序会出现于透射束两侧,并且它们的强度随着序的增高而迅速减弱. 然而,当(a)或(b)都不满足时,即 δ 和 δ/ξ 都比 1 大得多时,一般会出现很多序. 在这种情况下,(18)—(20)式的求解,以及各序强度的计算都更加困难了. 通过考察§12.2.4微扰法有效性的条件,可以看出[4],在解(18)—(20)式时,可以认为只有两个附标 l 和 m 均在数目 M_1 和 M_2 之间的那些振幅 N_{lm} 不为零,M_1 和 M_2 近似定义为($0 \leqslant \xi < \delta^{2/3}$)

$$\left.\begin{aligned} M_1 &\sim \xi + \delta^{2/3} + 1 \\ M_2 &\sim -\xi + \delta^{2/3} + 1 \end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

因为,一般地说,Δ不能增加到超过 10^{-4} 太多,并且,能观察到衍射现象的 λ/Λ 最大值受到分辨本领实际极限所限制,等等,所以 $\delta(=\Delta\Lambda^2/\lambda^2)$ 的可能极大值约为 100. 因此,即使在极端的实验条件下,也只需从无限集(18),(19),(20)的每一个中解至多约 20 个线性联立方程. 但即使作了这一简化,计算仍然是冗长的,还不曾完成过.

---

1) R. R. Aggarwal, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **31** (1950), 417.
2) P. Phariseau, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **44** (1956), 165.
3) 与本节给出的各个强度表达式有关的实验结果的讨论,可在 Bhatia 和 Noble 的论文中找到,(上述引文).
4) Bhatia and Noble (上述引文).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 25　光被超声波衍射：对于不同的入射角 θ 值，观察到的序数和(括弧内的)理论预期值 ($\lambda/\Lambda = 3\times10^{-3}$, $\Delta \sim 10^{-4}$)

θ	0	0°06′	0°22′	0°39′	1°01′	1°23′	1°45′	2°07′
ξ	0	0.6	2	4	6	8	10	13
M_1	5(5)	5(6)	6(7)	6(9)	3	2	1	1
M_2	5(5)	5(4)	3(3)	2(2)	2	1	1	1

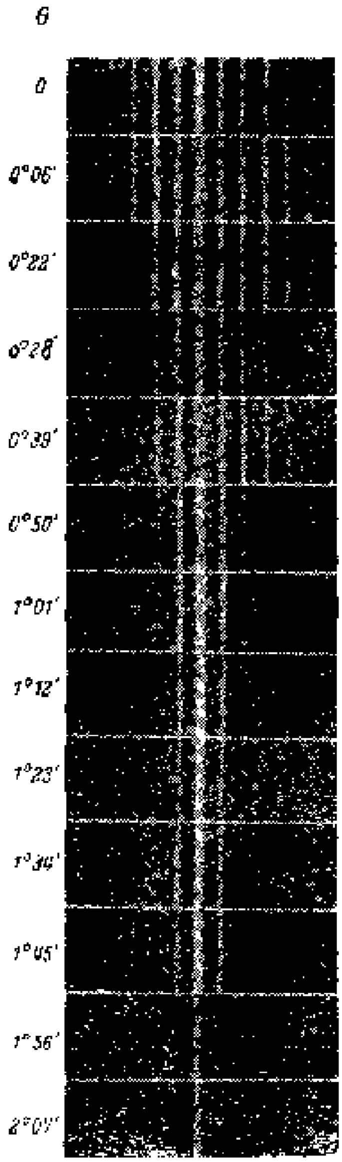


图 12.3　光被超声波衍射：用不同的入射角 θ 观察到的谱 ($\lambda/\Lambda = 3\times10^{-3}$, $\Delta \sim 10^{-4}$) [引自 S. Parthasarathy, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, *A*,**3** (1936), 442.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

定性地说，数目 M_1 和 M_2 也代表可能出现在直接透射束两侧的序数。根据(41)式，随着 $\xi=(\Lambda\sin\theta)/\lambda$ 从零增大，出现在直接透射束两侧的序数将变得不同了，从超声波波阵面反射的光能够到达的那一侧出现更多的谱线。帕塔萨拉西 (Parthasarathy)[1] 已从实验上研究过衍射光谱随入射角 θ 的变化，我们在图 12.3 复制了他的论文中的一张照片。在这个实验中，$(\lambda/\Lambda)=3\times10^{-3}$；取 $\Delta\sim10^{-4}$，对于正入射，由(41)式得出 $M_1=M_2=5$。表 25 给出了对于不同的入射角，实际观察到出现在直接透射束两侧的谱线数。括号内是由(41)式给出的相应的理论值(当然，一旦 δ/ξ 变得远小于 1，直接透射束两侧就只出现一或二序)。

能本 (Nomoto)[2] 也得到过类似的实验结果。他的 M_1 和 M_2 对 θ 的曲线，虽然与(41)式定性地相符，但在 $0\leqslant\xi<\delta^{2/3}$ 的范围内还出现随 ξ 的轻微的周期性变化。要解释这后一特性，(41)式所依据的考虑太粗糙了。

§ 12.2.7 喇曼-纳斯近似

最后将证明，喇曼和纳斯得出的强度的贝塞耳函数表达式也可以由(18)至(20)式的解导出。忽略频率 ω_l 随 l 的微小变化，并记住 $q_m^2\simeq(n^2\omega_m^2c^{-2}-p_m^2)$，作为良好的近似，可在(25)式的分母中取 $p_l^2+q^2+2\omega_l^2c^{-2}\simeq k^2(n^2+2)$。因此(24)式可写成下述形式：

$$\frac{q^2-n^2k^2+k^2\sin^2\theta}{\frac{1}{2}\Delta\gamma k^2}N_l(q)-N_{l+1}(q)-N_{l-1}(q)$$

$$=-\frac{l^2+2l\xi}{2\gamma\delta}N_l(q),\quad(l=0,\pm1,\pm2,\cdots)\qquad(42)$$

这时，喇曼和纳斯在他们的 § 12.1(21)式中略去 $[(l^2+2l\xi/\delta]\times U_l$ 项，得出了强度的贝塞耳函数表达式。作为同样的近似，我

---

1) S. Parthasarathy, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **3** (1936), 442.
2) O. Nomoto, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, **24** (1942), 380, 613.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

们也可略去(42)式右边的项. 于是,(42)式可写为

$$\frac{q^2-b^2}{\mu^2}N_l(q)=N_{l+1}(q)+N_{l-1}(q),\quad (l=0,\ \pm 1,\ \cdots),\tag{43}$$

式中

$$b^2=k^2(n^2-\sin^2\theta)\ \text{和}\ \mu^2=\frac{1}{2}\Delta\gamma k^2. \tag{44}$$

为了解(43)式[1],设 $N_l(q)$ 为下述形式:

$$N_l(q)=Ne^{2\pi ilm/M}, \tag{45}$$

式中 M 是某一很大的整数, m 是另一整数,满足 $0\leqslant m<M$. (即将看到,最后的结果与 M 无关). 将(45)式代入(43)式,对于 q^2 的容许值,有

$$q_m^2=b^2+2\mu^2\cos(2\pi m/M),\quad 0\leqslant m<M, \tag{46}$$

或者记住 $\mu^2\ll b^2$,

$$\pm|q_m|=\pm[b+(\mu^2/b)\cos(2\pi m/M)]. \tag{47}$$

因此,对于每一个 m,有两个 q 值,即 $\pm|q_m|$; 相应的振幅由下式给出:

$$N_l(\pm q_m)=N_{lm}^{\pm}=N^{\pm}e^{2\pi ilm/M}. \tag{48}$$

现在(48)式中的两个常数 N^+ 和 N^- 应由(19)和(20)式确定. 如同 § 12.2.4, 我们将略去振幅 N_{lm}^-, 并单独由(19)式确定常数 N^+. 注意到对于不太大的 l 值, $[\sigma_l(q)/g_l(q)]\sim[\sigma_0(q_0^{(0)})/g_0(q_0^{(0)})]$,就可以证实,在(48)式中取

$$N^+=\frac{1}{M}2Bc^2\omega^{-2}[\omega^2c^{-2}-p_0^2]^{1/2}(g_{0,0}/\sigma_{0,0}), \tag{49}$$

恒满足(19)式. 把(48)和(49)式代入(22)式,并令 $(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)=(\omega^2c^{-2}-p_0^2)$, 则第 l 序衍射波的振幅 B_l 为

$$B_l\simeq\frac{B}{M}\sum_{m=0}^{M-1}e^{i[2\pi lm/M+(\mu^2d/b)\cos(2\pi m/M)]}. \tag{50}$$

这里已省略与 m 无关的位相因子. 因已假设 M 是一个很大的整

1) (43)式类似于用来确定线性的原子链的振动简正模的关系式 [参看 M. Born 和 Th. V. Kármán, *Phys., Z.*, **13** (1912), 297].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数,所以可以用一个积分替换(50)式中的级数. 令 $2\pi m/M = \phi'$, 和 $d\phi' = 2\pi/M$, 可将(50)式写成

$$B_l \simeq \frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i[l\phi' + (\mu^2 d/b)\cos\phi']} d\phi', \tag{51}$$

它与 M 无关. 把(51)式中的积分分成两部分,(i)从 0 到 $(3/2)\pi$, 及(ii)从 $(3/2)\pi$ 到 2π,并在这两部分中分别令 $\phi' = \frac{1}{2}\pi - \phi$ 和 $\phi' = \frac{5}{2}\pi - \phi$, 就得出[1)]

$$B_l \simeq \frac{B}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\frac{1}{2}l\pi - l\phi + (\mu^2 d/b)\sin\phi]} d\phi = Be^{\frac{1}{2}il\pi} J_l(\mu^2 d/b). \tag{52}$$

因此,强度 $I_l = |B_l|^2$ 正好是 $B^2 J_l^2(\mu^2 d/b)$. 而且,借助于(44)式, § 12.1(5) 和 § 12.1(8) 式, 可以看出, 贝塞耳函数 J_l 的自变量 $(\mu^2 d/b)$ 与 795 页中给出的喇曼和纳斯的表达式中出现的自变量相同.

1) H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1946), p. 547.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第十三章　金属光学

前面一直讨论光在非导电的各向同性媒质中的传播．现在转而研究导电媒质尤其是金属的光学．一块普通金属是由无规取向的小晶体组成的晶态集合体．有一定大小的单晶是罕见的，但可以由人工制备出来；它们的光学性质将在第十四章中研究．无规取向的微晶混合物的性能显然与各向同性物质一样，又因光在导电的各向同性媒质中传播的理论比在晶体中简单得多，所以我们将在这里对它作较详细的讨论．

根据§1.1，电导率与焦耳热的出现有关．这是一种不可逆现象，其中电磁能被消耗掉了，或者更确切地说，它已转化为热，结果导体中的电磁波就衰减了．在金属中，由于电导率很高，这种效应如此之大，以致金属几乎是不透明的．尽管这样，金属在光学中仍起着重要的作用．强吸收伴随有高反射率，因此金属表面可作为很好的反射镜．由于光在金属中有部分透入，即使透入深度很小，但仍有可能根据反射光的观测获得关于吸收常数及吸收机制的信息．

我们将首先考虑由于存在电导率而引起的纯形式结果，然后在经典电子论的基础上扼要讨论这个过程的一个简单而有些理想化的物理模型．这个模型只能粗略地解释一些已观测到的效应；更精确的模型只能利用量子力学来得出，这就超出本书的范围了．形式理论将通过对两个有实际意义问题的应用加以阐述，即包含一个吸收层元的分层媒质光学以及光被金属球所衍射．

这个理论有一个特别吸引人的数学特性，那就是只要引入一个复介电常数（或复折射率）来代替实介电常数（或实折射率），就可以计及电导率的存在．在金属中，虚部占有优势．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 13.1 波在导体中的传播

考虑介电常数为 ε，磁导率为 μ，电导率为 σ 的一种均匀各向同性媒质．利用物质方程 § 1.1(9) 至 (11) 式，即 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，则麦克斯韦方程的形式为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}-\frac{\varepsilon}{c}\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}+\frac{\mu}{c}\dot{\boldsymbol{H}}=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0. \tag{4}$$

容易看出，对于从外部入射到导体上的电磁扰动，可用 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$ 代替(3)式．如果对(1)式求散度并利用(3)式，就得出

$$-\frac{\varepsilon}{c}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

把(3)式再对时间求微商，给出

$$\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\dot{\rho}.$$

在最后两个方程中消去 $\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{E}}$，得出

$$\dot{\rho}+\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho=0, \tag{5}$$

积分得出

$$\rho=\rho_0 e^{-t/\tau}，式中\ \tau=\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \tag{6}$$

由此可见，任何电荷密度 ρ 都随时间按指数衰减．对于任何具有可觉察电导率的媒质，弛豫时间 τ 非常小．对于金属，这个时间(典型的数量级是 10^{-18} 秒)比波的振动周期要短很多．所以可假定金属中的 ρ 实际上总为零．因此(3)式可写成

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0. \tag{7}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由(1)和(2)式消去 $\boldsymbol{H}$ 并利用(7)式得出，$\boldsymbol{E}$ 满足波方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\boldsymbol{E}}. \tag{8}$$

$\dot{\boldsymbol{E}}$ 项意味着波受到阻尼，即当它通过媒质传播时逐渐衰减.

如果场是严格单色的，角频率为 ω，即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 具有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 \times e^{-i\omega t}$ 这种形式，则有 $\partial/\partial t = -i\omega$，因此方程 (1) 和 (2) 可改写为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} + \frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E} = 0, \tag{9}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} - \frac{i\omega\mu}{c}\boldsymbol{H} = 0, \tag{10}$$

而(8)式变为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \hat{k}^2 \boldsymbol{E} = 0, \tag{11}$$

式中

$$\hat{k}^2 = \frac{\omega^2\mu}{c^2}\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right). \tag{12}$$

这些方程在形式上与非导电媒质的对应方程相同，只要在后者中把介电常数 ε 代换为

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{13}$$

(已证明，只要频率 ω 不接近共振，ε 在良好的近似程度上是实数——参看 § 2.3.4).

如果除了复波数 $\hat{k}$ 和复介电常数 $\hat{\varepsilon}$ 外，再引入复相速 $\hat{v}$ 和复折射率 $\hat{n}$，则变得与非导电媒质更加相似了，与 § 1.2(8)，§ 1.2(12) 及 § 1.3(21) 式类似，$\hat{v}$ 和 $\hat{n}$ 定义为

$$\hat{v} = \frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}}}, \qquad \hat{n} = \frac{c}{\hat{v}} = \sqrt{\mu\hat{\varepsilon}} = \frac{c}{\omega}\hat{k}. \tag{14}$$

令

$$\hat{n} = n(1 + i\kappa), \tag{15}$$

式中 n 和 κ 是实数，κ 称为**衰减指数**[1]. n 和 κ 这两个量不难用物

1) 也用“消光系数”这一名称.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

质常数 ε, μ 和 σ 来表示. 把(15)式平方,则有

$$\hat{n}^2 = n^2(1 + 2i\kappa - \kappa^2). \tag{15a}$$

又由(14)和(13)式得出

$$\hat{n}^2 = \mu\hat{\varepsilon} = \mu\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right). \tag{16}$$

现在 σ 正如 ε 那样,不真是媒质的常数了,它还依赖于频率. 以后将看到(§ 13.3),对于足够低的频率(足够长的波长),σ 在良好的近似程度上是实数. 假定 ε 也是实数,在这种情况下,使(15a)和(16)式中的实部及虚部分别相等,就得到下列关系式:

$$n^2(1 - \kappa^2) = \mu\varepsilon, \tag{16a}$$

$$n^2\kappa = \frac{2\pi\mu\sigma}{\omega} = \frac{\mu\sigma}{\nu}. \tag{16b}$$

由这些方程得出

$$n^2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu^2\varepsilon^2 + \frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}} + \mu\varepsilon\right\}, \tag{17a}$$

$$n^2\kappa^2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu^2\varepsilon^2 + \frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}} - \mu\varepsilon\right\}. \tag{17b}$$

这里平方根取正号,因为 n 和 $n\kappa$ 是实数,从而 n^2 和 $n^2\kappa^2$ 必定是正数.

方程(11)在形式上与非导电媒质的波方程相同,但现在波数是复数. 最简单的解是对时间谐和的平面波的解

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i[\hat{k}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}) - \omega t]}. \tag{18}$$

根据(14)和(15)式,用关系式 $\hat{k} = \omega\hat{n}/c = \omega n(1 + i\kappa)/c$ 代替 $\hat{k}$,则(18)式变为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c}n\kappa(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})} e^{i\omega\left[\frac{n}{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}) - t\right]}.$$

上式的实部就是

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c}n\kappa(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})} \cos\left\{\omega\left[\frac{n}{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}) - t\right]\right\}, \tag{19}$$

它表示电矢量,这是波长 $\lambda = 2\pi c/\omega n$ 并按给定的指数项衰减的平面波. 因为波的能量密度 w 与 $\boldsymbol{E}^2$ 的时间平均值成正比,由此得

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

出 w 按下述关系式减少:

$$w = w_0 e^{-\chi(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})}, \tag{20}$$

式中

$$\chi = \frac{2\omega}{c} n\kappa = \frac{4\pi\nu}{c} n\kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0} n\kappa = \frac{4\pi}{\lambda}\kappa, \tag{21}$$

λ_0 是真空中的波长，λ 是媒质中的波长. 常数 χ 称为吸收系数.

波向前传播了距离 d 以后，能量密度就减少到它原来数值的 $1/e$，此处

$$d = \frac{1}{\chi} = \frac{\lambda_0}{4\pi n\kappa} = \frac{\lambda}{4\pi\kappa}. \tag{22}$$

这段距离通常与波长之比是很小的(见表 26)[1].

回到方程组(17)，我们看到，当 $\sigma = 0$ 时，第一式正好化为麦克斯韦关系式 § 1.2(14)，$n^2 = \mu\varepsilon$，而第二式给出 $\kappa = 0$. 对于金属，$\sigma \neq 0$，并且实际上是如此之大，以致在(17)式中 ε 与 $2\sigma/\nu$ 相比可以忽略. 为了获得有关的数量级概念，我们注意到，大多数金属在直至光谱红外区附近的频率范围内 ($\lambda \gtrsim 10^{-3}$ 厘米)，电导率约为 10^{17} 秒$^{-1}$. 因此，例如 $\lambda = 10^{-3}$ 厘米 ($\nu \sim 3 \times 10^{13}$ 秒$^{-1}$)，就有 $\sigma/\nu \sim 3000$. 金属的介电常数 ε 不能直接测量，但正如我们将看到的那样，它能从光学实验导出. 然而，由于金属中电极化的机制与电介质的没有根本的差别，因此可假定 ε 具有相同的数量级. 所以，只要波长不太短，就可以假定

$$\frac{\mu\sigma}{\nu} = n^2\kappa \gg \mu\varepsilon. \tag{23}$$

现在(17)和(22)式简化为

$$n \sim n\kappa = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\nu}}. \tag{24}$$

$$d \sim \frac{\lambda_0}{4\pi}\sqrt{\frac{\nu}{\mu\sigma}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{c\lambda_0}{\mu\sigma}} = \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\sigma\omega}}. \tag{25}$$

---

1) 这种透入深度仅占波长很小一部分的现象，在交流电的传导中为大家所熟知，并被工程师称为"趋肤效应".

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 26　三个熟悉的波谱区中的辐射对铜的"透入深度" d（按静电导率 $\sigma \sim 5.14 \times 10^{17}$ 秒$^{-1}$ 和 $\mu = 1$ 计算）

辐　射	红　外	微　波	长无线电波
λ_0	10^{-3} 厘米	10 厘米	1000 米 = 10^5 厘米
d	6.1×10^{-7} 厘米	6.1×10^{-5} 厘米	6.1×10^{-3} 厘米

理想导体的特征是电导率无穷大 ($\sigma \to \infty$)。因为根据 (16a) 和 (16b) 式得出，$\varepsilon/\sigma = (1 - \kappa^2)/\nu\kappa$，所以在这种极限情况下有 $\kappa^2 \to 1$，或由 (16a) 式，$n \to \infty$。这样的一种导体完全不允许电磁波透入到任何深度，它将反射全部入射光(参看下面 § 13.2)。

尽管透明物质的折射率可以不费力地从折射角测出，但对金属作这种测量是极端困难的，因为能使入射光有任何可觉察的部分透过的金属样品必定是非常薄的。尽管如此，孔特 (Kundt)[1] 还是成功地制造了金属棱镜，使直接测量复折射率的实部和虚部成为可能。但通常宁可用反射实验而不愿用折射实验来测定金属的光学常数，即宁可研究光从金属反射所经历的变化，而不愿去测量透过金属的光。

§ 13.2　金属表面的折射和反射

我们已经看到，对时间谐和的平面波在导电媒质中传播的基本方程与在透明电介质中传播的区别，仅在于实常数 ε 和 κ 被复常数 $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{\kappa}$ 代换了。由此得出，第一章中导出的公式，就它们只涉及平面单色波的场矢量各分量间的线性关系而言，也可应用于目前的情况。尤其是波通过不连续表面传播的边界条件，以及由此得出的 § 1.5 中关于折射和反射的公式，都仍然有效。

首先考虑平面波从电介质传播到导体内，假设这两种媒质范围无限，二者的接触面是 $z = 0$ 平面。与 § 1.5(8) 式类似，折射定律为

1) A. Kundt, *Ann. d. Physik*, **34** (1888), 469.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\sin\theta_t = \frac{1}{\hat{n}}\sin\theta_i. \tag{1}$$

由于 $\hat{n}$ 是复数，因此 θ_t 也是复数，所以这个量不再具有折射角的简单意义。

令入射面为 xz 平面。导体中波的位相与空间有关的部分由 $\hat{k}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(t)})$ 给出，其中(参看 § 1.5(4) 式)

$$S_x^{(t)} = \sin\theta_t; \quad S_y^{(t)} = 0, \quad S_z^{(t)} = \cos\theta_t. \tag{2}$$

由(1)和(2)式以及 § 13.1(15) 式得出

$$S_x^{(t)} = \sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{n(1+i\kappa)} = \frac{1-i\kappa}{n(1+\kappa^2)}\sin\theta_i, \tag{3a}$$

$$S_z^{(t)} = \cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t}$$
$$= \sqrt{1-\frac{(1-\kappa^2)}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i + i\frac{2\kappa}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i}. \tag{3b}$$

把 $S_z^{(t)}$ 表示为以下的形式是方便的，

$$S_z^{(t)} = \cos\theta_t = qe^{i\gamma} \tag{4}$$

(q 和 γ 是实数)。把(3b)和(4)式平方，并使其实部和虚部分别相等，立即得出用 n，κ 和 $\sin\theta_i$ 表示的 q 和 γ 的表达式。即

$$\left.\begin{aligned} q^2\cos 2\gamma &= 1-\frac{1-\kappa^2}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i, \\ q^2\sin 2\gamma &= \frac{2\kappa}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此得出

$$\begin{aligned}\hat{k}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^{(t)}) &= \frac{\omega}{c}n(1+i\kappa)(xs_x^{(t)}+zs_z^{(t)}) \\ &= \frac{\omega}{c}n(1+i\kappa)\left[\frac{x(1-i\kappa)}{n(1+\kappa^2)}\sin\theta_i \right.\\ &\qquad \left. + z(q\cos\gamma + iq\sin\gamma)\right] \\ &= \frac{\omega}{c}[x\sin\theta_i + znq(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma) \\ &\qquad + inzq(\kappa\cos\gamma + \sin\gamma)]. \end{aligned} \tag{6}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

鉴于等幅面由

$$z = 常数 \tag{7}$$

给出，因此也就是平行于界面的平面. 等实相面由

$$x \sin\theta_i + znq(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma) = 常数 \tag{8}$$

给出，它们是一些平面，其法线与界面法线成 θ_t' 角，此处

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_t' &= \frac{nq(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)}{\sqrt{\sin^2\theta_i + n^2q^2(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)^2}},\\ \sin\theta_t' &= \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\sin^2\theta_i + n^2q^2(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由于等幅面与等相面一般不互相重合，因此金属中的波是一种**不均匀波**.

如果用 n' 表示(9)式中的平方根，则 $\sin\theta_t'$ 的方程可写成 $\sin\theta_t' = \sin\theta_i/n'$ 的形式，即它具有斯涅耳定律的形式. 但现在 n' 不仅取决于那些表征媒质的量，而且还取决于入射角 θ_i.

在菲涅耳公式(§ 1.5.2)中用(1)式给出的复数值代替 θ_t，还可导出折射波和反射波的振幅和位相的表达式. 显式将在关于分层导电媒质理论的 § 13.4.1 中给出. 这里将考虑金属的光学常数怎样从反射波的观测结果推导出来.

因已假定第一种媒质是电介质，所以反射波是具有实位相因子的寻常(均匀)波. 同 § 1.5(21a)式一样，入射波的振幅分量 $A_{\parallel}$，$A_{\perp}$ 与反射波的对应分量 $R_{\parallel}$，$R_{\perp}$ 的关系为

$$\left.\begin{aligned}R_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}A_{\parallel},\\ R_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}A_{\perp}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

因为现在 θ_t 是复数，所以比值 $R_{\parallel}/A_{\parallel}$ 和 $R_{\perp}/A_{\perp}$ 也都是复数，即反射时发生特征位相变化；因而入射的线偏振光在金属表面反射后一般将变为椭圆偏振光. 令 $\phi_{\parallel}$ 和 $\phi_{\perp}$ 是上述的位相变化，$\rho_{\parallel}$ 和 $\rho_{\perp}$ 是反射系数的绝对值，即

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$r_{\parallel}=\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}}=\rho_{\parallel}e^{i\phi_{\parallel}},\quad r_{\perp}=\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}}=\rho_{\perp}e^{i\phi_{\perp}}. \tag{11}$$

设入射光在方位角 α_i 上线偏振，即

$$\tan\alpha_i=\frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}}, \tag{12}$$

并令 α_r 是反射光的方位角(一般是复数)．则[1]

$$\tan\alpha_r=\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}=-\frac{\cos(\theta_i-\theta_t)}{\cos(\theta_i+\theta_t)}\tan\alpha_i=Pe^{-i\Delta}\tan\alpha_i, \tag{13}$$

式中

$$P=\frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}},\qquad \Delta=\phi_{\parallel}-\phi_{\perp}. \tag{14}$$

注意到在下述两种情况下 α_r 是实数：

(1)对于正入射 $(\theta_i=0)$；则 $P=1$ 和 $\Delta=-\pi$，因此 $\tan\alpha_r=-\tan\alpha_i$.

(2)对于掠入射 $(\theta_i=\pi/2)$；则 $P=1$ 和 $\Delta=0$，因此 $\tan\alpha_r=\tan\alpha_i$.

应当记住在正入射情况下入射光线和反射光线方向相反；因而负号意味着线偏振光的方位角在空间的绝对方向是不变的．当掠入射时它的绝对方向也是不变的．

在刚考虑过的两种极端情况之间，存在一个角度 $\bar{\theta}_i$，称为主入射角，它使得 $\Delta=-\pi/2$．以这个角度入射，线偏振光一般被反射成椭圆偏振光，但正如 § 1.4(31b)式所示(取 $\delta=\pi/2$)，振动椭圆各轴与入射面平行或垂直．进一步令 $P\tan\alpha_i=1$，则根据(13)式，$\tan\alpha_r=-i$，反射光是圆偏振的．

假定对于线偏振的入射光，用一个适当的补偿器在 $R_{\parallel}$ 和 $R_{\perp}$ 之间引入附加相差△(参看 § 14.4.2)．则总相差为零，根据(13)式，反射光是在方位角 α_r' 上线偏振的，这里

$$\tan\alpha_r'=P\tan\alpha_i. \tag{15}$$

---

1) 我们在(13)式右边的指数中写 $-i\Delta$ 而不写 $+i\Delta$，以便于与 §1.5 的某些结果相比较．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

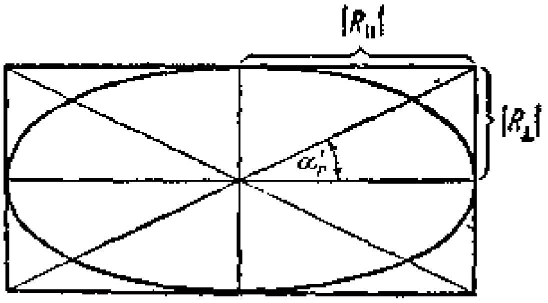


图 13.1　以主入射角从金属上反射的光的振动椭圆

由于明显的原因，角 α_r' 称为回复偏振角，不过它通常只是对于在方位角 $\alpha_i=45°$ 上线偏振的入射光有定义[1]. 与主入射角 $\theta_i=\bar{\theta}_i$ 有关的 α_r' 和 P 的值分别表示为 $\bar{\alpha}_r'$ 和 $\bar{P}$. 如果我们设想有一个外接于(未经补偿的)反射光振动椭圆的矩形，反射光来自以主入射角射入的光，矩形各边与入射面平行或垂直，则矩形两边的比值为 $\bar{P}\tan\alpha_i$，矩形对角线与入射面之间的夹角为 $\bar{\alpha}_r'$ (见图 13.1)

为了以后的计算，有必要引入角 ψ，使得

$$\tan\psi=P; \tag{16}$$

相应于主入射角的 ψ 值表示为 $\bar{\psi}$.

如果金属的常数 n 和 κ 是已知的，则利用(10)和(1)式就能根据 θ_i 计算两个量 $P(=\tan\psi)$ 和 Δ. 图 13.2(a)表示在一种典型情况下这两个量对 θ_i 的依赖关系. 为了便于比较，图 13.2(b) 中画出从透明电介质反射的类似曲线. 光以起偏振角从透明电介质反射时所发生的 Δ 值从 $-\pi$ 到 0 的突然间断，在光从金属表面反射时并不存在. $\tan\psi$ 变为无穷大的那一尖点同样不存在，曲线被一条具有比较宽的极大值的平滑曲线代替了. 出现这个极大值的入射角有时称为准起偏振角；它与主入射角 $\bar{\theta}_i$ 差不多相等. 通常假定这个极大值实际上就在 $\bar{\theta}_i$ 处，如果 $n^2(1+\kappa^2)\gg 1$，(通常就是这样，参看表 27)，则几乎确实如此. 但一般说来，这两个角是不同的；例如，银对于紫外波长 3280 埃，$n^2(1+\kappa^2)$ 这个量很小，

---

1) 于是，$\bar{\alpha}_r'$ 等于(16)式中引入的角 $\bar{\psi}$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

则有 $\theta_i=47.8^\circ$ 和 $\psi=31.8^\circ$，而 $\psi_{极大}=29.5^\circ$，并大约出现在 $\theta_i=40^\circ$ 处.

一般地说，问题不在于从已知的 n 和 κ 值求 ψ 和 Δ，而是根据实验观测结果从金属反射的光的振幅和相位来确定 n 和 κ.

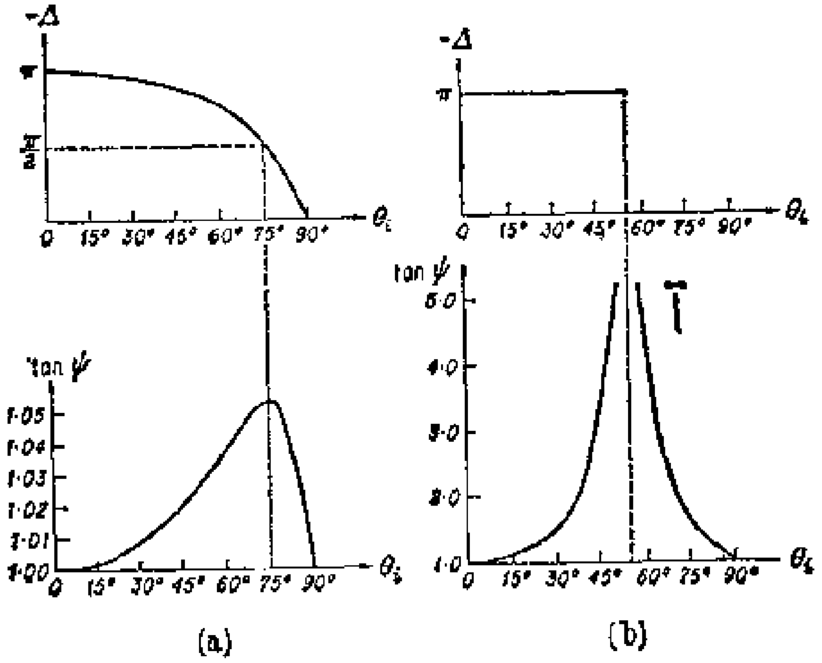


图 13.2 $-\Delta=\phi_\perp-\phi_\parallel$ 和 $P=\tan\psi=\rho_\perp/\rho_\parallel$，这两个量表示从一种典型金属 (a) 或一种透明电介质 (b) 反射的光的偏振状态的变化特征

由于 $R_\parallel$，$R_\perp$，$\phi_\parallel$，$\phi_\perp$，ψ 和 Δ 这些量都是 θ_i 的函数，从而是 n 和 κ 的函数，因此对于入射角 θ_i 某一特定值测出这些量中的任何两个量，一般就能求出 n 和 κ 的值了. 因为在很多实验中都是确定这些量中的最后两个量，所以我们将导出用 ψ 和 Δ 表示 n 和 κ 的基本表达式. 由(13)和(1)式得出，

$$\frac{1-Pe^{-i\Delta}}{1+Pe^{-i\Delta}}=-\frac{\cos\theta_i\cos\theta_t}{\sin\theta_i\sin\theta_t}=-\frac{\sqrt{\hat{n}^2-\sin^2\theta_i}}{\sin\theta_i\tan\theta_i}. \tag{17}$$

因 $P=\tan\psi$，所以(17)式左边可以表示为下述形式

$$\frac{1-Pe^{-i\Delta}}{1+Pe^{-i\Delta}}=\frac{1-e^{-i\Delta}\tan\psi}{1+e^{-i\Delta}\tan\psi}=\frac{\cos 2\psi+i\sin 2\psi\sin\Delta}{1+\sin 2\psi\cos\Delta}. \tag{18}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由(17)和(18)式得出，

$$\frac{\sqrt{\hat{n}^2-\sin^2\theta_i}}{\sin\theta_i\tan\theta_i}=-\frac{\cos 2\psi+i\sin 2\psi\sin\Delta}{1+\sin 2\psi\cos\Delta}. \qquad (19)$$

现在如果有

$$n^2(1+\kappa^2)\gg 1, \qquad (20)$$

通常在可见区就是这样，则 $\sin^2\theta_i$ 与 $\hat{n}^2$ 相比可以忽略，从而得出

$$\frac{\hat{n}}{\sin\theta_i\tan\theta_i}=\frac{n(1+i\kappa)}{\sin\theta_i\tan\theta_i}\sim-\frac{\cos 2\psi+i\sin 2\psi\sin\Delta}{1+\sin 2\psi\cos\Delta}. \qquad (21)$$

令两边实部相等，得出

$$n\sim-\frac{\sin\theta_i\tan\theta_i\cos 2\psi}{1+\sin 2\psi\cos\Delta}. \qquad (22a)$$

令两边虚部相等，并利用(22a)式，求出

$$\kappa\sim\tan 2\psi\sin\Delta. \qquad (22b)$$

根据对任一入射角测出的 ψ 和 Δ，就能利用这些表达式计算光学常数 n 和 κ 了。在主入射角 $\bar{\theta}_i$ 处观测的特定情况下，有 $\Delta=-\pi/2$，$\psi=\bar{\psi}$，而且(22a)和(22b)式简化为

$$n\sim-\sin\bar{\theta}_i\tan\bar{\theta}_i\cos 2\bar{\psi}, \qquad (23a)$$

$$\kappa\sim-\tan 2\bar{\psi}. \qquad (23b)$$

关于 n 和 κ 的其它公式有时也有用处。不用假设(20)式，把(19)式平方，则有

$$\frac{\hat{n}^2-\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_i\tan^2\theta_i}=\frac{\cos^2 2\psi-\sin^2 2\psi\sin^2\Delta+i\sin 4\psi\sin\Delta}{(1+\sin 2\psi\cos\Delta)^2}. \qquad (24)$$

如果把 $\hat{n}^2=n^2(1-\kappa^2)+2in^2\kappa$ 代入，并使实部和虚部分别相等，就得出

$$n^2(1-\kappa^2)=\sin^2\theta_i\left\{1+\frac{\tan^2\theta_i(\cos^2 2\psi-\sin^2 2\psi\sin^2\Delta)}{(1+\sin 2\psi\cos\Delta)^2}\right\}, \qquad (25a)$$

$$2n^2\kappa=\frac{\sin^2\theta_i\tan^2\theta_i\sin 4\psi\sin\Delta}{(1+\sin 2\psi\cos\Delta)^2}. \qquad (25b)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

特别是在主入射角处 ($\theta_i=\bar{\theta}_i$，$\Delta=-\pi/2$)，这些方程简化为[1]

$$n^2(1-\kappa^2)=\sin^2\bar{\theta}_i(1+\tan^2\bar{\theta}_i\cos 4\bar{\Phi}), \tag{26a}$$

$$2n^2\kappa=-\sin^2\bar{\theta}_i\tan^2\bar{\theta}_i\sin 4\bar{\Phi}. \tag{26b}$$

公式(25)不直接得出 n 和 κ，而是得出其组合 $n^2(1-\kappa^2)$ 和 $n^2\kappa$. 参看 § 13.1(16a) 和 (16b) 式就知道，这些量具有直接的物理意义. 取 $\mu=1$，(对于光学波长总是这样)，$n^2(1-\kappa^2)$ 就是介电常数，而 $n^2\kappa$ 就是电导率与频率的比值. 根据这些量的数值，特别是根据它们随频率的变化，就可以得出关于金属结构的信息(参看下面 § 13.3).

至此，我们的分析一直集中地围绕着反射光各分量的振幅，但正如我们即将看到的那样，比较反射光和入射光的强度，尤其是在长的波长处，还可以得出有用的信息. 如果考虑正入射 ($\theta_i=0$)，则 $R_\parallel$ 与 $R_\perp$ 之间的区别就消失了，因而入射面也就不确定了，我们可以写成

$$\mathscr{R}=\left|\frac{R_\parallel}{A_\parallel}\right|^2=\left|\frac{R_\perp}{A_\perp}\right|^2. \tag{27}$$

如果把(1)和(10)式代入(或者在 § 1.5(23)式中用 $\hat{n}$ 代替 n)，就得出

$$\mathscr{R}=\left|\frac{\hat{n}-1}{\hat{n}+1}\right|^2=\frac{n^2(1+\kappa^2)+1-2n}{n^2(1+\kappa^2)+1+2n}. \tag{28}$$

根据反射光的测量，已确定了很多金属的光学常数. 表 27 中给出了不同的观测者对可见光谱黄区一种波长求出的各常数值. 金属是按照它们的反射率 $\mathscr{R}$ 的次序排列的. 注意到在所有的情况下 $n<n\kappa$，因此根据 § 13.1(16a)式，$\mu\varepsilon$ 是负的，(因为对于光

---

1) 象(23)和(26)这类只涉及在主入射角处测量的方程，比起更一般的表达式(22)或(25)要简单些，只是由于这个原因，很多实验工作者都限于在这个角度处测量. 在其它入射角处，实验准确度可能更高些. 关于方便地选择入射角的讨论，可参看 P. Drude, *Ann. d. Physik*, **39** (1890), 504; J. R. Collins 和 R. O. Bock, *Rev. Sci. Instr.*, **14** (1943), 135; I. Simon, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41** (1951), 336; D. G. Avery, *Proc. Phys. Soc.*, **65** (1952), 425; R. W. Ditchburn, *J. Opt. Soc. Amer.*, **45** (1955), 743.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

学波长 $\mu\sim 1$)，结果 ε 也是负的。乍看起来似乎负的介电常数没有物理意义可言．以后将指出并不是这样，负的 ε 值可根据关于电子传导机制的某些简单假设来解释．从表上看来好象 $n<1$ 的值[1]与高反射率有联系，但一般说来并不是这样．

不能期望表 27 中列出的 n 与 $n\kappa$ 的值与根据近似公式 § 13.1(17)的计算值一致．这些公式是根据电导率 σ 为实数这一假设导出的，而在 § 13.3 中将指出，仅在低频时才在良好的近似程度上满足这个假设．在 § 13.3 中，根据一个初级的模型考察了 σ 对频率的依赖关系，通过这一节的讨论将搞清楚：对相应于表 27 所用的钠D线的高频（$\omega\sim 3.2\times 10^{15}$ 秒$^{-1}$)，σ 是复数，并且其虚部实际上明显大于其实部．由实验测定的金属光学常数对波长的依赖关系，确实显示出比我们的公式所预期的要复杂得多的性质(见图 13.3)．

根据哈根（Hagen）和鲁本斯（Rubens)[2] 及其后工作者的研究，利用我们大致讲过的初级理论并取 σ 近似为其静态值计算得出的多种金属反射率，与实验结果很符合，只要辐射波长 λ 不短于 10^{-3} 厘米左右．如果用 § 13.1(24)式代替 n 和 $n\kappa$，则(28)式变为（取 $\mu=1$）

$$\mathscr{R}=\frac{2\dfrac{\sigma}{\nu}+1-2\sqrt{\dfrac{\sigma}{\nu}}}{2\dfrac{\sigma}{\nu}+1+2\sqrt{\dfrac{\sigma}{\nu}}}. \tag{29}$$

当 ν/σ 足够小时，与其他项相比，可略去 1，并可把(29)式按 $\sqrt{\nu/\sigma}$ 的幂次展开．由此得出

$$\mathscr{R}\sim 1-2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}+\cdots \tag{30}$$

1) 当 $n<1$ 时，实相速 c/n 超过了真空中的光速，但按 § 13.3 节末的解释，这与相对论并不矛盾．

2) E. Hagen 和 H. Rubens, *Ann. d. Physik*, (4), 11 (1903), 873.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 27　金属的光学常数，对于波长 $\lambda = 5893$ 埃(钠 D 线)的光

[摘自 H. H. Landolt 和 R. Börnstein, *Phys. Chem. Tabellen*, (5 Aufl., Berlin, 1923; 1—3 Ergänzungsb, Berlin, 1927—1936)]

金　属	n	$n\kappa$	$\mathscr{R}$	观 测 者	
钠，固态	0.044	2.42	0.97	Duncan	1913
银，块状	0.20	3.44	0.94	Oppitz	1917
镁，块状	0.37	4.42	0.93	Drude	1890
钾，熔融的	0.081	1.81	0.92	Nathanson	1928
镉，块状	1.13	5.01	0.84	Drude	1890
铝、块状	1.44	5.23	0.83	Drude	1890
锡，块状	1.48	5.25	0.83	Drude	1890
金，电解的	0.47	2.83	0.82	Meier	1910
汞，液态	1.60	4.80	0.77	Lowery 和 Moore	1932
锌，块状	1.93	4.66	0.75	Meier	1910
铜，块状	0.62	2.57	0.73	Oppitz	1917
镓，单晶	3.69	5.43	0.71	Lange	1935
锑，块状	3.04	4.94	0.70	Drude	1890
钴，块状	2.12	4.04	0.68	Minor	1904
镍，电解的	1.58	3.42	0.66	Meier	1910
锰，块状	2.41	3.88	0.64	Littleton	1911
铅，块状	2.01	3.48	0.62	Drude	1890
铂，电解的	2.63	3.54	0.59	Meier	1910
铼，块状	3.00	3.44	0.57	Lange	1935
钨，块状	3.46	3.25	0.54	Littleton	1912
铋，块状	1.78	2.80	0.54	Meier	1910
铁，蒸发的	1.51	1.63	0.33	Meier	1910

哈根和鲁本斯得出，波长 $\lambda = 1.2 \times 10^{-3}$ 厘米时，铜的 $1 - \mathscr{R} = 1.6 \times 10^{-2}$，而用电导率静态值代替 σ，由(30)式得出 $1 - \mathscr{R} = 1.4 \times 10^{-2}$。

当波长进一步增大时，$\mathscr{R}$ 变得如此接近于 1，使得难于以任何准确度测量 $1 - \mathscr{R}$。但哈根和鲁本斯利用一种间接的方法得出了有用的估计值。根据热辐射的基尔霍夫定律[1]，一个物体的发

1) 例如参看 M. Planck, *Theory of Heat* [London, Macmillan, 1932), p. 189; 或 A. Sommerfeld, *Thermodynamics, and Statistical Mechanics*, edited by Bopp and J. Meixner (New York, Academic Press, 1956), p. 136.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

射本领 E_ν 与吸收本领 A_ν 的比值[1]只取决于频率 ν 和物体的温度 T，而与物体的性质无关，即

$$\frac{E_\nu}{A_\nu}=K(\nu,\ T), \tag{31}$$

式中 $K(\nu, T)$ 是 ν 和 T 的普适函数．显然，K 等于吸收本领为 1 的物体(所谓黑体)的发射本领．现在假定辐射落在这样厚的金属样品上，使得所有不被反射的入射能量都在它的内部被吸收掉．则

$$A_\nu=1-\mathscr{R}, \tag{32}$$

由(30)，(31)和(32)式得出

$$A_\nu=\frac{E_\nu}{K(\nu,\ T)}=2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}, \tag{33}$$

或

$$\sqrt{\sigma}\,E_\nu=2\sqrt{\nu}\,K(\nu,\ T). \tag{34}$$

这个方程的右边与金属的性质无关．它是众所周知的 ν 和 T 的函数，函数 $K(\nu, T)$ 从实验和理论两方面都精确地知道了，并且用普朗克的著名公式[2]来表示．

由此得出，通过确定电导率 σ 及作为频率和温度函数的发射本领 E_ν，并检查乘积 $\sqrt{\sigma}\,E_\nu$ 是否满足(34)式，即使 $\mathscr{R}$ 非常接近于 1 时，仍能检验公式(30)有效．哈根和鲁本斯为此目的利用所谓剩余射线证实了对于长的红外波长确是如此．剩余射线就是从某些晶体(例如萤石，岩盐或钾盐)上重复反射以后从一个较宽的光谱范围内剩留下来的射线．上述物质在 $\lambda=22.9$ 微米到 63 微米的光谱区内有明显的吸收极大值，因此[参看(28)式]，对于这些波长有高选择性反射率．

图 13.3 中给出了银的曲线，说明由实验测定的 n 和 $n\kappa$ 对波长

---

1) 发射本领是指物体在单位时间内发射的辐射能量，吸收本领是指落在物体上的辐射能量被物体吸收的分数．

2) 例如参看 M. Born, *Atomic Physics* (London and Glasgow, Blackie and Son, 5th ed., 1951), p. 238.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的依赖关系. 为了作比较,还画出了由§13.1(24)式算出的理论曲线. 标度是对数的,因此理论曲线是直线

$$\log n \sim \log n\kappa \sim \frac{1}{2}\log\lambda + C,$$

式中, $C = \log\sqrt{\mu\sigma/c}$. 根据§13.1(24)式和本节(30)式,还可以用反射率来表示 n 和 $n\kappa$ (对于长波):

$$n \sim n\kappa \sim \frac{2}{1-\mathscr{R}}. \tag{35}$$

为了作比较,图中还画出了函数 $2/(1-\mathscr{R})$. 我们看到, $n\kappa$ 的实验曲线在 $\lambda = 3000$ 埃附近有一个尖锐的极小值,而 n 的曲线在 $\lambda = 5000$ 埃附近有一个平展得多的极小值. 在 $\lambda = 3300$ 埃附

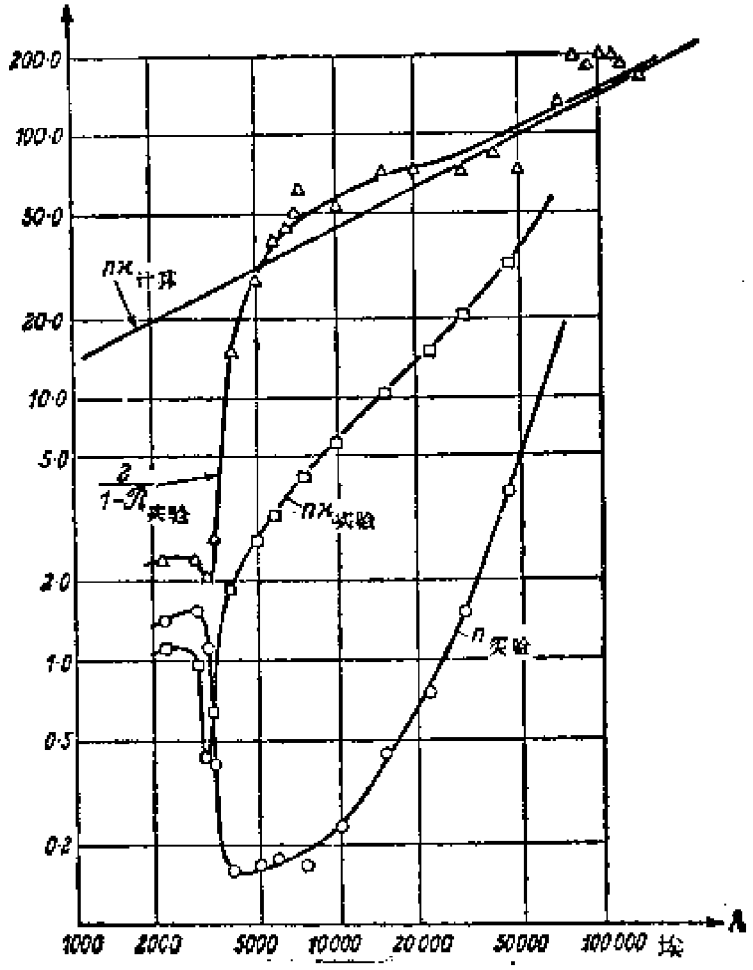


图 13.3 银的光学常数作为波长的函数. 下标"实验"指的是由实验得到的数据. 标度是对数的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

况。如果 $\boldsymbol{E}=0$，则有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\beta\dot{\boldsymbol{r}}=0, \tag{2}$$

其解为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0-\frac{1}{\beta}\boldsymbol{v}_0e^{-\beta t},\quad \dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0e^{-\beta t}; \tag{3}$$

可见在这种情况下，有初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的模型电子按指数方式变慢，β 为其衰变常数。时间 $\tau=1/\beta$ 称为衰变时间或弛豫时间。它的典型数量级是 10^{-14} 秒。

现在假定有一个时间谐场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}$。则(1)式的解是两项之和，一项表示衰变运动[齐次方程(2)的解]，另一项表示周期运动

$$\boldsymbol{r}=-\frac{e}{m(\omega^2+i\beta\omega)}\boldsymbol{E}. \tag{4}$$

这种周期运动在媒质中产生电流。如果每单位体积有N个自由电子，则电流密度 $\boldsymbol{j}$ 由下式给出，

$$\boldsymbol{j}=Ne\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{Ne^2}{m(\beta-i\omega)}\boldsymbol{E}. \tag{5}$$

比较(5)式与结构关系式 § 1.1(9)，即 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$，可看出

$$\sigma=\frac{Ne^2}{m(\beta-i\omega)}. \tag{6}$$

如前所述，τ 的典型数量级是 10^{-14} 秒，因此 β 的数量级是 10^{14} 秒$^{-1}$。于是由(6)式清楚得出，当 $\omega\ll\beta$ 时，σ 可用其静态值 $\sigma_0=Ne^2/m\beta$ (当然是实数)作近似。另一方面，当 $\omega\gg\beta$ 时(在光频区情况通常是这样)，σ 的虚部将变得比它的实部大。因此，显然仅当频率 $\omega\ll\beta$ 时，才能认为按照导出公式 § 13.1(16) 与 § 13.1(17) 的办法来区分复介电常数的实部与虚部是合理的。

根据 § 13.1(16) 式，复介电常数 $\hat{\varepsilon}$ 与复折射率 $\hat{n}$ 对频率的依赖关系，不仅是由于电导率 σ (自由电子的贡献)依赖于频率引起的，而且是由于实介电常数 ε (束缚电子的贡献)依赖于频率引起的。对足够低的频率，可以证明，束缚电子的贡献比自由电子的贡

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

献要小得多．既然如此，就可以在§13.1(16)式中用1代替 ε，用(6)式代替 σ． 如果假定导体是非磁性的（$\mu=1$)，则可得出 $\hat{\varepsilon}$ 的下列表达式：

$$\hat{\varepsilon}=\hat{n}^2=1-\frac{4\pi Ne^2}{m}\frac{1}{\omega(\omega+i\beta)}. \tag{7}$$

把(7)式中实部与虚部分开，并应用§13.1(15a)式，即 $\hat{n}^2=n^2(1+2i\kappa-\kappa^2)$，得出公式

$$\mathrm{Re}\hat{\varepsilon}=n^2(1-\kappa^2)=1-\frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2+\beta^2)}, \tag{8a}$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{Im}\hat{\varepsilon})=n^2\kappa=\frac{2\pi Ne^2\beta}{m\omega(\omega^2+\beta^2)}. \tag{8b}$$

由(8a)不难导出，如果 β 足够小，则频率足够低时 $\hat{\varepsilon}$ 的实部是负的，但 ω 很大时 $\hat{\varepsilon}$ 的实部显然是正的． $\hat{\varepsilon}$ 的实部变号所对应的频率临界值 ω_c 由下式给出：

$$\omega_c^2=\frac{4\pi Ne^2}{m}-\beta^2. \tag{9}$$

可利用这一临界值改写(8)式，得出

$$\mathrm{Re}\hat{\varepsilon}=n^2(1-\kappa^2)=1-\frac{\omega_c^2+\beta^2}{\omega^2+\beta^2}, \tag{10a}$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{Im}\hat{\varepsilon})=n^2\kappa=\frac{\beta(\omega_c^2+\beta^2)}{2\omega(\omega^2+\beta^2)}. \tag{10b}$$

现在假定 ω_c^2 比 β^2 大很多，因此可用下式代替(9)式，即

$$\omega_c^2\sim\frac{4\pi Ne^2}{m}. \tag{11}$$

如果再限于讨论足够高的频率（$\omega^2\gg\beta^2$)，则可得出更简单的公式代替(10)式，即

$$\mathrm{Re}\hat{\varepsilon}=n^2(1-\kappa^2)\sim1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2, \tag{12a}$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{Im}\hat{\varepsilon})=n^2\kappa\sim\frac{\beta}{2\omega}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2. \tag{12b}$$

由(12a)式得出，当 $\omega^2<\omega_c^2$（但仍有 $\omega^2\gg\beta^2$）时，$\hat{\varepsilon}$ 的实部

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是负的，并且 $\kappa>1$. $\hat{\varepsilon}$ 的实部为负值反映下述事实，即在此情况下电子振动的位相与激发场差四分之一周期，正如由(5)式明显看到的那样. 对于足够低的 ω 值，衰减指数 κ 变得比 1 大，并且不难看出[对于正入射，由 § 13.2(28) 式给出的]反射率具有接近于 1 的值. 另一方面，当 $\omega^2>\omega_c^2$（但 $\omega^2\gg\beta^2$）时，$\hat{\varepsilon}$ 的实部显然是正的，因此 $\kappa<1$；当 ω 足够大时，κ 变得比 1 小很多，并且 $\hat{\varepsilon}$ 的虚部变得比其实部小很多. 这时必预料到金属的性状在本质上象电介质一样.

碱金属正好呈现出这些现象，在长波长区，它们不透明并且高反射，而在可见或紫外区内某一临界波长处，它们变得透明了，并且具有较低的吸收. 表 28 第二行给出了由实验确定的发生这一转变的波长. 第三行是由近似公式(11)确定的这些临界波长 $\lambda_c=2\pi c/\omega_c$，式(11)中取单位体积自由电子数与原子数 N 相同. 可以看出，除了钠以外，这两行的数值是不同的. 最后一行给出"有效"电子数 $N_{有效}$ 与原子数的比值，它由公式

$$\frac{N_{有效}}{N}=\frac{(\lambda_c)^2_{计算}}{(\lambda_c)^2_{观测}} \tag{13}$$

确定. 可以看出，这个数目是 1 的数量级，但(除了钠以外)都比 1 小得多. 因此，初等理论给出各参数的正确数量级，但并不详细描述现象.

表 28　临界波长 λ_c，低于此值时碱金属变得透明，高于此值时它们不透明并且高反射

金　属	锂	钠	钾	铷	铯
$(\lambda_c)_{观测}$	2050 埃	2100 埃	3150 埃	3600 埃	4400 埃
$(\lambda_c)_{计算}$	1500 埃	2100 埃	2900 埃	3200 埃	3600 埃
$N_{有效}/N$	0.54	1.00	0.85	0.79	0.67

利用含有衰变常数 β 的更精确的公式(10)来代替粗糙近似式(12)，理论可稍加改进. 然而由于高频电磁场与金属相互作用中所涉及的一些物理过程的复杂性，因此不可能通过简单的修改来

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

显著扩大本节概述的初等经典理论的有效范围. 金属光学性质的完全满意的理论只能在量子力学的基础上得出.

§13.4 波在分层导电媒质中的传播. 金属膜的理论

我们已在§1.6中研究过电磁波在分层电介质中的传播,亦即在其光学性质只依赖于一个笛卡儿坐标的电介质中的传播. 现在将扼要讨论把这一理论推广到含有吸收元的分层媒质. 因此假定除了 ε 和 μ 是单独一个坐标的函数以外, 还可以有一个有限的电导率 σ, 它同样只是这一个坐标的函数.

如§13.2开始所述, 只要用复介电常数 $\hat{\varepsilon}=\varepsilon+i4\pi\sigma/\omega$ 与复波数 $\hat{k}=\omega\sqrt{\mu(\varepsilon+i4\pi\sigma/\omega)}/c$ 分别代替实介电常数 ε 与实波数 k, 则第一章的公式就其只涉及时间谐波的场矢量各分量之间的线性关系而言,对导电媒质仍保持其有效性. 因此,只要在适当的公式中作这种形式变换,就可以把§1.6中所发展的分层电介质理论的基本公式接受下来. 特别是, 由此得出分层吸收媒质可用一个 2×2 矩阵来表征. 与分层电介质的情况不同, 矩阵元不再是实数或纯虚数,而是既含实部又含虚部的复数.

我们将通过详细研究两种有实际意义的情况来阐明这一理论.

§13.4.1 透明衬底上的吸收膜

考虑位于两种电介质之间的一层平面平行吸收膜 (图13.4). 由§1.6(55)—(58)式,用 $\hat{n}_2=n_2(1+i\kappa_2)$ 代替 n_2, 就得到平面单色波被膜反射与透射的公式. 令

$$\hat{n}_2\cos\theta_2=u_2+iv_2 \tag{1}$$

是方便的,式中 u_2 与 v_2 是实数. 我们可以很容易用入射角及表征第一种与第二种媒质光学性质的一些常数来表示 u_2 与 v_2. 把(1)式平方,并利用折射定律 $\hat{n}_2\sin\theta_2=n_1\sin\theta_1$, 得出

$$(u_2+iv_2)^2=\hat{n}_2^2-n_1^2\sin^2\theta_1. \tag{2}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

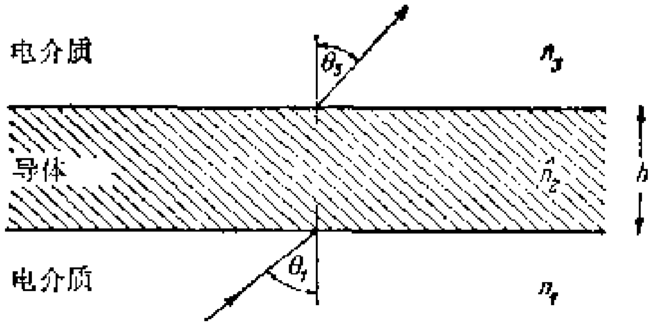


图 13.4　位于两种电介质之间的吸收膜

使实部与虚部分别相等，给出

$$\left.\begin{aligned} u_2^2 - v_2^2 &= n_2^2(1-\kappa_2^2) - n_1^2\sin^2\theta_1, \\ u_2 v_2 &= n_2^2\kappa_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由(3)式求出

$$\left.\begin{aligned} 2u_2^2 &= n_2^2(1-\kappa_2^2) - n_1^2\sin^2\theta_1 \\ &\quad + \sqrt{[n_2^2(1-\kappa_2^2) - n_1^2\sin^2\theta_1]^2 + 4n_2^4\kappa_2^2}, \\ 2v_2^2 &= -[n_2^2(1-\kappa_2^2) - n_1^2\sin^2\theta_1] \\ &\quad + \sqrt{[n_2^2(1-\kappa_2^2) - n_1^2\sin^2\theta_1]^2 + 4n_2^4\kappa_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其次，必须分别计算分界面 1—2 与 2—3 的反射与透射系数，因为这些系数都出现在膜的反射与透射系数的公式中．我们分别考虑入射波的电矢量垂直或平行于入射面时的情况．

电矢量垂直于入射面（TE 波）

在这种情况下，在§1.6(55)式中用 $\hat{n}_2\cos\theta_2 = u_2 + iv_2$ 代替 $n_2\cos\theta_2$，则有

$$r_{12} = \rho_{12}e^{i\phi_{12}} = \frac{n_1\cos\theta_1 - (u_2 + iv_2)}{n_1\cos\theta_1 + (u_2 + iv_2)}. \tag{5}$$

以后需要振幅 ρ_{12} 与位相变化 ϕ_{12} 的显式．由(5)式得出：

$$\rho_{12}^2 = \frac{(n_1\cos\theta_1 - u_2)^2 + v_2^2}{(n_1\cos\theta_1 + u_2)^2 + v_2^2},\quad \tan\phi_{12} = \frac{2v_2 n_1\cos\theta_1}{u_2^2 + v_2^2 - n_1^2\cos^2\theta_1}. \tag{6}$$

对于在第一个分界面的透射，由§1.6(56)式得出

$$t_{12} = \tau_{12}e^{i\chi_{12}} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + u_2 + iv_2}, \tag{7}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上式给出

$$\tau_{12}^2=\frac{(2n_1\cos\theta_1)^2}{(n_1\cos\theta_1+u_2)^2+v_2^2},\quad \tan\chi_{12}=-\frac{v_2}{n_1\cos\theta_1+u_2}. \tag{8}$$

用严格类似的方法，得出与第二个分界面的反射与透射有关的下列表达式：

$$\rho_{23}^2=\frac{(n_3\cos\theta_3-u_2)^2+v_2^2}{(n_3\cos\theta_3+u_2)^2+v_2^2},\quad \tan\phi_{23}=\frac{2v_2n_3\cos\theta_3}{u_2^2+v_2^2-n_3^2\cos^2\theta_3}, \tag{9}$$

$$\tau_{23}^2=\frac{4(u_2^2+v_2^2)}{(n_3\cos\theta_3+u_2)^2+v_2^2},\quad \tan\chi_{23}=\frac{v_2n_3\cos\theta_3}{u_2^2+v_2^2+u_2n_3\cos\theta_3}. \tag{10}$$

根据折射定律 $n_1\sin\theta_1=\hat{n}_2\sin\theta_2$，$\hat{n}_2\sin\theta_2=n_3\sin\theta_3$，所以角 θ_3 可用公式

$$n_3\sin\theta_3=n_1\sin\theta_1 \tag{11}$$

由 θ_1 确定．

电矢量平行于入射面(TM 波)

如§1.6.3 所述，假定媒质是非磁性的，则 TM 波的反射与透射系数的公式可由 TE 波的相应公式简单地用 $q_j=\cos\theta_j/n_j$ 代换 $P_j=n_j\cos\theta_j$ 各量而得出．现在，量 r 与 t 指的是磁矢量的比值，而不是电矢量的比值．特别是，由§1.6(55)式则有

$$r_{12}=\rho_{12}e^{i\phi_{12}}=\frac{\dfrac{1}{n_1}\cos\theta_1-\dfrac{1}{\hat{n}_2}\cos\theta_2}{\dfrac{1}{n_1}\cos\theta_1+\dfrac{1}{\hat{n}_2}\cos\theta_2}=\frac{\hat{n}_2^2\cos\theta_1-n_1\hat{n}_2\cos\theta_2}{\hat{n}_2^2\cos\theta_1+n_1\hat{n}_2\cos\theta_2}$$

$$=\frac{[n_2^2(1-\kappa_2^2)+2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1-n_1(u_2+iv_2)}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)+2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1+n_1(u_2+iv_2)}. \tag{12}$$

由(12)式经简单计算后求出

$$\left.\begin{aligned}\rho_{12}^2&=\frac{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_1-n_1u_2]^2+[2n_2^2\kappa_2\cos\theta_1-n_1v_2]^2}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_1+n_1u_2]^2+[2n_2^2\kappa_2\cos\theta_1+n_1v_2]^2},\\ \tan\phi_{12}&=2n_1n_2^2\cos\theta_1\frac{2\kappa_2u_2-(1-\kappa_2^2)v_2}{n_2^4(1+\kappa_2^2)^2\cos^2\theta_1-n_1^2(u_2^2+v_2^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由§1.6(56)式用 $\cos\theta_j/n$ 代换 $n_j\cos\theta_j$ 得到比值 t_{12}，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$t_{12} = \tau_{12} e^{i\chi_{12}} = \frac{\dfrac{2}{n_1}\cos\theta_1}{\dfrac{1}{n_1}\cos\theta_1 + \dfrac{1}{\hat{n}_2}\cos\theta_2}$$

$$= \frac{2[n_2^2(1-\kappa_2^2) + 2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1}{[n_2^2(1-\kappa_2^2) + 2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1 + n_1(u_2 + iv_2)}. \tag{14}$$

由(14)式求出

$$\left.\begin{aligned} \tau_{12}^2 &= \frac{4n_2^4(1+\kappa_2^2)^2\cos^2\theta_1}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_1 + n_1u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2\cos\theta_1 + n_1v_2]^2}, \\ \tan\chi_{12} &= \frac{n_1[2\kappa_2u_2 - (1-\kappa_2^2)v_2]}{n_2^2(1+\kappa_2^2)^2\cos\theta_1 + n_1[(1-\kappa_2^2)u_2 + 2\kappa_2v_2]}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

用类似的方法得出关于第二个分界面的反射与透射系数的下列公式:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{23}^2 &= \frac{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_3 - n_3u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2\cos\theta_3 - n_3v_2]^2}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_3 + n_3u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2\cos\theta_3 + n_3v_2]^2}, \\ \tan\phi_{23} &= 2n_3n_2^2\cos\theta_3\frac{2\kappa_2u_2 - (1-\kappa_2^2)v_2}{n_2^4(1+\kappa_2^2)^2\cos^2\theta_3 - n_3^2(u_2^2+v_2^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

及

$$\left.\begin{aligned} \tau_{23}^2 &= \frac{4n_3^2(u_2^2+v_2^2)}{[n_3u_2 + n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_3]^2 + [n_3v_2 + 2n_2^2\kappa_2\cos\theta_3]^2}, \\ \tan\chi_{23} &= \frac{n_2^2[(1-\kappa_2)^2v_2 - 2\kappa_2u_2]\cos\theta_3}{n_3[u_2^2+v_2^2] + n_2^2[(1-\kappa_2)^2u_2 + 2\kappa_2v_2]\cos\theta_3}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

根据对 ρ_{12}, ϕ_{12} 等量的了解,可立即算出膜的复反射与透射系数. 令

$$\eta = \frac{2\pi}{\lambda_0}h \tag{18}$$

是有用处的,因此

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\hat{n}_2h\cos\theta_2 = (u_2 + iv_2)\eta. \tag{19}$$

现在 § 1.6(57)—(58)式变为

$$r = \rho e^{i\delta_r} = \frac{\rho_{12}e^{i\phi_{12}} + \rho_{23}e^{-2v_2\eta}e^{i(\phi_{23}+2u_2\eta)}}{1 + \rho_{12}\rho_{23}e^{-2v_2\eta}e^{i(\phi_{12}+\phi_{23}+2u_2\eta)}}; \tag{20}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$t = \tau e^{i\delta_t} = \frac{\tau_{12}\tau_{23}e^{-v_2\eta}e^{i[\chi_{12}+\chi_{23}+u_2\eta]}}{1+\rho_{12}\rho_{23}e^{-2v_2\eta}e^{i[\phi_{12}+\phi_{23}+2u_2\eta]}}. \quad (21)$$

由(20)式经简单计算后得出反射率 $\mathscr{R}$ 与反射时位相变化 δ_r 的下列表达式:

$$\mathscr{R} = |r|^2 = \frac{\rho_{12}^2 e^{2v_2\eta} + \rho_{23}^2 e^{-2v_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos[\phi_{23}-\phi_{12}+2u_2\eta]}{e^{2v_2\eta}+\rho_{12}^2\rho_{23}^2 e^{-2v_2\eta}+2\rho_{12}\rho_{23}\cos[\phi_{12}+\phi_{23}+2u_2\eta]}, \quad (22)$$

$$\tan\delta_r = \frac{\rho_{23}(1-\rho_{12}^2)\sin(2u_2\eta+\phi_{23})+\rho_{12}[e^{2v_2\eta}-\rho_{23}^2 e^{-2v_2\eta}]\sin\phi_{12}}{\rho_{23}(1+\rho_{12}^2)\cos(2u_2\eta+\phi_{23})+\rho_{12}[e^{2v_2\eta}+\rho_{23}^2 e^{-2v_2\eta}]\cos\phi_{12}}. \quad (23)$$

这些公式对 TE 波以及 TM 波都是有效的. 在前一种情况中必须以 (6) 与 (9) 式给出的值代替 ρ 与 ϕ, 在后一种情况中它们由(13)与(16)式给出.

用类似的方法由(21)式得出透射率 $\mathscr{T}$ 与透射时位相变化 δ_t 的下列表达式:

$$\mathscr{T} = \frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}|t|^2 = \frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1} \times \frac{\tau_{12}^2\tau_{23}^2 e^{-2v_2\eta}}{1+\rho_{12}^2\rho_{23}^2 e^{-4v_2\eta}+2\rho_{12}\rho_{23}e^{-2v_2\eta}\cos[\phi_{12}+\phi_{23}+2u_2\eta]}, \quad (24)$$

$$\tan[\delta_t-\chi_{12}-\chi_{23}+u_2\eta] = \frac{e^{2v_2\eta}\sin 2u_2\eta-\rho_{12}\rho_{23}\sin(\phi_{12}+\phi_{23})}{e^{2v_2\eta}\cos 2u_2\eta+\rho_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{12}+\phi_{23})}. \quad (25)$$

对于 TM 波, 必须用 $(\cos\theta_3/n_3)/(\cos\theta_1/n_1)$ 代换上式的因子 $n_3\cos\theta_3/n_1\cos\theta_1$. 对于 TE 波, 在这些公式中要代入由(6),(8),(9)及(10)式给出的值, 而对于 TM 波, 那些相应的值由(13),(15),(16)及(17)式给出.

也许值得重申一遍, 反射时的位相变化 (δ_r) 涉及第一个界面(1—2), 而透射时的位相变化 (δ_t) 涉及第二个界面.

(22)—(25)式可计算用来表征被一已知光学性质及已规定厚度的吸收膜反射与透射的四个基本量. 图 13.5 表明, 在某些典型

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

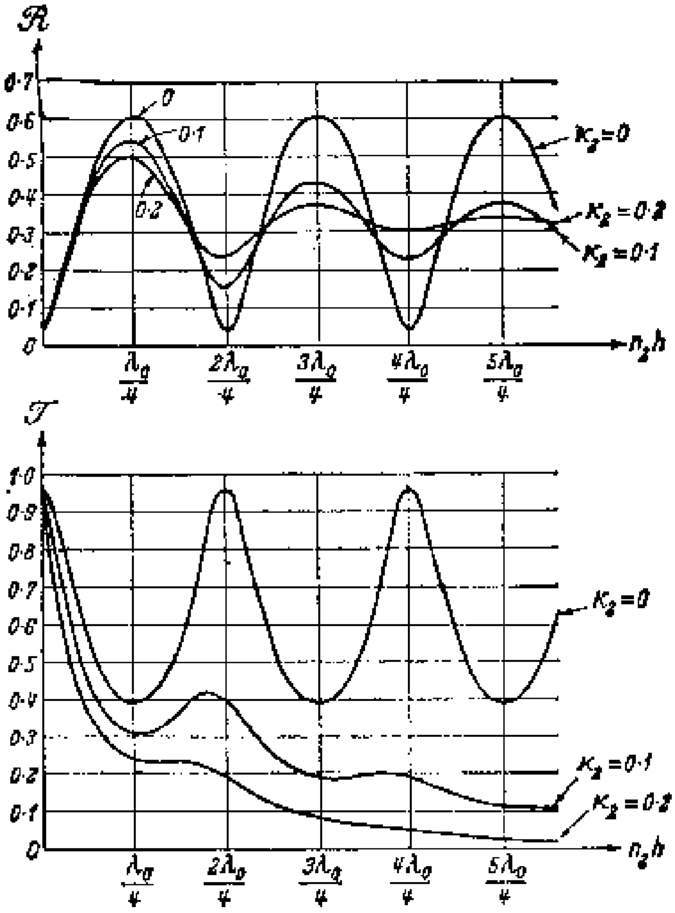


图 13.5　金属膜的反射率 $\mathscr{R}$ 与透射率 $\mathscr{T}$ 作为其光学厚度的函数($n_1=1$, $n_2=3.5$, $n_3=1.5$, $\kappa_1=\kappa_3=0$; $\theta_1=0$) [引自 K. Hammer, *Z. Tech. Phys.*, **24** (1943), 169.]

情况下反射率与透射率对于膜的厚度的依赖关系.

对于一个非吸收膜, $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{T}$ 是膜厚度 h 的周期函数，其周期为一个波长. 可以看出,吸收降低了相继各极大值的振幅,并引起极大值在厚度较小的方向上有一位移. 在光学波长区,金属的吸收是如此之大，以致厚度大大低于四分之一波长才有可觉察到的透射[1] (参看表 26, 第 820 页). 因此观测不到透射光的极大值与极小值.

---

1) 把(22)—(25)式的分子与分母展开为膜厚度的幂级数并且只保留前几项，就可得出关于这类薄膜的简化公式 [参看 F. Abelès, *Rev. d'Optique*, **32** (1953), 257].

金属薄膜在可见及红外光谱区的光学性质,已被 L. N. Hadley 与 D. M. Dennison 透彻地讨论过，见 *J. Opt. Soc. Amer.* **37**, (1947), 451; **38** (1948), 483.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

金属膜在光学中主要用来获得高反射率，例如用在法布里-珀罗干涉仪中(§ 7.6.2)。这种膜过去常常用化学淀积法制备，但这种方法近来已被高真空蒸发技术所代替[1]。

最后让我们扼要讨论一下"厚"膜的反射与透射。如果厚度 h 以及由它得出的参量 η 都足够大，则(22)—(25)式中所有不含乘法因子 $\exp(2v_2\eta)$ 的各项都可以略去。例如，若 $\exp(2v_2\eta)\gtrsim 100$，则这种忽略通常不引起多于百分之几的误差。对于这种膜，正入射时得出 $4\pi h n_2\kappa_2/\lambda \geqslant \log_e 100 = 4.61$，或(去掉下标 2)，

$$\frac{h}{\lambda} \gtrsim \frac{0.37}{n\kappa}. \tag{26}$$

例如对于银膜，在 $\lambda = 5780$ 埃处，$n\kappa \sim 3.67$，并且由(26)式给出 $h \gtrsim \lambda/10 \sim 5.8\times 10^{-6}$ 厘米。

对于厚膜，由(22)与(24)式得出

$$\mathscr{R} \sim \rho_{12}^2, \quad \mathscr{T} = \frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}\tau_{12}^2\tau_{23}^2 e^{-4v_2\eta}. \tag{27}$$

可见，"厚"膜的反射率几乎就是无限厚时的反射率，并且它的透射率随着厚度按指数减少。由(23)与(25)式立即得出位相变化：

$$\delta_r \sim \phi_{12}, \quad \delta_t \sim \chi_{12} + \chi_{23} + u_2\eta. \tag{28}$$

公式(27)与(28)用有点儿更加物理化的语言说明了我们对"厚"膜的定义，意思是在这样一个膜中多光束干涉效应是可以忽略的。

§ 13.4.2 吸收衬底上的透明膜

作为第二个例子，考虑从附着在吸收衬底上的一层透明膜的反射(图 13.6)。

在这种情况下，r_{12} 是实数，而 r_{23} 是复数。振幅比值 ρ_{23} 与位相变化 ϕ_{23} 由(6)式(13)式给出，其下标 1 与 2 分别用 2 与 3 代

---

1) 例如参看 S. Tolansky, *Multiple-beam Interferometry of Surfaces and Films* (Oxford University Press, 1948), p. 26; 或 O. S. Heavens, *Optical Properties of Thin Solid Films* (London, Butterworths, 1955).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

换．根据 § 1.6(57)式、现在有

$$r=\frac{r_{12}+\rho_{23}e^{i(\phi_{23}+2\beta)}}{1+r_{12}\rho_{23}e^{i(\phi_{23}+2\beta)}}. \tag{29}$$

如果在 § 1.6 的(57) 式中用 $2\beta+\phi_{23}$ 代换 2β，用 ρ_{23} 代换 r_{23}，则

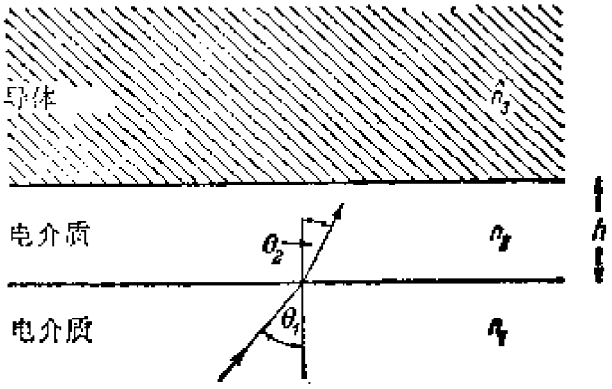


图 13.6　吸收衬底上的一层透明膜

与上式相同．因此在 § 1.6 的(59)与(61)式中简单地作此代换，不用任何计算，就可以立即写下反射率与反射时位相变化的表达式，即

$$\mathscr{R}=\frac{r_{12}^2+\rho_{23}^2+2r_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23}+2\beta)}{1+r_{12}^2\rho_{23}^2+2r_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23}+2\beta)}, \tag{30}$$

及

$$\tan\delta_r=\frac{\rho_{23}(1-r_{12}^2)\sin(\phi_{23}+2\beta)}{r_{12}(1+\rho_{23}^2)+\rho_{23}(1+r_{12}^2)\cos(\phi_{23}+2\beta)}. \tag{31}$$

在吸收衬底上的透明薄膜有很多实际应用．例如用来保护金属镜面并增高其反射率．也可以用来减少金属表面的反射率．我们在上册第 94 页中已经提到，人们可以设计一种起偏振器，它由电介质衬底上的一层电介质膜构成，可得到 $\mathscr{R}_{\parallel}=0$ 而 $\mathscr{R}_{\perp}$ 很大．用金属衬底可得到 $\mathscr{R}_{\parallel}=0$ 或 $\mathscr{R}_{\perp}=0$[1]．

§ 13.5　导体球的衍射；米氏理论

不仅成块的金属，而且当把它们分得很细，如在悬胶体中时，

1) 参看 H. Schopper, *Optik*, **10** (1953), 426.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这些金属也都呈现出明显的光学特征。我们会想起胶状的金在液体或玻璃中明亮的红宝石颜色。这类现象有很大的意义，因为折射，吸收与衍射一起在这里出现了。

假如金属颗粒是理想导体，人们将会讨论一个纯粹衍射的问题。然而在关于衍射的几章中，我们不曾从这个观点讨论过这一课题，因为这是由于光部分地透入颗粒内而引起的效应，它具有特殊的物理意义。此时吸收起着重要的作用，所以更适宜于在本章中讨论这一课题；关于电介质球的相应结果作为一种极限情况 $(\kappa \to 0)$ 也包含在我们的讨论之中了。

早期研究金属颗粒光学性质的工作者中，必须提到麦克斯韦·加涅特 (Maxwell Garnett)[1]。他讨论过光通过含有很多小金属球（具有波长线度）的一块电介质。利用洛仑兹-洛仑茨公式 [§2.3(17)]，麦克斯韦·加涅特证明了这样一个系集与一种具有某一复折射率 $\hat{n}' = n'(1 + i\kappa')$ 的媒质等效，他并且求出利用表示金属球特性的折射率 n 与衰减指数 κ 来表示 n' 与 κ' 的公式。通过这些讨论，他已能解释一些观测到的特征。

米氏 (G.Mie)[2] 在 1908 年发表的一篇论文中，在电磁理论的基础上，对于平面单色波被一个位于均匀媒质中具有任意直径及任意成分的均匀球衍射，得出了一个严格解。其后不久，德拜 (P.Debye)[3] 在一篇涉及导体球上光压（即光施加的机械力）的论文中，发表了同一问题的等效解，自此之后，这一课题已被许多作者[4]从它的不同方面讨论过了。

虽然米氏的解是对于被单个球衍射而导出的，但也适用于被任意多个球的衍射，只要它们都有同样的直径与成分，而且是无规

---

1) J. C. Maxwell Garnett, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A. **203**, (1904), 385; 同上, **205** (1906), 237.

2) G. Mie, *Ann. d. Physik* (4), **25** (1908), 377.

3) P. Debye, *Ann. d. Physik* (4), **30** (1909), 57.

4) 其后讨论基本理论的研究工作中，也许要特别提到下列文章：T. J. I'A. Bromwich, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, **220** (1920), 175 与 H. C. van de Hulst, *Rech. Astron. Observ. Utrecht*, XI, pt. 1 (1946).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

分布的，彼此分开的距离比一个波长大得多即可。在这种情况下，被不同的球散射的光之间没有相干的位相关系，因而总散射能就等于被一个球散射的能量与球总数的乘积。尤其在这一方面，米氏的解有很大的实际价值，并可应用于各种问题中：除了金属悬胶体呈现的颜色问题以外，还可以提到下列应用，例如大气尘埃的研究，星际的粒子或悬胶体，虹的理论，日冕，云和雾对光透射的影响等等。

在导出米氏公式以前，扼要说明所使用的方法是有好处的。我们涉及的是求麦克斯韦方程的解，它描述入射到一个球面上的平面单色波所产生的场，越过该球面时媒质的性质突然变化。引入适当的曲线坐标系(球极坐标系)，把场表示为两个"子场"之和；其中一个子场的电矢量没有径向分量，而另一个子场的磁矢量有此性质。在球极坐标中，麦克斯韦方程与边界条件一起分离为一组常微分方程，再对两个子场用无穷级数的形式解出上述方程。13.5.1 节涉及这个解的推导，13.5.2 节中讨论这个解的主要结果。最后一节(§ 13.5.3)涉及到关于被一个任意形状的障碍物散射与吸收的总能量的某些一般结果，并且详细讨论球形障碍物的情况。

§ 13.5.1 问题的数学解

(a) 用德拜势表示场

考虑平面线偏振单色波被浸没在均匀各向同性媒质内的一个半径为 a 的球衍射。假定媒质是非导体，并且这种媒质与球都是非磁性的。

照常假定电矢量与磁矢量对时间的依赖关系为 $\exp(-i\omega t)$，则在球外与球内的电矢量与磁矢量同时间无关的部分都满足不含时间的麦克斯韦方程：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} &= -k_1\boldsymbol{E}, \quad &\text{(a)}\\ \mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} &= k_2\boldsymbol{H}, \quad &\text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
k_1 &= \frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right), && \text{(a)}\\
k_2 &= \frac{i\omega}{c}. && \text{(b)}
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

通常的波数 k(球外是实数,球内是复数)的平方为

$$
k^2 = -k_1 k_2. \tag{3}
$$

凡涉及球周围媒质的各量都用上标 I 表示，涉及球的那些量则用上标 II 表示。由于假定球周围的媒质是非导体，故 $\sigma^{(I)} = 0$。

采取一个直角坐标系，原点在球心，z 方向沿波传播方向，而 x 方向沿它的电矢量方向(图 13.7)。

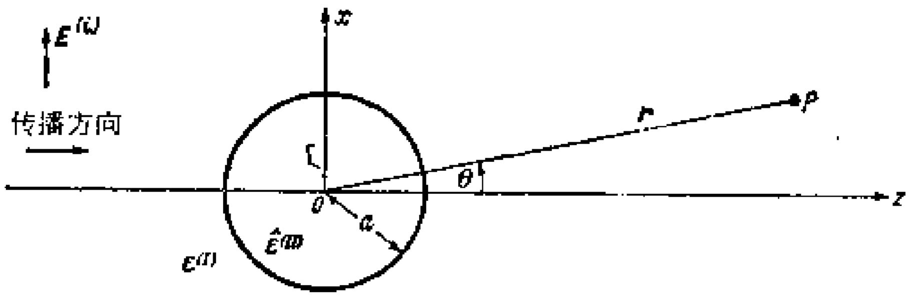


图 13.7 导体球的衍射：记号

如果入射波的电矢量振幅是归一化的，即

$$
|E^{(i)}| = |e^{ik^{(I)}z}| = 1,
$$

则场矢量的六个分量为

$$
\left.\begin{aligned}
E_x^{(i)} &= e^{ik^{(I)}z},\\
H_y^{(i)} &= \frac{ik^{(I)}}{k_2^{(I)}}\, e^{ik^{(I)}z},\\
E_y^{(i)} &= E_z^{(i)} = H_x^{(i)} = H_z^{(i)} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

关于边界条件，根据 § 1.1.3，我们只要求 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量通过球表面时连续：

$$
\left.\begin{aligned}
E_{切}^{(I)} &= E_{切}^{(II)}\\
H_{切}^{(I)} &= H_{切}^{(II)}
\end{aligned}\right\} \quad 当\ r = a\ 时. \tag{5}
$$

然后，由(5)式与麦克斯韦方程得出另一条件：$\varepsilon\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的径向分量通过该表面时也连续。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

为了满足这些边界条件，必须假定除了入射场 $\boldsymbol{E}^{(i)}$, $\boldsymbol{H}^{(i)}$ 和在球内的场 $\boldsymbol{E}^{(w)}$, $\boldsymbol{H}^{(w)}$ 外，还有在球周围媒质内的次级（被散射或衍射的）场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$, $\boldsymbol{H}^{(s)}$. 因此，在这两个区域内的总电场写成

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}^{(i)} + \boldsymbol{E}^{(s)} \quad \text{球外}\\ &= \boldsymbol{E}^{(w)} \qquad\quad\;\; \text{球内}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

对于磁矢量也有类似的表达式. 场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$, $\boldsymbol{H}^{(s)}$ 和 $\boldsymbol{E}^{(w)}$, $\boldsymbol{H}^{(w)}$ 可认为分别类似于涉及一个界平面传播时的反射场和透射场(§ 1.5.1)；然而，仅当球直径比波长大很多时，这种类似才是恰当的. 因为边界条件必须对于所有时间都成立，所以所有六个矢量必定具有同样的时间依赖关系 $[\exp(-i\omega t)]$.

球极坐标 r, θ 和 ϕ 是对本问题适用的曲线坐标，其定义为

$$\left.\begin{aligned}x &= r\sin\theta\cos\phi,\\ y &= r\sin\theta\sin\phi,\\ z &= r\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 从笛卡儿坐标系变换到该新坐标系可按下列规则[1]:

$$\left.\begin{aligned}A_r &= A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta,\\ A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta,\\ A_\phi &= -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

把这些公式用于矢量 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$，得到

---

1) 例如，见 W. Magnus 和 F. Oberhettinger, *Formulas and Theorems for th, Functions of Mathematical Physics* (New York, Chelsea Publishing Companye 1954), P. 146.

这里定义的各分量不是 Ricci 和 Levi-Civita 的绝对微分学中使用的那些量. 在那里，人们有矢量 $\boldsymbol{A}$ 的两组不同而等价的分量，即反变分量 A^i 与共变分量 A_i. 如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 是一般不正交且有不同长度的基矢，则（相对于这些基矢）的反变分量可定义为表示式 $\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ 中的系数；而共变分量可定义为表示式 $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}^1 + A_2\boldsymbol{e}^2 + A_3\boldsymbol{e}^3$ 中的系数，式中 $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ 和 $\boldsymbol{e}^3$ 是倒数矢，即满足关系式 $\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_k = \delta_{ik}$ 的矢量，式中 δ_{ik} 是克朗内克符号. 在 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 均正交的特殊情况下，$\boldsymbol{e}^1$、$\boldsymbol{e}^2$ 与 $\boldsymbol{e}^3$ 也都正交，并且这两组中相应的矢量平行. 因此，人们可引入一组自然分量 $\bar{A}_i = \sqrt{A_iA^i}$，它们具有简单的几何解释，即它们是 $\boldsymbol{A}$ 在三个方向上的正交射影. 在球极坐标的情况下，自然分量就是由(8)式给出的那些量.

张量分量可用类似的方法处理.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}(\text{curl}\,\boldsymbol{A})_r &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial(rA_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\phi}\right\},\\ (\text{curl}\,\boldsymbol{A})_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi\sin\theta)}{\partial r}\right\},\\ (\text{curl}\,\boldsymbol{A})_\phi &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

在球极坐标中，场方程(1)变为

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}-k_1E_r &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial(rH_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial\phi}\right\}, &(\alpha)\\ -k_1E_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rH_\phi\sin\theta)}{\partial r}\right\}, &(\beta)\\ -k_1E_\phi &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right\}. &(\gamma)\end{aligned}\right\}\text{(a)}\\ &\left.\begin{aligned}k_2H_r &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial(rE_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial\phi}\right\}, &(\alpha)\\ k_2H_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial E_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rE_\phi\sin\theta)}{\partial r}\right\}, &(\beta)\\ k_2H_\phi &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right\}. &(\gamma)\end{aligned}\right\}\text{(b)}\end{aligned}\right\}(10)$$

现在，边界条件(5)为

$$\left.\begin{aligned}E_\theta^{(\mathrm{I})} = E_\theta^{(\mathrm{II})},\quad E_\phi^{(\mathrm{I})} = E_\phi^{(\mathrm{II})},\\ H_\theta^{(\mathrm{I})} = H_\theta^{(\mathrm{II})},\quad H_\phi^{(\mathrm{I})} = H_\phi^{(\mathrm{II})}.\end{aligned}\right\}\text{对于 } r=a. \quad(11)$$

方程(10)与边界条件(11)合起来，是本问题的基本方程.

我们将把这些方程的解表示为两个线性无关的场 $({}^e\boldsymbol{E}, {}^e\boldsymbol{H})$ 和 $({}^m\boldsymbol{E}, {}^m\boldsymbol{H})$ 的叠加，这两个场各自满足(10)式，使得

$${}^eE_r = E_r,\quad {}^eH_r = 0, \quad(12a)$$

和

$${}^mE_r = 0,\quad {}^mH_r = H_r. \quad(12b)$$

不难看出，这样一种表示法与我们的方程一致. 利用 $H_r = {}^eH_r$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$=0$，则 (10a, β) 与 (10a, γ) 式变为

$$\left.\begin{aligned} k_1\,{}^eE_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,{}^eH_\phi), \\ k_1\,{}^eE_\phi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,{}^eH_\theta). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

把这些关系式代入到 (10b, β) 与 (10b, γ) 式中，得出

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(r\,{}^eH_\theta) &= -\frac{k_1}{\sin\theta}\frac{\partial\,{}^eE_r}{\partial\phi}, \quad (\mathrm{b}, \beta) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(r\,{}^eH_\phi) &= k_1\frac{\partial\,{}^eE_r}{\partial\theta}. \quad (\mathrm{b}, \gamma) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

(14)与 (10a, α) 式合起来，构成 ${}^eE_r$, ${}^eH_\theta$ 与 ${}^eH_\phi$ 的方程组. 但不是所有这个方程组的解都代表物理场；只有那些满足附加条件 $\operatorname{div}{}^e\boldsymbol{H}=0$ 的解才行. 我们只限于这样的解. 在球极坐标中，并在上述 ${}^eH_r=0$ 的假设下，这个附加条件为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,{}^eH_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}({}^eH_\phi)=0, \quad (15)$$

它保证余下的方程(10b, α)被满足. 因为把(13)式代入，(10b, α)式变为

$$0=\frac{1}{k_1^2r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,{}^eH_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(r\,{}^eH_\phi)\right],$$

由于(15)式，它同样是满足的. 严格类似的讨论也适用于 ${}^mE_r=0$ 的互补情况.

径向磁场消失的解称为**电波**(或横磁波)，而径向电场消失的解称为**磁波**(或横电波). 现在证明它们各自均可分别由标势 ${}^e\Pi$ 与 ${}^m\Pi$ 导出，这些标势通称**德拜势**[1].

---

1) 如果 $\boldsymbol{r}$ 表示起自原点的径向矢量，则 ${}^e\Pi\boldsymbol{r}$ 与 ${}^m\Pi\boldsymbol{r}$ 为**径向赫兹矢量**，即处处指在径向上的赫兹矢量 (见 § 2.2.2)，参看 A. Sommerfeld, 撰稿于 P. Frank and R. V. Mises: *Riemann-Weber's Differentialgleichungen der mathematischer Physik* (Braunschweig, Vieweg, 2nd ed., 1935; also New York, Dover Publ., 1961), **2**. 790; C. J. Bouwkamp and H. B. G. Casimir, *Physica*, **20** (1954), 539, 以及 A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.*, A, **231** (1955), 260; *Physica*, **21** (1955), 799.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

首先由(10b, α)式，因 ${}^eH_r = 0$，故得出 ${}^eE_\phi$ 与 ${}^eE_\theta$ 可用一个标量梯度来表示，

$$ {}^eE_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}, \quad {}^eE_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}. \tag{16} $$

现在如果令

$$ U = \frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial r}, \tag{17} $$

则由(16)式得出

$$ {}^eE_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r\partial\theta}, \quad {}^eE_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r\partial\phi}. \tag{18} $$

可以看出，下式可满足方程(13)，

$$ \left.\begin{aligned} {}^eH_\phi &= k_1\frac{\partial\,{}^e\Pi}{\partial\theta} = \frac{k_1}{r}\frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial\theta}, \\ {}^eH_\theta &= -\frac{k_1}{\sin\theta}\frac{\partial\,{}^e\Pi}{\partial\phi} = -\frac{k_1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial\phi}. \end{aligned}\right\} \tag{19} $$

如果把(19)式代入(10a, α)式，则得出

$$ {}^eE_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\,{}^e\Pi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\,{}^e\Pi}{\partial\phi^2}\right\}. \tag{20} $$

把(19)和(20)式代入(14)式，得出两个方程，其中第一个方程表示一个式子对 ϕ 的导数为零，第二个方程表示同一个式子对 θ 的导数为零。所以，令这个式子等于零，可以满足这些方程，由此得出

$$ \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\,{}^e\Pi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\,{}^e\Pi}{\partial\phi^2} + k^2\,{}^e\Pi = 0. \tag{21} $$

利用这个方程，(20)式可写为

$$ {}^eE_r = \frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r^2} + k^2 r\,{}^e\Pi. \tag{22} $$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

把(18),(19),(20),(21)和(22)式代入(10)式，可以证实我们已得出本问题的方程组的一个解.

可用类似的方法讨论磁波,并得出磁波可由势 ${}^m\Pi$ 导出,势 ${}^m\Pi$ 象 ${}^e\Pi$ 一样满足同一个微分方程(21). 把这两个场相加,就得到本问题的场方程的完全解;它给出

$$\left.\begin{aligned} E_r &= {}^eE_r + {}^mE_r = \frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r^2} + k^2 r\,{}^e\Pi, & (\alpha)\\ E_\theta &= {}^eE_\theta + {}^mE_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r\partial\theta} + k_2\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\,{}^m\Pi)}{\partial\phi}, & (\beta)\\ E_\phi &= {}^eE_\phi + {}^mE_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r\partial\phi} - k_2\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,{}^m\Pi)}{\partial\theta}, & (\gamma)\end{aligned}\right\}(23a)$$

$$\left.\begin{aligned} H_r &= {}^mH_r + {}^eH_r = k^2 r\,{}^m\Pi + \frac{\partial^2(r\,{}^m\Pi)}{\partial r^2}, & (\alpha)\\ H_\theta &= {}^mH_\theta + {}^eH_\theta = -k_1\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^m\Pi)}{\partial r\partial\theta} & (\beta)\\ H_\phi &= {}^mH_\phi + {}^eH_\phi = k_1\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\,{}^m\Pi)}{\partial r\partial\phi}. & (\gamma)\end{aligned}\right\}(23b)$$

势 ${}^e\Pi$ 与 ${}^m\Pi$ 都是微分方程(21)的解,(21)式只不过是用极坐标写出来的波动方程

$$\nabla^2\Pi + k^2\Pi = 0.$$

为了使分量 E_θ, E_ϕ, H_θ 和 H_ϕ 通过球表面 $r=a$ 时连续,显然使

$$k_1 r\,{}^e\Pi,\quad k_2 r\,{}^m\Pi,\quad \frac{\partial}{\partial r}(r\,{}^e\Pi),\quad \frac{\partial}{\partial r}(r\,{}^m\Pi) \tag{24}$$

这四个量通过该表面时也连续就足够了. 因此本问题的边界条件也分开为对 ${}^e\Pi$ 与 ${}^m\Pi$ 的独立的条件. 所以,本节的衍射问题就化为寻求波动方程具有既定边界条件时的两个互相独立解的问题了.

(b) 场分量的级数展开

首先,我们把波动方程的解表示为具有待定系数的展开式,每

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一项代表一个特解. 然后用边界条件来决定系数.

我们寻找的那些特解的形式为

$$\Pi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \tag{25}$$

直接代入(21)式,不难证实,函数 R, Θ 和 Φ 必须满足常微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2}\right) rR = 0, &\text{(a)}\\ &\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0, &\text{(b)}\\ &\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \beta\Phi = 0, &\text{(c)}\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

式中 α 和 β 是积分常数.

因为场 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 是位置的单值函数,所以 Π 同样必须是单值的,根据这一要求,对 Θ 和 Φ 就加上了某些条件.

对于(26)中的每一个方程,可写出其通解. 对 (c), 其通解是

$$a\cos(\sqrt{\beta}\,\phi) + b\sin(\sqrt{\beta}\,\phi).$$

单值性条件要求

$$\beta = m^2, \quad (m = \text{整数}). \tag{27}$$

所以 (26c) 的单值解为

$$\Phi = a_m\cos(m\phi) + b_m\sin(m\phi). \tag{28}$$

方程 (26c) 是熟知的球谐方程. 单值解的充要条件是

$$\alpha = l(l+1), \quad (l > |m|, \text{整数}). \tag{29}$$

把(27)式的 β 代入(26b)式,并引入新的变量

$$\xi = \cos\theta. \tag{30}$$

于是方程变为[1)]

$$\frac{d}{d\xi}\left\{(1-\xi^2)\frac{d\Theta}{d\xi}\right\} + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right\}\Theta = 0, \tag{31}$$

它的解是缔合勒让德函数

---

1) 参看 A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations of Physics* (New York, Academic Press, 1949), p. 127.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\Theta = P_l^{(m)}(\xi) = P_l^{(m)}(\cos\theta). \tag{32}$$

如果 $|m| > l$，则这些函数恒为零；因此，对于每一个 l，有 $2l+1$ 个这样的函数，即

$$m = -l,\ -l+1,\ \cdots l-1,\ l.$$

为了求余下的方程(26a)的积分，令

$$kr = \rho,\quad R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} Z(\rho), \tag{33}$$

得出贝塞耳方程[1]

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \left\{1 - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2}\right\} Z = 0. \tag{34}$$

这个方程的解是 $l+\frac{1}{2}$ 阶的一般柱面函数 $Z = Z_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 因此，(26a)式的解为

$$R = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l+\frac{1}{2}}(kr). \tag{35}$$

每一个柱面函数可表示为两个标准型柱面函数的线性组合，例如贝塞耳函数 $J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 和诺埃曼函数 $N_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 的线性组合。目前，采用下列函数是方便的[2]，

$$\psi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho),\quad \chi_l(\rho) = -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{36}$$

函数 $\psi_l(\rho)$ 在 ρ 平面的任一有限域内都是正则的，包括原点在内；反之，函数 $\chi_l(\rho)$ 在原点 $\rho=0$ 处有奇点，在该点处函数变为无穷大．因此，可以用函数 $\psi_l(\rho)$ 但不能用函数 $\chi_l(\rho)$ 来表示在球内的波。

---

1) 参看 A. Sommerfeld; 上注所引著作，p. 86.

2) 在文献中，ψ 与 χ 函数有几种稍有不同的定义．参看 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 2nd ed., 1944), p. 56; 或 A. Sommerfeld, 上注所引著作，pp. 113—114. 在 861—862 页，我们概述了关于 ψ_l 函数的某些公式．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

于是(26a)式的通解可写为

$$rR = c_l\psi_l(kr) + d_l\chi_l(kr). \tag{37}$$

特别是,当 $c_l = 1$, $d_l = -i$ 时,则有

$$rR = \zeta_l^{(1)}(kr), \tag{38}$$

式中

$$\zeta_l^{(1)}(\rho) = \psi_l(\rho) - i\chi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\, H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(\rho), \tag{39}$$

$H^{(1)}$ 是汉克耳函数的一种[1]. 汉克耳函数与其他柱面函数的区别在于前者有一特性：该函数在复平面内无穷远处为零. 这里所用的带有指标 1 的那一种汉克耳函数在 ρ 的正虚部半平面内为零,所以适合于表示散射波.

根据(25)式,把(28),(32)和(37)式给出的函数一起相乘,就得到特解 $\Pi_l^{(m)}$; 然后得出波动方程下列通解:

$$r\Pi = r\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Pi_l^{(m)}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\{c_l\psi_l(kr) + d_l\chi_l(kr)\}\{P_l^{(m)}(\cos\theta)\} \cdot \{a_m\cos(m\phi) + b_m\sin(m\phi)\}, \tag{40}$$

式中 a_m, b_m, c_l 和 d_l 是任意常数.

现在必须使用能满足边界条件的方法来确定这些常数. 要做到这一点,就必须使得入射波的势 ${}^{e}\Pi^{(i)}$ 和 ${}^{m}\Pi^{(i)}$ 都能用形式如(40)式的级数来表示. 为了表明这是能做到的,首先根据(8)式,把入射波的表达式(4)变换到球极坐标系:

---

1) 这个公式是下述熟知的贝塞耳函数,诺埃曼函数与汉克耳函数间的关系式的直接结果:

$$J_p + iN_p = H_p^{(1)}.$$

有一个类似的关系式涉及另一种汉克耳函数:

$$J_p - iN_p = H_p^{(2)}.$$

这两个公式类似于指数函数 $e^{i\rho}$ 与 $e^{-i\rho}$ 用 $\cos\rho$ 与 $\sin\rho$ 来表示的式子.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}
&E_r^{(i)} = e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\cos\phi, \quad H_r^{(i)} = \frac{ik^{(1)}}{k_2^{(1)}} e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\sin\phi,\\
&E_\theta^{(i)} = e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\cos\theta\cos\phi, \quad H_\theta^{(i)} = \frac{ik^{(1)}}{k_2^{(1)}} e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\cos\theta\sin\phi,\\
&E_\phi^{(i)} = -e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\sin\phi, \quad H_\phi^{(i)} = \frac{ik^{(1)}}{k_2^{(1)}} e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\cos\phi.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

为了确定势 ${}^e\Pi^{(i)}$ 或 ${}^m\Pi^{(i)}$，只需要用 (23) 诸式之一即可；由(23)第一式得出：

$$e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\cos\phi = \frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi^{(i)})}{\partial r^2} + k^{(1)2} r\,{}^e\Pi^{(i)}. \tag{42}$$

上式左方第一个因子可以用下列的勒让德多项式的可微级数 [包尔公式，§ 9.4(9)式] 来表示：

$$e^{ik^{(1)}r\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\frac{\phi_l(k^{(1)}r)}{k^{(1)}r}P_l(\cos\theta). \tag{43}$$

还有恒等式

$$e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta = -\frac{1}{ik^{(1)}r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\right), \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}P_l(\cos\theta) = -P_l^{(1)}(\cos\theta); P_0^{(1)}(\cos\theta) = 0. \tag{45}$$

利用这些关系式，(42)式左方可表示为下列形式：

$$e^{ik^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\cos\phi = \frac{1}{(k^{(1)}r)^2}\sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1}(2l+1)\phi_l(k^{(1)}r) \times P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi. \tag{46}$$

因此，我们取类似形式的级数

$$r\,{}^e\Pi^{(i)} = \frac{1}{k^{(1)2}}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l\phi_l(k^{(1)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi \tag{47}$$

作为(42)式的试探解. 把(46)和(47)式代入(42)式，并比较其系数，就得到关系式

$$\alpha_l\left\{k^{(1)2}\phi_l(k^{(1)}r) + \frac{\partial^2\phi_l(k^{(1)}r)}{\partial r^2}\right\} = i^{l-1}(2l+1)\frac{\phi_l(k^{(1)}r)}{r^2}. \tag{48}$$

现在由(37)式 ($c_l = 1, d_l = 0$) 得出

$$\phi_l(k^{(1)}r) = rR \tag{49}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是(26a)式的解：

$$\frac{d^2\psi_l}{dr^2}+\left(k^{(I)^2}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\psi_l=0,\tag{50}$$

只要 $\alpha=l(l+1)$ 成立[见(29)式]。比较(50)与(48)式，可看出

$$\alpha_l=i^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}.\tag{51}$$

关于磁势 ${}^m\Pi^{(i)}$ 的计算是类似的。因此得出入射波两个势的表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}r\,{}^e\Pi^{(i)}&=\frac{1}{k^{(I)^2}}\sum_{l=1}^{\infty}i^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(I)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi, &\text{(a)}\\ r\,{}^m\Pi^{(i)}&=\frac{1}{k^{(I)^2}}\sum_{l=1}^{\infty}i^{l}\frac{k^{(I)}}{k_2^{(I)}}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(I)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi. &\text{(b)}\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

我们已经把两个势都表示为形式如(40)的级数，那些未知常数现在就不难确定了。

更完整地写出边界条件(24)如下：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}\{r({}^e\Pi^{(i)}+{}^e\Pi^{(s)})\}_{r=a}=\frac{\partial}{\partial r}\{r\,{}^e\Pi^{(w)}\}_{r=a},\\ &\frac{\partial}{\partial r}\{r({}^m\Pi^{(i)}+{}^m\Pi^{(s)})\}_{r=a}=\frac{\partial}{\partial r}\{r\,{}^m\Pi^{(w)}\}_{r=a},\\ &k_1^{(I)}\{r({}^e\Pi^{(i)}+{}^e\Pi^{(s)})\}_{r=a}=k_1^{(II)}\{r\,{}^e\Pi^{(w)}\}_{r=a},\\ &k_2^{(I)}\{r({}^m\Pi^{(i)}+{}^m\Pi^{(s)})\}_{r=a}=k_2^{(II)}\{r\,{}^m\Pi^{(w)}\}_{r=a}.\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

根据(52)式，仅当未知势 $\Pi^{(s)}$ 与 $\Pi^{(w)}$ 的展开式(40)中出现的那些项的 $m=1$，而且磁势的 $a_l=0$，电势的 $b_l=0$，才能够满足这些方程。

我们已特别提到，只有 ψ_l 函数适合于表示 $\Pi^{(w)}$，因为这些函数在原点处仍是正则的，而函数 χ_l 在原点处变为无穷大。所以，令

$$\left.\begin{aligned}r\,{}^e\Pi^{(w)}&=\frac{1}{k^{(II)^2}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^eA_l\psi_l(k^{(II)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi, &\text{(a)}\\ r\,{}^m\Pi^{(w)}&=\frac{i}{k^{(II)}k_2^{(II)}}\sum_{l=0}^{\infty}{}^mA_l\psi_l(k^{(II)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi. &\text{(b)}\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

我们还看到，用函数 $\zeta_l^{(1)}=\psi_l-i\chi_l$ 表示散射波是适当的，$\zeta_l^{(1)}$ 由汉克耳函数 $H^{(1)}$ 乘以 $\sqrt{\pi\rho/2}$ 得出[见(39)式]. 对于大的 ρ 值，$H^{(1)}$ 的作用如同 $e^{i\rho}/\sqrt{\rho}$，即 $\zeta_l^{(1)}$ 的作用如同 $e^{i\rho}$，而 $R=\zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r)/r$ 如同 $e^{ik^{(1)}r}/r$. 因此，在离球的距离很远处，散射波是球面波，其中心在原点 $r=0$ 处. 所以，令

$$\left.\begin{aligned} r\,{}^e\Pi^{(s)} &= \frac{1}{k^{(1)2}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^eB_l\zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi, &\text{(c)}\\ r\,{}^m\Pi^{(s)} &= \frac{i}{k^{(1)}k_2^{(1)}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^mB_l\zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi. &\text{(d)}\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

现在如果把(52),(54)和(55)等式代入边界条件(53),就得到系数 ${}^eA_l$, ${}^mA_l$, ${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 之间的线性关系如下[1]:

$$\left.\begin{aligned} &{}^eB_l\frac{1}{k^{(1)}}\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(1)}a)+\frac{1}{k^{(1)}}i^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l'(k^{(1)}a)\\ &\qquad=\frac{1}{k^{(II)}}{}^eA_l\psi_l'(k^{(II)}a),\\ &{}^mB_l\frac{1}{k_2^{(1)}}\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(1)}a)+\frac{1}{k_2^{(1)}}i^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l'(k^{(1)}a)\\ &\qquad=\frac{1}{k_2^{(II)}}{}^mA_l\psi_l'(k^{(II)}a),\\ &{}^eB_l\frac{1}{k_2^{(1)}}\zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a)+\frac{1}{k_2^{(1)}}i^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(1)}a)\\ &\qquad=\frac{1}{k_2^{(II)}}{}^eA_l\psi_l(k^{(II)}a),\\ &{}^mB_l\frac{1}{k^{(1)}}\zeta_l^{(1)}(k^{(1)}a)+\frac{1}{k^{(1)}}i^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(1)}a)\\ &\qquad=\frac{1}{k^{(II)}}{}^mA_l\psi_l(k^{(II)}a).\end{aligned}\right\}\quad(56)$$

我们只对表示散射波特征的系数 ${}^eB_l$ 与 ${}^mB_l$ 感兴趣. 消去 ${}^eA_l$ 与 ${}^mA_l$，可得出这两个系数为

---

1) 函数 ψ_l, ζ_l 和 $P_l^{(1)}$ 上加一撇，表示对其自变量求微商.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
{}^{e}B_l &= i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)} \\
&\times \frac{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\psi_l'(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a) - k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{I})}a)}{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a) - k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a)\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}a)}, \quad (\mathrm{a}) \\
{}^{m}B_l &= i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)} \\
&\times \frac{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\psi_l(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a) - k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\psi_l'(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a)}{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a) - k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a)}. \quad (\mathrm{b})
\end{aligned}\right\}
\tag{57}
$$

最后，把(55)式代入(23)式，就得出散射波场矢量的各个分量为

$$
\left.\begin{aligned}
E_r^{(s)} &= \frac{1}{k^{(\mathrm{I})2}}\frac{\cos\phi}{r^2}\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)\,{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta), \\
E_\theta^{(s)} &= -\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\frac{\cos\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta \\
&\qquad - i\,{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\Big\}, \\
E_\phi^{(s)} &= -\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\frac{\sin\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta} \\
&\qquad - i\,{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta\Big\}, \\
H_r^{(s)} &= \frac{i}{k^{(\mathrm{I})}k_2^{(\mathrm{I})}}\frac{\sin\phi}{r^2}\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)\,{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta), \\
H_\theta^{(s)} &= -\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\frac{\sin\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta} \\
&\qquad + i\,{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta\Big\}, \\
H_\phi^{(s)} &= \frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\frac{\cos\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta \\
&\qquad + i\,{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\Big\}.
\end{aligned}\right\}
\tag{58}
$$

这就完成了我们的边界值问题的形式解．我们将不涉及解的存在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

及收敛问题.

回顾各个常数的意义是有好处的. 因为球周围的媒质假定是非导体, 所以 $\sigma^{(I)}=0$. 如果把球的电导率 $\sigma^{(II)}$ 改写为 σ, 则由(2)式得出

$$
\left.
\begin{aligned}
&k_1^{(I)}=\frac{i\omega}{c}\varepsilon^{(I)}=i\frac{2\pi}{\lambda_0}\varepsilon^{(I)},\ k_2^{(I)}=\frac{i\omega}{c}=i\frac{2\pi}{\lambda_0}, && \text{(a)}\\
&k^{(I)}=\sqrt{-k_1^{(I)}k_2^{(I)}}=\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon^{(I)}}=\frac{2\pi}{\lambda^{(I)}}, && \text{(b)}\\
&k_1^{(II)}=\frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon^{(II)}+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)=i\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\varepsilon^{(II)}+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right),\\
&k_2^{(II)}=\frac{i\omega}{c}=i\frac{2\pi}{\lambda_0}, && \text{(c)}\\
&k^{(II)}=\sqrt{-k_1^{(II)}k_2^{(II)}}=\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon^{(II)}+\frac{4\pi\sigma}{\omega}}, && \text{(d)}
\end{aligned}
\right\}\qquad (59)
$$

式中 λ_0 是光在真空中的波长, 而 $\lambda^{(I)}$ 是光在球周围的媒质中的波长.

为了以后的讨论, 引入球相对于周围媒质的复折射率也是方便的. 用 $\hat{n}$ 表示这个复折射率, 则有

$$
\hat{n}^2=\frac{\hat{n}^{(II)^2}}{\hat{n}^{(I)^2}}=\frac{k^{(II)^2}}{k^{(I)^2}}=\frac{\varepsilon^{(II)}}{\varepsilon^{(I)}}+i\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon^{(I)}}=\frac{k_1^{(II)}}{k_1^{(I)}}. \qquad (60)
$$

再引入一个无量纲参数 q, 定义为

$$
q=\frac{2\pi}{\lambda^{(I)}}a, \qquad (61)
$$

即 q 是球半径与光在球外媒质中的波长的比值的 2π 倍. 于是, 再用关系式

$$
\frac{k^{(II)}k_2^{(I)}}{k^{(I)}k_2^{(II)}}=\hat{n},
$$

就可以把系数(57)表示为下列形式:

$$
\left.
\begin{aligned}
&{}^{e}B_l=i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\,\frac{\hat{n}\psi_l'(q)\psi_l(\hat{n}q)-\psi_l(q)\psi_l'(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(1)\prime}(q)\psi_l(\hat{n}q)-\zeta_l^{(1)}(q)\psi_l'(\hat{n}q)}, && \text{(a)}\\
&{}^{m}B_l=i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\,\frac{\hat{n}\psi_l(q)\psi_l'(\hat{n}q)-\psi_l'(q)\psi_l(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(1)}(q)\psi_l'(\hat{n}q)-\zeta_l^{(1)\prime}(q)\psi_l(\hat{n}q)}. && \text{(b)}
\end{aligned}
\right\}\qquad (62)
$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当球的介电常数或者球的电导率很高，同时球的半径不太小时，这些公式有特别简单的形式. 在这种情况下，$|\hat{n}| \gg 1$，$|\hat{n}q| \gg 1$，而(62)式化为

$$\left.\begin{aligned} {}^{e}B_l &= i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\psi_l'(q)}{\zeta_l^{(1)\prime}(q)}, &\text{(a)}\\ {}^{m}B_l &= i^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\psi_l(q)}{\zeta_l^{(1)}(q)}. &\text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

这个近似式对于光学没有多大意义，但它对无线电波是重要的. 由于早期的理论曾涉及这种极限情况[1]，它还具有历史意义.

(c) 关于缔合勒让德函数与柱面函数的公式概述

为了便于进一步讨论，我们在这里概括地介绍关于球谐函数与柱面函数的一些公式.

缔合勒让德函数

勒让德多项式是（$\cos\theta$ 的）多项式

$$P_l(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{[l/2]}(-1)^m\frac{(2l-2m)!}{2^l m!(l-m)!(l-2m)!}(\cos\theta)^{l-2m}, \tag{64}$$

而第一类缔合勒让德函数由下列公式定义[2]:

$$P_l^{(m)}(\cos\theta) = (\sin\theta)^m\frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}. \tag{65}$$

还需要下列关系式:

$$\left.\begin{aligned} P_l^{(1)}(\cos\theta) &= \frac{l}{\sin\theta}\{P_{l-1}(\cos\theta) - \cos\theta P_l(\cos\theta)\},\\ P_l^{(1)\prime}(\cos\theta) &= \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left\{P_l^{(1)}(\cos\theta) - l(l+1)\frac{P_l(\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

对于大的 l 值，有一渐近逼近式

---

1) 参看 K. Schwarzschild, *Münch. Akad., Math-phys. Kl.* **31** (1901), 293.

2) 有时采用稍有不同的定义，它与现在这一定义不同之处为乘一个因子 $(-1)^m$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$P_l(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{l\pi\sin\theta}}\ \sin\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]. \qquad (67)$$

柱面函数

I. 自变量 x 的值很小，则 $\phi_l(x)$ 的级数展开式为

$$\phi_l(x) = \frac{x^{l+1}}{1\cdot 3\cdots(2l+1)}\ f_l(x), \qquad (68)$$

式中

$$f_l(x) = 1 - \frac{2}{2l+3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots \qquad (69)$$

$\zeta_l^{(1)}(x)$ 的展开式为

$$\zeta_l^{(1)}(x) = -i\ \frac{1\cdot 3\cdots(2l-1)}{x^l}\ e^{ix}\{h_l(x) - ixg_l(x)\}, \qquad (70)$$

式中 $h_l(x)$ 与 $g_l(x)$ 是幂级数，其中第一项为 1，第二项是 x 的二次项。函数 $\phi_l'(x)$ 与 $\zeta_l^{(1)\prime}(x)$ 可用类似的形式表示：

$$\phi_l'(x) = \frac{(l+1)x^l}{1\cdot 3\cdots(2l+1)}\ f_l^+(x), \qquad (71)$$

$$\zeta_l^{(1)\prime}(x) = il\ \frac{1\cdot 3\cdots(2l-1)}{x^{l+1}}\ e^{ix}\{h_l^+(x) - ixg_l^+(x)\}, \qquad (72)$$

式中 $f_l^+(x)$，$h_l^+(x)$ 与 $g_l^+(x)$ 是与前述同类的幂级数。

II. 自变量 x 的值很大，只要 l 与 $|x|$ 相比很小，则可以用下列渐近公式：

$$\phi_l(x) \sim \frac{1}{2}\{i^{l+1}e^{-ix} + (-i)^{l+1}e^{ix}\}, \qquad (73)$$

$$\zeta_l^{(1)}(x) \sim (-i)^{l+1}e^{ix}, \qquad (74)$$

及

$$\phi_l'(x) \sim \frac{1}{2}\{i^l e^{-ix} + (-i)^l e^{ix}\}, \qquad (75)$$

$$\zeta_l^{(1)\prime}(x) \sim (-i)^l e^{ix}. \qquad (76)$$

对于 x 的实数值，函数 $\phi_l(x)$ 与 $\phi_l'(x)$ 本身都是实数：

$$\phi_l(x) \sim \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \qquad (77)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\phi_l'(x) \sim \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right). \tag{78}$$

§ 13.5.2 米氏公式的某些结果

(a) 分波

由(58)式看出，散射波径向分量 $E_r^{(s)}$ 与 $H_r^{(s)}$的振幅按离开散射中心的距离的倒数平方衰减，而其他分量的振幅则按此距离的倒数较慢衰减. 因此，在足够大的距离处（$r \gg \lambda$），在辐射带或波带内，与切向分量相比，径向分量可以忽略，即波在此区域内是横波.

公式表明，散射波是由包括不同阶的球谐函数的贡献组成的. 这些贡献可称为分波（partial wave），它们的强度由复系数 ${}^eB_l$ 与 ${}^mB_l$ 的绝对值确定. 这些系数取决于两种媒质的性质以及球半径与人射光波长的比值.

每一个分波是由一个振幅为 ${}^eB_l$ 的电分波与一个振幅为 ${}^mB_l$ 的磁分波组成的. 电分波的磁力线与磁分波的电力线统统位于同心球面上，因为前者 $H_r^{(s)}=0$，而后者 $E_r^{(s)}=0$.

让我们考虑一个典型的分波，例如第 l 个电波. 我们看到，在 $\cos\phi$ 或 $P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta$ 为零的各点处，相应的分量 $E_\theta^{(s)}$ 与 $H_\phi^{(s)}$ 为零；同样，在 $\sin\phi$ 或 $P_l^{(1)}(\cos\theta)/\sin\theta$ 为零的各点处，$E_\phi^{(s)}$ 与 $H_\theta^{(s)}$ 为零. 现在，在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 内，函数 $P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)$ 有 l 次为零，函数 $P_l^{(1)}(\cos\theta)/\sin\theta$ 有 $(l-1)$ 次为零，但当 $\theta=0$ 或 π 时不等于零. 由此得出，$\phi=\pm\pi/2$ 时，所有的场分量有 $2l$ 次为零，即总共有 $(4l-2)$ 次为

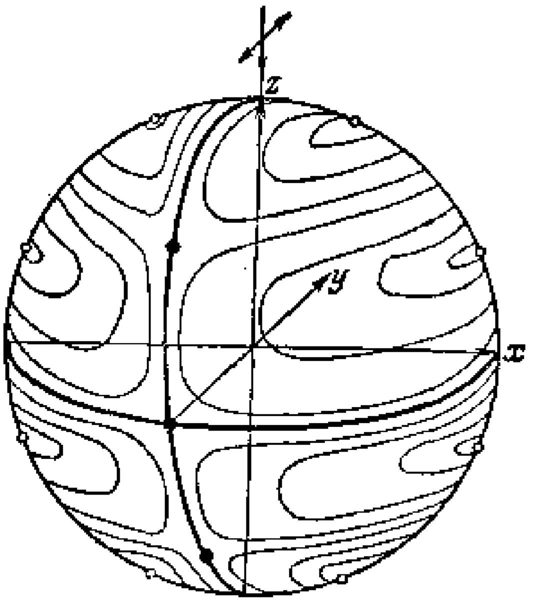


图 13.8 第四个电分波的磁力线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

零． 由于磁力线必须是闭合曲线，并且如前述，它们统统位于与原点同心的球面上，因而得出，圆 $\phi=0$ 或 π 上 $2l$ 个零点中每一个都是闭合磁迴线族的中心，反之，位于圆 $\phi=\pm\pi/2$ 上的 $2(l-1)$ 个零点都是中性点． 力线避开这些中性点，正如两个具有公共渐近线的等轴双曲线族避开它们的公共中心那样．

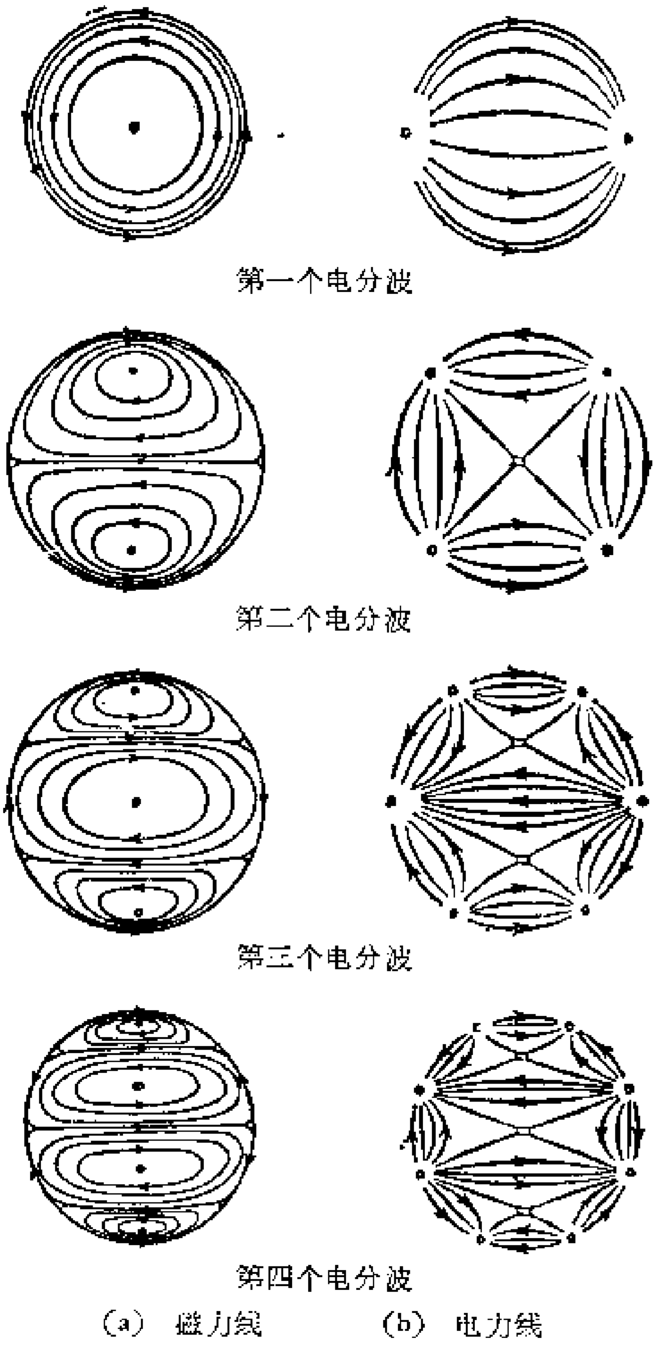


图 13.9 头四个电分波的力线
[引自 G. Mie, *Ann. d. Physik* (4), **25** (1908), 377.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

图 13.8 画出第四个电分波的磁力线。可以清楚地区分两组的点；第一组在 xz 截面(图平面)，第二组在 yz 截面。

图 13.9(a) 画出位于 yz 平面任一侧的一个半球上并属于头四个电分波的磁力线在 yz 平面上的投影。在辐射带内，电力线与磁力线正交，因为根据(58)式，对每一个(电或磁)分波，都有

$$E_\theta^{(s)}H_\theta^{(s)} + E_\phi^{(s)}H_\phi^{(s)} = 0. \tag{79}$$

图 13.9(b)画出这些线在 xz 平面上的类似投影。

除了 $\cos\phi$ 与 $\sin\phi$ 要互换外，类似的结果对于磁分波也成立。只要把图形绕 z 轴转 90° 角，就可以得出位于一个球面上的磁分波的电力线的相应投影。

(b) 极限情况

现在我们研究各个分波的相对贡献。一般情况($\hat{n}$ 与 q 任意)不能作简单的解析处理，因此只详细考虑两种极限情况，即球半径比波长大得多($q \gg 1$)时的情况，和球半径比波长小得多($q \ll 1$)时的情况。

I. $q \gg 1$. 对于这种情况，必须期望我们的解实质上给出与惠更斯-基尔霍夫衍射理论相同的结果，或者甚至(当 $q \to \infty$ 时)给出与几何光学相同的结果。

如果限于讨论远小于 q 与 $|\hat{n}q|$ 的那些序数 l，则可以用渐近逼近式(73)至(76)，得

$$\frac{\psi_l(\hat{n}q)}{\psi_l'(\hat{n}q)} \sim \frac{i^{l+1}e^{-i\hat{n}q} + (-i)^{l+1}e^{i\hat{n}q}}{i^l e^{-i\hat{n}q} + (-i)^l e^{i\hat{n}q}}$$

$$= \frac{\cos\left[\hat{n}q - (l+1)\frac{\pi}{2}\right]}{\cos\left[\hat{n}q - l\frac{\pi}{2}\right]} = \tan\left[\hat{n}q - l\frac{\pi}{2}\right], \tag{80}$$

并且，系数(62)变为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
{}^{e}B_l &= (-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}e^{-iq} \\
&\times\frac{\sin\left[q-l\frac{\pi}{2}\right]-\hat{n}\cos\left[q-l\frac{\pi}{2}\right]\tan\left[\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right]}{1-i\hat{n}\tan\left[\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right]}, \\
{}^{m}B_l &= (-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}e^{-iq} \\
&\times\frac{\hat{n}\sin\left[q-l\frac{\pi}{2}\right]-\cos\left[q-l\frac{\pi}{2}\right]\tan\left[\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right]}{\hat{n}-i\tan\left[\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right]}.
\end{aligned}\right\}\quad(81)
$$

我们注意到这些系数是 q 与 l 两者的快速振荡函数，因此，q 或 l 的微小改变都会引起 ${}^{e}B_l$ 与 ${}^{m}B_l$ 的很大变化。 我们还观察到 ${}^{m}B_{l+1}$ 与 ${}^{e}B_l$ 具有相同的数量级，即序数 l 的电分波的振幅与高一序的磁分波的振幅具有相同的数量级。

因为公式(81)是根据 l 远小于 q 的假设导出的，所以由这些近似式不能确定对散射场有可观贡献的分波的数目。德拜[1]导出了对所有序数都成立的渐近逼近式，并证明了一旦 $l+\frac{1}{2}$ 超过 q，分波的振幅就迅速下降到零，因此只需要包括前 q 项即可。

当球的介电常数或电导率很大 $(|\hat{n}|\to\infty)$ 时，${}^{e}B_l$ 与 ${}^{m}B_l$ 的表达式化为

$$
\left.\begin{aligned}
{}^{e}B_l &= i(-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}e^{-iq}\cos\left(q-l\frac{\pi}{2}\right), \\
{}^{m}B_l &= (-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}e^{-iq}\sin\left(q-l\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(82)
$$

由(63)式并利用渐近逼近式(73)至(76)，就非常简单地导出上式。

本节 $(q\gg 1)$ 的近似式可应用于虹霓理论[2]方面；由雨滴大

1) P. Debye, *Ann. d. Physik* (4), **30** (1909), 118; *Mat. Ann.*, **67** (1909), 535; *Sitzungsb. Münch. Akad. Wiss, Math. Phys. Kl.*, 5 *Abh.* (1910).

2) 参看 B. van der Pol and H. Bremmer, *Phil. Mag.*, (7) **24** (1937), 857; H. Bucerius, *Optik*, **1** (1946), 188.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

小决定的参量 q 具有 10^4 的数量级.

II. $q \ll 1$. 这种情况对于胶体溶液中的微观及亚微观粒子有很大的实际重要性. 现在我们可以利用柱面函数的幂级数展开式(68)至(72),得出(限于主要项),

$$\left.\begin{aligned} {}^eB_l &\sim i^l \frac{q^{2l+1}}{l^2[1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)]^2}\,\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+\dfrac{l+1}{l}}, \\ {}^mB_l &\sim i^l \frac{q^{2l+3}}{l(l+1)(2l+1)(2l+3)[1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)]^2}(\hat{n}^2-1). \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

当电导率或介电常数很大时,由(63)式得出[1]

$$\left.\begin{aligned} {}^eB_l &= i^l \frac{q^{2l+1}}{l^2[1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)]^2}, \\ {}^mB_l &= -i^l \frac{q^{2l+1}}{l(l+1)[1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

只要电导率保持有限值[公式(83)],则 ${}^eB_{l+1}$ 与 ${}^mB_l$ 都与 q 的同一幂次成正比,即第 $(l+1)$ 个电分波的振幅与第 l 个磁分波的振幅具有相同的数量级,正如 $q \gg 1$ 时的情况一样. 如果球半径是这样小,以致 q^2 与 1 相比可以忽略,则只需要考虑第一个电分波,其强度(与位相)由复振幅

$${}^eB_1 = iq^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2} = i\left(\frac{2\pi a}{\lambda^{(1)}}\right)^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2} \tag{85}$$

给出. 因为 ${}^eB_l$ 是复数,所以在入射初级场与散射次级场之间有一个位相差.

另一方面,在 $|\hat{n}| \to \infty$ 的极限情况下,由(84)式看出,第 l 个电分波的振幅与第 l 个磁分波的振幅具有相同的数量级.

现在让我们考虑 $|\hat{n}|$ 为有限值时,在离球很远的距离处 $(r \gg \lambda)$ 第一个电分波的场. 在(58)式中,利用渐近逼近式

$$\zeta_1^{(1)}(x) = -e^{ix}, \qquad \zeta_1^{(1)\prime}(x) = -ie^{ix}, \tag{86}$$

---

1) 从(83)式直接过渡到(84)式并不简单;必须注意到,当 $|\hat{n}| \to \infty$ 时,$q \to 0$,是通过使 $q^2|\hat{n}|^2$ 趋近于一个有限值而得出的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

以及关系式

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta,\qquad P_1^{(1)}(\cos\theta)=\sin\theta,$$

$$P_1^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta=-\cos\theta,\tag{87}$$

式中，一撇表示对 $\cos\theta$ 求微商，就得出

$$\left.\begin{aligned}
E_\theta^{(s)}&=-\frac{i}{k^{(\mathrm{I})}}\cos\phi\cos\theta^{e}B_1\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r}\\
&=\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(\mathrm{I})}}\right)^2a^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\cos\phi\cos\theta\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r},\\
E_\phi^{(s)}&=\frac{i}{k^{(\mathrm{I})}}\sin\phi^{e}B_1\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r}\\
&=-\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(\mathrm{I})}}\right)^2a^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\sin\phi\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r},\\
H_\theta^{(s)}&=\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\sin\phi^{e}B_1\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r}\\
&=\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(\mathrm{I})}}\right)^2\sqrt{\varepsilon^{(\mathrm{I})}}\,a^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\sin\phi\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r},\\
H_\phi^{(s)}&=\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\cos\phi\cos\theta\,^{e}B_1\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r}\\
&=\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(\mathrm{I})}}\right)^2\sqrt{\varepsilon^{(\mathrm{I})}}\,a^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\cos\phi\cos\theta\frac{e^{ik^{(\mathrm{I})}r}}{r}.
\end{aligned}\right\}\tag{88}$$

不难看出，(88)式与一个在 O 点处平行于 x 轴振荡的电偶极矩的辐射带（$r\gg\lambda$）的方程相同，即平行于初级入射场的电矢量，并具有矩 $p=p_0e^{-i\omega t}$，其中

$$p_0=a^3\left|\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\right|.\tag{89}$$

为了证明这一点，首先假定外部媒质为真空（$\varepsilon^{(\mathrm{I})}=1$），并回到§2.2的(53)和(54)式．根据这些方程，一个具有矩 $\boldsymbol{p}_0e^{-i\omega t}$ 的线性电偶极子在真空中的辐射场由下式给出，

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}&=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_0),\\
\boldsymbol{H}&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_0),
\end{aligned}\right\}\tag{90}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中已略去时间谐波因子 $e^{-i\omega t}$，$\mathbf{r}$ 是观察点相对于原点的位置矢量．由(90)式得出，如果 $\mathbf{p}_0$ 为 x 轴方向，则 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的分量由下式给出，

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0(\sin^2\theta\,\sin^2\phi + \cos^2\theta)\frac{e^{ikr}}{r},\\
E_y &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0(\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi)\frac{e^{ikr}}{r},\\
E_z &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0\sin\theta\cos\theta\cos\phi\frac{e^{ikr}}{r},\\
H_x &= 0,\\
H_y &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0\cos\theta\frac{e^{ikr}}{r},\\
H_z &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0\sin\theta\sin\phi\frac{e^{ikr}}{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

如果现在应用变换到球极坐标的(8)式，并且用(89)式代替 p_0，则上式变换为 (88) 式 ($\varepsilon^{(1)}=1$)．在更一般的情况下，当 $\varepsilon^{(1)}\neq 1$ 时，我们必须考虑用一个偶极子在电介质中的辐射场的相应表达式来代替(91)式．这些表达式可以用类似于(91)式的方法得出，当它们变换到球极坐标时，就变换为(88)式．我们注意到，球的折射率只以 $(\hat{n}^2-1)/(\hat{n}^2+2)$ 的组合在等效偶极矩的表达式(89)中出现；对于电介质(n 为实数)，我们已经在分子折射度理论中碰到过这个式子了(参看 § 2.3(17)式)．

因为，根据(88)式，振幅与波长平方成反比，所以散射光的强度与波长的四次方成反比．在这样一种情形所谈的是**瑞利散射**[1]．

第一个磁分波可以类似地利用一个振动磁偶极子来描述．更高序的分波可认为是由于振动多极子引起的，但我们在这里不研

---

1) 如上册第 136 页所指出，瑞利在关于天空蓝色的著名论文中证明了这类散射亦由均匀媒质的密度自发涨落而引起 [Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (4) **XLI** (1871), 274,447;(5) **XLVII** (1899), 375. 重印于他的 *Scientific Papers*, **1** (1899), 87, 104; **4** (1903), 397].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

究它.

(c) 散射光的强度和偏振

现在让我们回到一般情况，扼要地考察一下散射光的强度和偏振. 因为我们只对强度的相对值感兴趣，所以可以取电矢量实振幅的平方作为强度的量度. 我们只考虑远场 ($r \gg \lambda$)，所以可以把(58)式中的函数 $\zeta_l^{(1)}$ 与 $\zeta_l^{(1)\prime}$ 用它们的渐近逼近式来代替. 又令

$$
\left.\begin{aligned}
I_{\parallel}^{(s)} &= \frac{\lambda^{(1)2}}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_{l=1}^{\infty}(-i)^l\left({}^eB_l P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-{}^mB_l\frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta}\right)\right|^2,\\
I_{\perp}^{(s)} &= \frac{\lambda^{(1)2}}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_{l=1}^{\infty}(-i)^l\left({}^eB_l\frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-{}^mB_l P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right)\right|^2.
\end{aligned}\right\}\tag{92}
$$

则

$$
|E_\theta^{(s)}|^2 = I_{\parallel}^{(s)}\cos^2\phi,\qquad |E_\phi^{(s)}|^2 = I_{\perp}^{(s)}\sin^2\phi.\tag{93}
$$

我们把**观测平面**定义为包含入射光传播方向与观测方向 (θ, ϕ) 的平面. 根据(4) 和 (7)式，ϕ 代表这个平面与入射波电矢量振动方向之间的夹角. 因为根据 (93) 式，当 $\phi=0$ 或 $\phi=\pi/2$ 时，$E_\theta^{(s)}$ 或 $E_\phi^{(s)}$ 为零，所以当观测平面平行或垂直于初级振动时，散射光是线偏振的. 对于任何其他方向 (θ, ϕ)，因为比值 $E_\theta^{(s)}/E_\phi^{(s)}$ 是复数，所以光一般是椭圆偏振的. 然而，在由(88)式表示的瑞利散射的特殊情况下，比值 $E_\theta^{(s)}/E_\phi^{(s)}$ 总是实数，因此散射光对于所有观测方向都是线偏振的.

实际上，通常涉及**自然光**的散射. 如 § 1.5，由偏振光那些公式对所有偏振方向求平均，就可以得出适当的公式[1]. 用一横表示

1) 另一种办法是采用 § 10.8.2 的结果，据此，可以把一列自然光波看作是由两列等振幅的、传播方向相同而偏振方向互相垂直的不相干波组成的. 可分别确定每一列波的散射，对这两部分的波的强度求和就得到总强度. 这又导至(94)式.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

这种平均，因为 $\overline{\cos^2\phi}=\overline{\sin^2\phi}=\frac{1}{2}$，所以，代替(93)式，得出

$$\overline{|E_\theta^{(s)}|^2}=\frac{1}{2}I_\parallel^{(s)},\qquad \overline{|E_\phi^{(s)}|^2}=\frac{1}{2}I_\perp^{(s)}. \tag{94}$$

$I_\parallel^{(s)}$ 与 $I_\perp^{(s)}$ 一般都不为零，因此散射光是部分偏振的。和 § 1.5(42)式类似，可以定义散射光的偏振度 P 为

$$P=\left|\frac{I_\perp^{(s)}-I_\parallel^{(s)}}{I_\perp^{(s)}+I_\parallel^{(s)}}\right|. \tag{95}$$

于是散射光的**非偏振比例**(unpolarized proportion) 为

$$\left.\begin{aligned}(I_\perp^{(s)}+I_\parallel^{(s)})(1-P)&=2I_\parallel^{(s)},\ \text{当}\ I_\parallel^{(s)}<I_\perp^{(s)}\ \text{时},\\ &=2I_\perp^{(s)},\ \text{当}\ I_\parallel^{(s)}>I_\perp^{(s)}\ \text{时}.\end{aligned}\right\} \tag{96}$$

散射光的强度与偏振对散射方向以及对物理参量 ($\lambda, a, \hat{n}$) 的依赖关系，曾经被很多作者[1] 在米氏理论的基础上研究过了，我们在这里扼要概括已得出的某些主要结果，而不能做比这更多的事情了。

图 13.10 和 13.11 中，对于不同大小的电介质球和金属球，散射光的强度与非偏振比例均表示为观测角 θ 的函数。外曲线的矢径长度与强度 $I^{(s)}=I_\parallel^{(s)}+I_\perp^{(s)}$ 成正比，而内曲线的矢径长度，若不另作说明，则与 $I_\parallel^{(s)}$ 成正比。 单位是任意的，而且在各图中也

---

1) 除了已引用过的米氏论文外，可参考下列论文：

R. Gans, *Ann. d. Physik* (4), **76** (1925), 29; H. Senftleben and E. Benedict, *Ann. d. Physik* (4), **60** (1919), 297; H. Blumer, *Z. f. Phys.*, **32** (1925), 119; **38** (1926), 304, 920; **39** (1926), 195; C. Schalén, *Uppsala Astr. Obs. Ann.*, **1**, No. 2(1939); 同上, **1**, No. 9 (1945); G. R. Paranjpe, Y. G. Naik, and P. B. Vaidya, *Proc. Indian Acad.*, A. **9** (1939), 333, 352; H. Holl, *Optik*, **1** (1946), 213; 同上, **4** (1948/49), 173. 对很多作者所得结果的很全面的概括评述，见 H. C. van de Hulst 的论文, *Rech. Astr. Observ. utrecht*, **11**, Pt.I (1946) 以及他的书 *Light Scattering by Small Particles* (New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1957). 也见于 G. Oster, *Chem. Rev.*, **43** (1948), 319.

Tables of scattering functions for spherical particles, National Bureau of Standards (Washington, D. C. 1949), Applied Mathematics Series, 4; R. O. Gumprecht and C. M. Sliepcevich, *Light-Scattering Functions for Spherical Particles* (Ann Arbor, University of Michigan Press, 1951).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

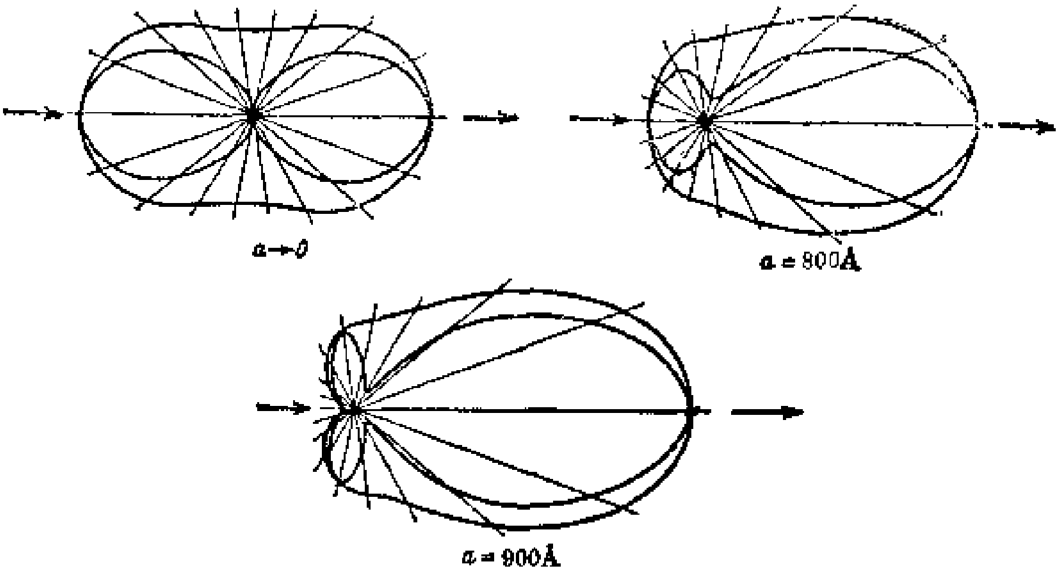


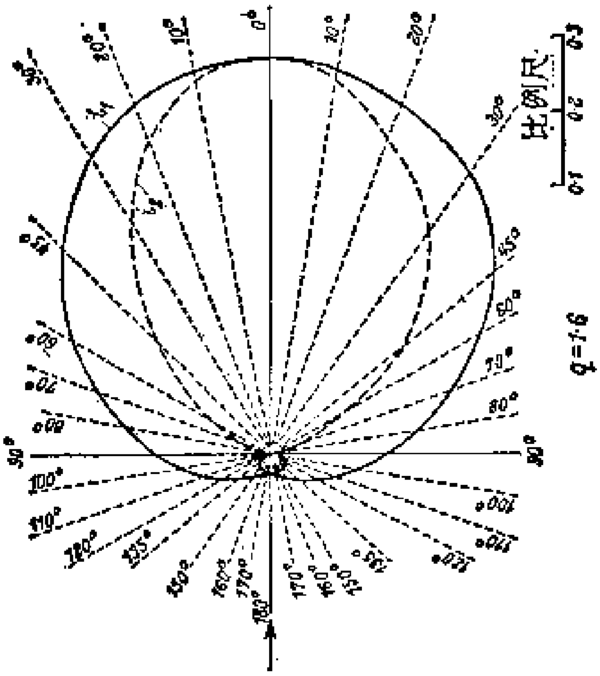
图 13.10　线偏振光被球状金粒散射的极坐标图
($\lambda_0 = 5500$ 埃, $n^{(I)} = 1.33$, $\hat{n}^{(II)} = 0.57 + 2.45i$)
[引自 G. Mie, *Ann. d. Physik*, (4) **25** (1908), 429.]

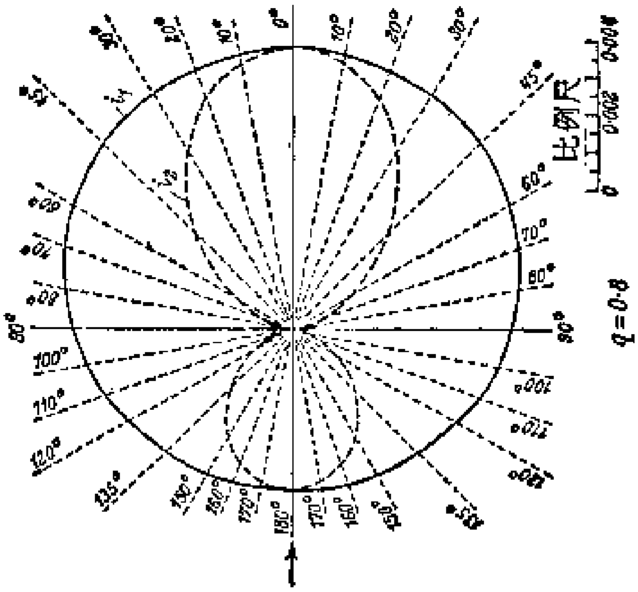
不相同. 由这些极坐标图以及其他已发表的计算结果，可引出下列的一般结论：

排除电导率或介电常数很大的情况（在这种情况下，入射光大部分向后辐射，即"反射"），在球缩小至零的极限情况下($a \to 0$)，极坐标图对于通过球心并与入射光传播方向成直角的平面是对称的. 在前进方向($\theta = 0$)和相反方向($\theta = 180°$)上都有一个强度极大值，在对称平面($\theta = 90°$)上则有极小值. 随着球半径的增大，就偏离了对称性，在前进方向上散射的光要比在相反方向上散射的多. 这种现象通常称为米氏效应. 随着半径更进一步增大，实际上所有散射光都出现在前进方向 $\theta = 0$ 的周围；同样，对于一个导体球，有更多的光集中于这个方向上. 然而当球半径比波长大很多时，入射光大部分被反射，如同按几何光学得出的那样.

表 29 中阐明了散射光强度对球半径的依赖关系. 比较第一行和第三行，就可以清楚地看到米氏效应. 表中指出，强度随着球增大而很快增加；为了真实比较，表中的数值必须乘以因子 $\lambda^{(I)2}/4\pi^2a^2 = 1/q^2$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn





PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

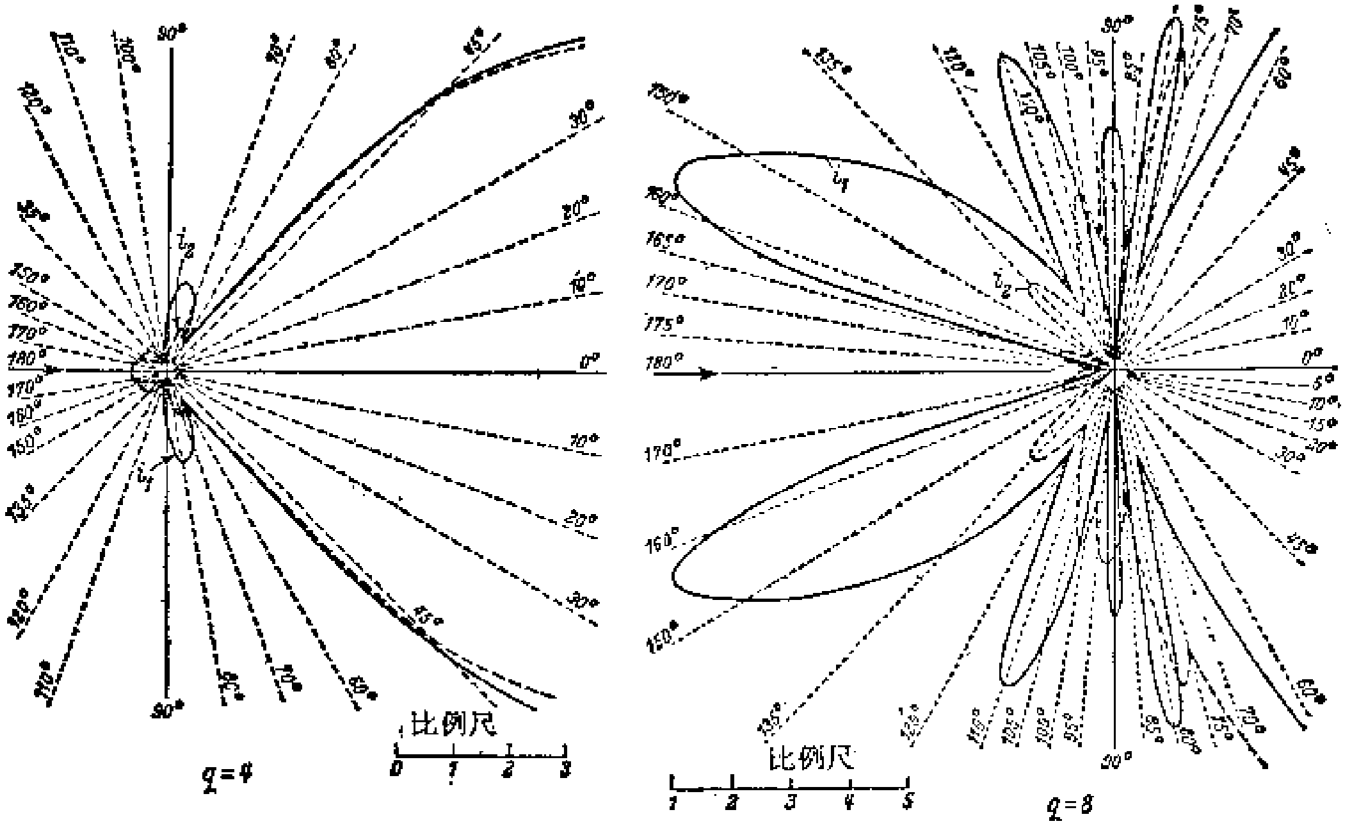


图 13.11 线偏振光被折射率 $n=1.25$ 的电介质球散射的极坐标图。$i_1=q^2I_{\perp}$，$i_2=q^2I_{/\!/}$

[引自 H. Blumer, *Z. f. Phys.*, **32** (1925), 119.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

当 q 超过1，即球直径 $2a$ 大于 $\lambda^{(1)}/\pi$ 时，出现一系列极大值与极小值，它们最初是不规则分布的。当 q 很大时，一系列极大值与极小值的出现就与惠更斯-基尔霍夫理论一致。

关于散射光的偏振，取决于 $|\hat{n}|$ 是否很大，其结果又是不同的。

对于高电导 ($\sigma \to \infty$) 或有很高介电常数 ($\varepsilon \to \infty$) 的很小的球，当 $\theta = 60°$ (汤姆孙角)时，偏振最大。随着半径增大，极大值移到 θ 增大的方向上。

对于有限电导率和有限介电常数的球，在两种典型情况下，偏振对观测角 θ 的依赖关系如图 13.10 与 13.11 所示。当球半径很小 ($q \to 0$) 时，偏振图同强度图一样是对于 xy 平面对称的，当 $\theta = 90°$ 时，偏振图有一极大值，在该处是完全偏振的。在这种情况(瑞利散射)中，偏振度可以用单一的分析表达式来表示，它是由(88)和(93)式代入(95)式得出的，即

$$P(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta}. \tag{97}$$

这个公式曾被瑞利用一个不同的方法导出。

表 29 被折射率 $n = 1.25$ 的电介质球散射的光的归一化强度 $4\pi^2 a^2 (I_\perp^{(t)} + I_\parallel^{(t)})/\lambda^{(1)2}$，作为参量 $q = 2\pi a/\lambda^{(1)}$ 的函数

(根据 H. Blumer 的计算编制，*Z. f. Phys.*, **38** (1926), 304)

θ	$q = 0.01$	$q = 0.1$	$q = 0.5$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 5$	$q = 8$
0	5.0×10^{-14}	5.0×10^{-8}	1.2×10^{-3}	2.3×10^{-1}	4.3	9.8×10^2	7.5×10^3
90°	2.5×10^{-14}	2.5×10^{-8}	5.0×10^{-4}	3.6×10^{-2}	2.5×10^{-1}	2.7	7.1
180°	5.0×10^{-14}	4.9×10^{-8}	7.8×10^{-4}	1.9×10^{-3}	2.0×10^{-2}	1.3	0.9

随着球半径增大，直到大约 $a = \lambda^{(1)}/\pi$，极大值发生移动；在大多数曾经研究过的情况下，对于电介质球，移动到 θ 较大的方向上，而对于吸收球，则移动到 θ 较小的方向上。当球半径更进一步增大时，就出现偏振极大值的不规则序列。

在 $\theta = 90°$ 的方向上，当 $q < 1$ 时，光几乎是完全偏振的，其

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

电矢量垂直于观测平面；当 q 值较大时，不再是这种情况，其行为变得不规则了。

至此，我们一直限于讨论单色光。人们常常要涉及多色光的散射，所以我们也必须考虑由于存在不同波长成分而引起的效应。我们注意到，波长仅通过参量 q 及折射率 $\hat{n}$ 而出现于我们的公式中。在一个足够小的波长范围内，如果在(60)式中，含电导率 σ 的项比另一项小很多，即对于一个不良导体球，则 $\hat{n}$ 实际上与波长无关。另一方面，在电导率无限高的极限情况下，$\hat{n}$ 完全不出现于公式中。在这些情况下，光谱成分的强度只取决于 $a/\lambda^{(1)}$。因此，改变波长引起的效应，实质上等效于适量改变球半径所引起的效应。因为对于不同波长，偏振极大值在不同的观测角上出现，所以通过一个起偏振棱镜观测散射光时，就看到复杂的颜色变化。这种效应称为**多向色性**（polychroism）。散射光的偏振对波长的依赖关系通常称为**偏振的色散**，它对于理论提供很精确的检验[1]。

§ 13.5.3 总散射与消光

(a) 某些一般的考虑

确定被球散射或吸收的光的总量具有很大实际意义。这可以通过求出坡印廷矢量的值并把它对所有方向作积分而计算出来。利用缔合的勒让德函数之间存在的正交关系，就有可能用系数 ${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 来表示上述积分。这些计算稍觉冗长，在米氏的论文[2]中已全部完成了。

入射波失去的总能量，即被散射与被吸收能量的总和，可用另一种方法根据适用于无论何种形状障碍物的某些一般考虑来确定。这些考虑表明，能量损失与前进方向 ($\theta = 0$) 上散射波振幅之间有密切的联系。根据我们即将确立的这一结果，以及米氏的散射波公式，就可以很容易地确定被球散射与吸收而失去的总

---

1) 偏振的色散与多向色性已被 M. A. Schirmann 研究过，见 *Ann. d. Physik*, (4), **59** (1919), 493.

2) G. Mie, 见上述引文，pp. 432—436.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

能量。

考虑平面单色波入射到一个放在电介质媒质内的任意形状的障碍物上。障碍物周围媒质内任一点处的场，可再次表示为入射场与散射场的和，

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(i)}+\mathbf{E}^{(s)}, \qquad \mathbf{H}=\mathbf{H}^{(i)}+\mathbf{H}^{(s)}. \tag{98}$$

照例，略去时间因子 $\exp(-i\omega t)$。时间平均的能流用坡印廷矢量平均值表示，根据(98)式与 § 1.4 的公式(56)，它由下式给出，

$$\langle \mathbf{S}\rangle=\langle \mathbf{S}^{(i)}\rangle+\langle \mathbf{S}^{(s)}\rangle+\langle \mathbf{S}'\rangle, \tag{99}$$

式中($\mathscr{R}$ 表示实部)

$$\langle \mathbf{S}^{(i)}\rangle=\frac{c}{8\pi}\mathscr{R}(\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(i)*}), \tag{100a}$$

$$\langle \mathbf{S}^{(s)}\rangle=\frac{c}{8\pi}\mathscr{R}(\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(s)*}), \tag{100b}$$

$$\langle \mathbf{S}'\rangle=\frac{c}{8\pi}\mathscr{R}(\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(s)*}+\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(i)*}). \tag{100c}$$

考虑通过一个半径为 R 的大球表面的平均向外能流，该球心在障碍物所占有区域内某点处。每秒净能流用 $\langle \mathbf{S}\rangle$ 的径向分量 $\langle \mathbf{S}\rangle_r$ 在整个球面上的积分表示，当障碍物是电介质时，此值显然为零。但如果障碍物是导体，则有些入射能就被它吸收了，并且，通过球面向外的净能流在数值上等于其上出现吸收的速率。令 $\mathscr{W}^{(a)}$ 为障碍物吸收能量的速率。则由(99)式，

$$-\mathscr{W}^{(a)}=\mathscr{W}^{(i)}+\mathscr{W}^{(s)}+\mathscr{W}', \tag{101}$$

式中 $\mathscr{W}^{(i)}$，$\mathscr{W}^{(s)}$ 和 $\mathscr{W}'$ 是径向分量 $\langle \mathbf{S}^{(i)}\rangle_r$，$\langle \mathbf{S}^{(s)}\rangle_r$，和 $\langle \mathbf{S}'\rangle_r$ 在整个球面上的积分。现因假定障碍物周围的媒质是非导体，故 $\mathscr{W}^{(i)}=0$，所以

$$\mathscr{W}^{(a)}+\mathscr{W}^{(s)}=-\mathscr{W}'=-\frac{c}{8\pi}\times\mathscr{R}\iint_S(\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(s)*}+\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(i)*})\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{102}$$

S 表示大球面，$\mathbf{n}$ 表示向外的单位法线。因此(102)式右方的表达

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式表示发热和散射耗散能量的速率.

令 $\boldsymbol{n}_0$ 为入射波传播方向上的单位矢量,因此

$$\boldsymbol{E}^{(i)}=\boldsymbol{e}e^{ik^{(1)}(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{r})},\qquad \boldsymbol{H}^{(i)}=\boldsymbol{h}e^{ik^{(1)}(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{r})}.\tag{103}$$

假定这个波是线偏振的,因此 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 可假定为实数常矢量. 在离障碍物很远的距离处,可假定散射波是球面波:

$$\boldsymbol{E}^{(s)}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n})\frac{e^{ik^{(1)}r}}{r},\qquad \boldsymbol{H}^{(s)}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{n})\frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}.\tag{104}$$

矢量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n})$ 和 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{n})$ 表征在 $\boldsymbol{n}$ 方向上散射的辐射强度. 因为入射波和散射波都服从麦克斯韦方程,所以有[参看 § 1.4 的(4),(5)式]

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{h}=\sqrt{\varepsilon^{(1)}}\,\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{e}, &&\boldsymbol{b}=\sqrt{\varepsilon^{(1)}}\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a},\\ &\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{h}=0, &&\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0,\end{aligned}\right\}\tag{105}$$

式中 $\varepsilon^{(1)}$ 是外部媒质的介电常数,假定它是非磁性的($\mu=1$). 由这些关系式得出,在大球面 S 上,

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{E}^{(i)}\times\boldsymbol{H}^{(s)*})\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{\varepsilon^{(1)}}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}^{*}e^{ik^{(1)}R(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})}\frac{e^{-ik^{(1)}R}}{R},\\ &(\boldsymbol{E}^{(s)}\times\boldsymbol{H}^{(i)*})\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{\varepsilon^{(1)}}\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_0)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\\ &\qquad-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{a})]e^{-ik^{(1)}R(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})}\frac{e^{ik^{(1)}R}}{R}.\end{aligned}\right\}\tag{106}$$

把这些式子代入(102)式. 为了求出结果的积分值,我们利用下述数学引理[1]: 当 R 很大,并且 f 是 $\boldsymbol{n}$ 的任意函数时,有

$$\frac{1}{R}\iint_S f(\boldsymbol{n})e^{-ik^{(1)}R(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})}dS$$
$$\sim\frac{2\pi i}{k^{(1)}}[f(\boldsymbol{n}_0)e^{-ik^{(1)}R}-f(-\boldsymbol{n}_0)e^{ik^{(1)}R}].\tag{107}$$

于是得出

1) 应用稳相原理,经明显的变量变换后,可证明这个引理(参看附录 3,第 1002 页). 又见 D. S. Jones, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48** (1952), 736.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}&\iint_S (\boldsymbol{E}^{(i)} \times \boldsymbol{H}^{(s)*}) \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &\quad \sim -\frac{2\pi i}{k^{(1)}}\sqrt{\varepsilon^{(1)}}\,[\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{n}_0) - \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{a}^*(-\boldsymbol{n}_0)e^{-2ik^{(1)}R}], \\ &\iint_S (\boldsymbol{E}^{(s)} \times \boldsymbol{H}^{(i)*}) \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &\quad \sim \frac{2\pi i}{k^{(1)}}\sqrt{\varepsilon^{(1)}}\,[\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n}_0) + \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{n}_0)e^{2ik^{(1)}R}],\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

并且，(102)式变为

$$\mathscr{W}^{(s)} + \mathscr{W}^{(a)} = \frac{c\sqrt{\varepsilon^{(1)}}}{2k^{(1)}}\mathscr{I}[\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n}_0)], \tag{109}$$

式中 $\mathscr{I}$ 表示虚部。

(109)式的意思是：对于线偏振的入射光，能量消耗的速率与散射波某一振幅分量成正比；这个振幅相应于向前的散射（$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0$），而该分量是在入射波电矢量方向上。

能量消耗的速率 $(\mathscr{W}^{(a)} + \mathscr{W}^{(s)})$ 与能量入射到障碍物单位截面积上的速率 $(|\langle \boldsymbol{S}^{(i)}\rangle|)$ 的比值 Q，称为障碍物的消光截面(extinction cross-section)。由(100a)，(103)和(105)式得出，$|\langle \boldsymbol{S}^{(i)}\rangle| = c\sqrt{\varepsilon^{(1)}}\,\mathbf{e}^2/8\pi$，因此，根据(109)式，有

$$Q = \frac{\mathscr{W}^{(s)} + \mathscr{W}^{(a)}}{|\langle \boldsymbol{S}^{(i)}\rangle|} = 2\lambda^{(1)}\mathscr{I}\left(\frac{\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n}_0)}{\mathbf{e}^2}\right). \tag{110}$$

这个公式是由范德哈耳斯特 (van de Hulst)[1] 提出的。

人们可以用类似的方法来定义障碍物的散射截面 $Q^{(s)}$ 与吸收截面 $Q^{(a)}$：

$$Q^{(s)} = \frac{\mathscr{W}^{(s)}}{|\langle \boldsymbol{S}^{(i)}\rangle|}, \quad Q^{(a)} = \frac{\mathscr{W}^{(a)}}{|\langle \boldsymbol{S}^{(i)}\rangle|}, \tag{111}$$

显然，$Q = Q^{(s)} + Q^{(a)}$。对于无吸收的障碍物，$Q^{(a)} = 0$，因而消

---

1) H. C. van de Hulst, *Physica*, **15** (1949), 740. 这里所用的证明方法出自 D. C. Jones, *Phil. Mag.*, **46** (1955), 957. 对于原子碰撞，有一个类似的定理[参看 E. Feenberg, *Phys. Rev.*, **40** (1932), 48; M. Lax, *Phys. Rev.*, (2), **78** (1950), 306].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光截面等于散射截面.

在把(110)式应用于球形障碍物以前,让我们考虑一个觉察不到有入射光透过的障碍物的 Q 值. 还假定该障碍物的线度比波长大得多.在这种情况下,惠更斯-基尔霍夫理论适用,并且对向前散射的主要贡献来自夫琅和费衍射. 令 $\mathscr{A}$ 是入射到该障碍物上的线偏振波的平面波阵面的“阴影区”, $\mathscr{A}'$ 是其无障碍区(图13.12),并考虑远离该障碍物的一点 P 处的散射场 $\boldsymbol{E}^{(s)}$. 根据惠更斯-菲涅耳原理和巴俾涅原理[§ 8.3(21)式],如果衍射角很小,则

$$\boldsymbol{E}^{(s)} = \frac{i}{\lambda^{(1)}} \boldsymbol{e} \iint_{\mathscr{A}} \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} dS, \tag{112}$$

如果 P 在入射波传播方向(向前的方向)上离该障碍物很远, 则 r 可取作常数,由(112)式得出

$$\boldsymbol{E}^{(s)}(\boldsymbol{n}_0) = \frac{i}{\lambda^{(1)}} D \boldsymbol{e} \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}, \tag{113}$$

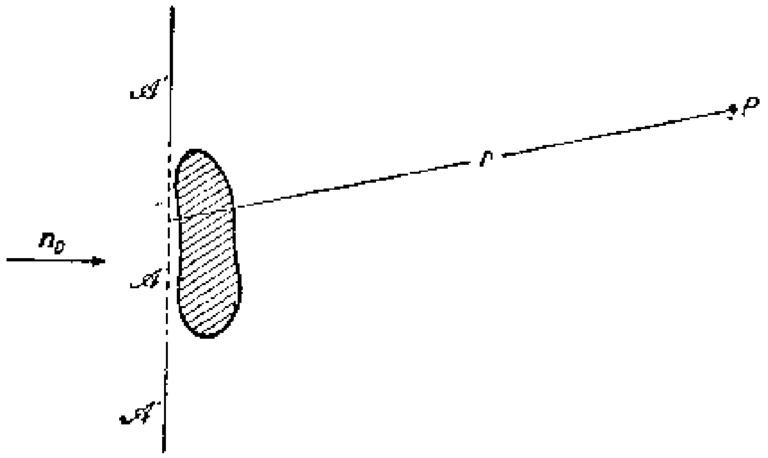


图 13.12 关于一个大障碍物消光截面的定理(114)式的图示

式中 D 是该障碍物的几何截面(面积 $\mathscr{A}$). 因此在这种情况下,(104)式中的矢量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n}_0)$ 由 $iD\boldsymbol{e}/\lambda^{(1)}$ 给出,并由(110)式得知,

$$Q = 2D. \tag{114}$$

因而一个大的不透明障碍物的消光截面等于其几何截面的两倍. 乍看起来,这个结果显得有点不合常理,因为人们也许曾预料,对于一个大的障碍物,几何光学近似可能适用,在这种近似中,消光

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

截面等于 D. 这一表观矛盾[1]的解释是,无论障碍物多么大,也无论所考虑的场离障碍物多么远,总有一个窄区——几何阴影边缘附近——在那里,几何光学近似是不成立的. 除了被截面为 D 的障碍物挡住(由反射和吸收而失去)的光以外,还有由阴影边缘附近引起的对于消光的附加贡献,显然,这个贡献也等于 D. 为了用实验证实(114)式,人们必须在足够宽阔的面积上且离障碍物足够远处把光收集起来[2].

现在,把一般公式(110)应用于一球形障碍物. 根据(58)式,对于向前散射 ($\theta=0$), 散射波在入射波的电矢量方向 ($\phi=0$) 上的振幅分量由下式给出:

$$(E_\theta^{(s)})_{\theta=\phi=0}=-\frac{1}{k^{(1)}}\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\Big\{{}^eB_l\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(1)}r)[P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta]_{\theta=0}$$
$$-i^m B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r)\left[P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\right]_{\theta=0}\Big\}. \qquad (115)$$

包含缔合勒让德函数的两项,不难由下述展开式算出[3]:

$$P_l^{(m)}(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(1-x^2)^{m/2}$$
$$\times\left\{1+c_1\left(\frac{1-x}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\cdots\right\}, \qquad (116)$$

式中 $c_1, c_2, \cdots$ 只取决于 l 和 m. 由(116)式和该式的微商,求出

---

1) 在量子力学的散射问题中,有一个类似的表观佯谬,首先由 H. S. W. Massey 和 C. B. O. Mohr 提出,见 *Proc. Roy. Soc.*, A, **141** (1933), 434.

2) 由导出引理(107)式的仔细分析得知, S 对 Ω 有可观贡献的部分,在 S 的中心张一数量级为 $(kR)^{-\beta}$ 的立体角, 其中 $1>\beta>4/5$ [参看 D. S. Jones, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48** (1952), 736].更详尽地讨论大障碍物的消光截面以及几何阴影区所起的作用, 见 D. Sinclair, *J. Opt. Soc. Amer.*, 37 (1947), 475 和 L. Brillouin, *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 1110.

3) 参看 W. Magnus and F. Oberhettinger, *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics* (New York, Chelsea Publishing Company, 1954), p. 54. 这些作者给出的公式与 (116) 式不同之处在于一个相乘因子 $(-1)^m$. 这种区别是由于他们使用了稍有不同的缔合勒让德多项式的定义(参看 869 页的脚注).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta}\right)_{\theta=0}&=\frac{1}{2}\,l(l+1),\\(P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta)_{\theta=0}&=-\frac{1}{2}\,l(l+1).\end{aligned}\right\}\tag{117}$$

把(117)代入(115)式，并对 $\zeta_l^{(1)}$ 和 $\zeta_l^{(1)\prime}$ 应用渐近逼近式(74)和(76)，得出

$$(E_\theta^{(s)})_{\theta=\phi=0}=\frac{1}{2k^{(1)}}\frac{e^{ik^{(1)}r}}{r}\sum_{l=1}^{\infty}(-i)^l l(l+1)[{}^eB_l+{}^mB_l].\tag{118}$$

记住已取入射场是具有单位振幅的 ($e^2=1$)，因此所要求的量 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n}_0)/\boldsymbol{e}^2$ 就是上式中 $e^{ik^{(1)}r}/r$ 所乘的式子；把它代入(110)式，并利用对任一复数 z 均成立的恒等式 $\mathscr{I}(z)\equiv\mathscr{R}(-iz)$，最后就得到用(62)式给出的系数 ${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 表示的球的消光截面的下述表达式：

$$Q=\frac{\lambda^{(1)2}}{2\pi}\mathscr{R}\sum_{l=1}^{\infty}(-i)^{l+1}l(l+1)[{}^eB_l+{}^mB_l],\tag{119}$$

式中 $\mathscr{R}$ 表示实部.

(b) 计算结果

现在扼要介绍关于球的总散射，总吸收和消光的主要计算结果.

§ 13.5.2 中已看到，当球远小于波长(瑞利散射)时，只需考虑第一个电分波.于是散射波的振幅与 $1/\lambda^{(1)2}$ 成正比，因此总散射与波长的四次方成反比. 如果计及更高的项，它们依赖于半径和物质常数，则总散射变成波长的一个很复杂的函数，并显出选择性[1]. 例如，在金的情况下，甚至很小的球也给出一个在 $\lambda=5500$ 埃附近的极大值(见图 13.13).

1) 1950 年 9 月观察到的现象提供了一个选择散射的有趣的例子，当时在欧洲很大一部分地区，太阳(还有月亮)看来是深蓝色的. 对"蓝"的和正常的太阳作光谱测量给出了引起这个现象的那一层的消光曲线，由此推断出蓝色是由烟雾的选择散射引起的，烟雾大概是由大小非常均匀的小油滴组成的，它们被风从阿耳伯塔 (Alberta) 燃烧的森林大火处带到上层大气中 [参看 R. Wilson, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **111** (1951), 478].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

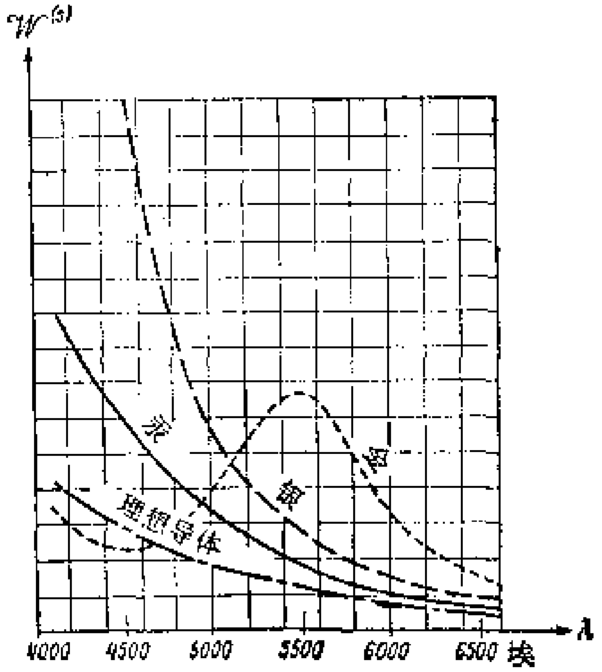


图 13.13 很小粒子 ($a\to 0$) 的总散射作为波长的函数
[引自 R. Feick, *Ann. d. Physik*, (4) 77 (1925), 582.]

这种极大值可解释为一种共振现象．设球不受入射光束场的影响，而作自由的电磁振荡．这种自由振动的频率和阻尼常数，根据理论在(56)式中略去那些不含系数 ${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 的项而得出．所得到的方程是线性和齐次的，并且只当满足相容性条件时才具有非平凡解．相容性方程的每一个解相应于一种有阻尼的固有振动，并且这些振动的频率与某些散射的分波所具有的强度极大值时的频率很贴切地符合[1]．

许多作者已对一些折射率值经过选择的有限半径的球的散射和消光进行过计算．大部分的计算与电介质球(n 为实数)和轻微吸收的球有关．图 13.14 中示出折射率 $n=1.33$ 的球的典型曲线，引自戈德伯格 (B. Goldberg)[2]．这是水的折射率，这个结果对于

---

1) R. W. Wood [*Phil. Mag.*, (6), **3** (1902), 396] 从碱金属的粒状膜和雾中观察过光的共振．
P. Debye, *Ann. d. Physik*, (4), **30** (1909), 73, 研究过球的固有振动．

2) H. Holl, *Optik*, **4** (1948), 173 和 H. G. Houghton and W. R. Chalker, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39** (1949), 955 也研究过这种情况．许多作者已发表过关于其他折射率值的类似曲线，例如： M. D. Barnes and V. K. La Mer, *J.*

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光透过霾、云和雾，以及对于威耳孙云室理论等，都是有意义的。可以看出，曲线具有一系列的极大值和极小值，并且随着半径的增大，消光截面趋近于几何截面的两倍，与(114)式符合。曲线还具有精细结构，即一些小的辅极大和极小。当然，如果散射是由许多大小不尽相同的球粒引起的，则这些微小涨落就被消除掉了。

对于具有其他折射率的电介质球，消光曲线显示出类似的特性。可以证明，如果 n 与 1 相差不太大，则所有的曲线在由 $2q(n-1)\sim 4$ 给出的 q 值处[1]都具有第一极大值，其中 Q 可与 $4\pi a^2$ 一样大。

对于完全反射的球[2] $(n\to\infty)$，求出消光曲线第一极大值在 $q=1.2$ 处，其中 $Q=2.29\pi a^2$，而第一极小值在 $q=1.6$ 处，其中 $Q=2.12\pi a^2$。此后稍有振荡，并且当 $q\to\infty$ 时，曲线趋于 $2\pi a^2$。

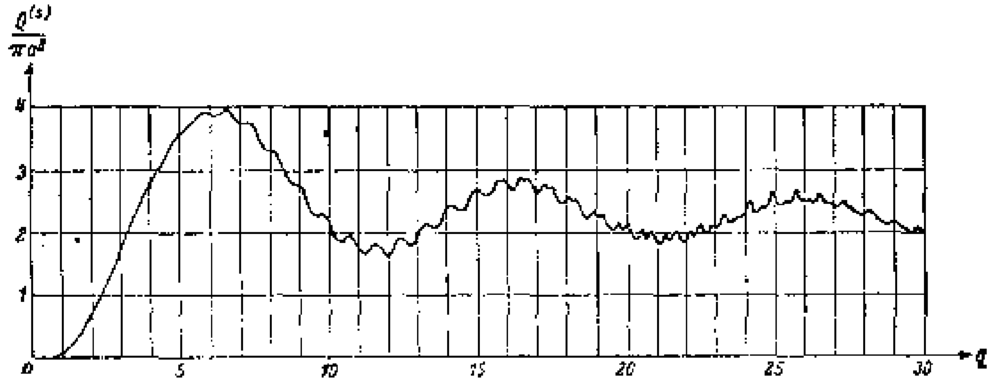


图 13.14 折射率 $n=1.33$ 的电介质球的散射截面作为参量 $q=2\pi a/\lambda^{(1)}$ 的函数 [引自 B. Goldberg, *J. Opt. Soc. Amer.*, **43** (1953), 1221.]

Col. Sci., **1** (1946), 79; M. D. Barnes, A. S. Kenyon, E. M. Zaiser, and V. K. La Mer 同上, **2** (1947), 349; J. L. Greenstein (Harvard circ., 1937, No. 422); H. C. van de Hulst, *Rech. Astr. Observ. Utrecht*, **11** Pt. 1(1946), 43-51 和他的书 *Light Scattering by Small Particles* (New York, J. Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1957), 第 13 章; R. Pendorf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **46** (1956), 1001.

1) 量 $2q(n-1)$ 表示一条光线沿直径穿过球时所经受的位相移动。这是一个有用的参量，并且，如果 n 与 1 相差不太大，则以它为自变量画出的消光曲线彼此很类似。

2) F. W. P. Götz, *Astr. Nachr.*, **255** (1935), 63 和 J. L. Greenstein (上述引文)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

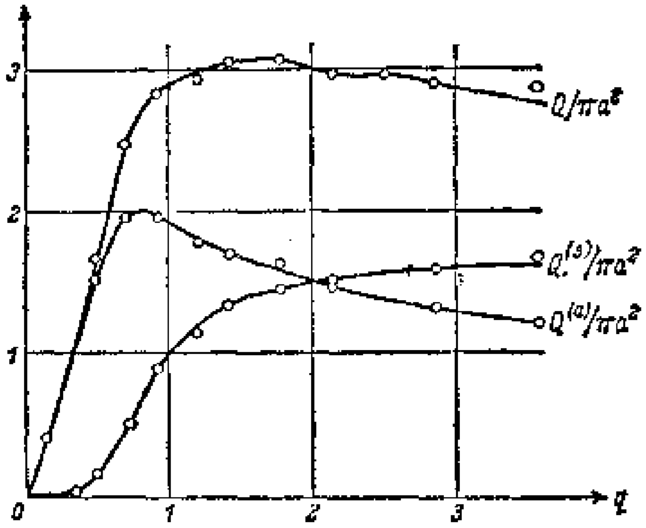


图 13.15 不同半径的铁球的吸收截面 ($Q^{(a)}$), 散射截面($Q^{(s)}$), 和消光截面 (Q). $\hat{n}=1.27+1.37i$, $\lambda^{(1)}=4200$ 埃 [根据 C. Schalén 的计算, *Uppsala Astr. Observ. Ann.*, **1** No. 9 (1945).]

关于吸收球的计算要艰巨得多，只有几种特殊情况曾详细研究过. 图 13.15 中画出很小的铁球散射、吸收和消光的曲线. 对于较大的球，可以用乔布斯特 (Jobst)[1] 提出的渐近公式来计算，这个公式根据米氏理论和柱函数的德拜渐近展开式得出. 范德哈耳斯特[2] 曾研究过弱吸收的球，我们在图 13.16 中画出他的计算结果. 在后面这一种情况下，可以看出消光曲线的一般特性与电介质球类似，但甚至很小的电导率就足以把小的起伏完全消除掉. 随着电导率再进一步增大，第一极小完全消失，并且消光曲线从原点渐近地上升到 2; 吸收曲线从原点渐近地上升到此值之半.

借助于观察被单一球粒或许多粒子(云状媒质，胶体溶液)散射的光，可以从实验上检验米氏理论. 当粒子较大时，这种检验较容易实现，但当每个粒子的直径具有波长的数量级或更小时，就相当困难了. 拉梅 (La Mer) 及其合作者[3] 根据来自水中的硫溶胶

1) G. Jobst, *Ann. d. Physik*, (4), **76** (1925), 863.
2) H. C. van de Hulst, *Rech. Ast. Observ. Utrecht*, **11** Part 2 (1949), 27.
3) M. D. Barnes and V. K. La Mer, *J. Col. Sci.*, **1** (1946), 79; M. D. Barnes, A. S. Kenyon, E. M. Zaiser, and V. K. La Mer, 同上, **2** (1947), 349; I. Johnson and V. K. La Mer, *J. Amer. Chem. Soc.*, **69** (1947), 1184.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

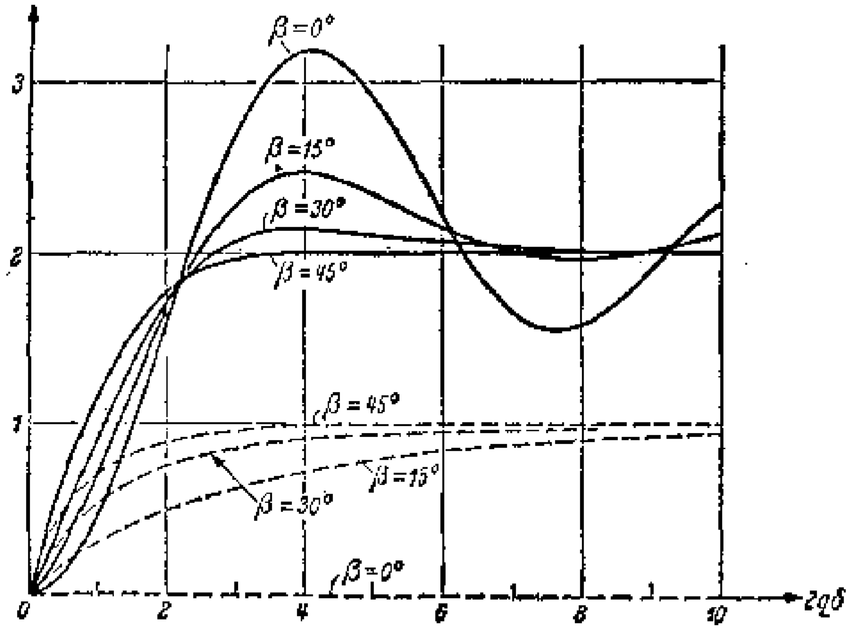


图 13.16 折射率 $\hat{n}=(1+\delta)+i\delta\tan\beta$ 的弱吸收球的消光曲线 $Q/\pi a^2$（实线）和吸收曲线 $Q^{(a)}/\pi a^2$（虚线），其中 δ 是实数并且比 1 小得多 [引自 H. C. van de Hulst, *Rech. Astr. Obs. Utrecht*, **11** Part 2(1949), 28.]

（粒子直径为 3000 埃到 5000 埃）的散射光角分布以及总散射的测量，成功地检验了此理论。使用了真空波长范围从 2850 埃到 10000 埃的光，发现了与米氏理论预期结果相当一致。在某些情况下，甚至观察到消光曲线的微小涨落（精细结构），（见图 13.14）。

某些作者曾考虑过光被非球状粒子散射，但一般地说，相应的波函数的解析性质复杂得多，因此严格解只有有限的实际值[1]。甘斯(Gans)[2] 和其他工作者讨论过电磁波被尺度明显小于波长的椭球散射；默格利希(Möglich)[3] 曾发表对任意大小的椭球的严格解。

---

1) 几位作者发展了近似方法。例如，见 R. W. Hart and E. W. Montroll, *J. Appl. Phys.*, **22** (1951), 376; E. W. Montroll and R. W. Hart, 同上, **22** (1951), 1278; E. W. Montroll and J. M. Greenberg, *Phys. Rev.*, **86** (1952), 889.

又见 C. J. Bouwkamp 的评述文章, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17** (1954), 35.

2) R. Gans, *Ann. d. Physik*, (4), **37** (1912), 881; 同上, **47**(1915), 270.

3) F. Möglich, *Ann. d. Physik*, (4), **83** (1927), 609.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

早在 1905 年，赛兹 (Seitz)[1] 和伊格纳托夫斯基 (Ignatowsky)[2] 就研究过从导电的长圆柱的散射，他们得到的公式类似于米氏关于球散射的那些公式。 夏弗 (Schaeffer) 和格罗斯曼 (Grossmann)[3] 研究过被电介质长圆柱散射和被高反射柱散射。

---

1) W. Seitz, *Ann. d. Physik*, (4), **16** (1905), 746; 同上, **19** (1906), 554.
2) W. v. Ignatowsky, *Ann. d. Physik*, (4), **18** (1905), 495.
3) C. Schaeffer and F. Grossmann, *Ann. d. Physik*, (4), **31** (1910), 455; 又见 H. C. van de Hulst, *Astrophys. J.*, **112** (1950), 1.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第十四章 晶体光学

§14.1 各向异性媒质的介电张量

记住我们的光学理论是建立在两个明显不同的基础上的，一方面是麦克斯韦方程§1.1(1)和(2)式，另一方面是物质方程，在各向同性媒质情况下，后者已由§1.1(9)—(11)式给出. 研究晶体时，必须推广这后一个方程组，以便将各向异性考虑在内. 在本章大部分内容中，假定媒质是均匀的，不导电（$\sigma=0$）的和磁各向同性的[1]，但允许是电各向异性的，即所考虑的物质的电激发依赖于电场方向. 因此，矢量 $\boldsymbol{D}$ 一般不再在矢量 $\boldsymbol{E}$ 的方向上. 代替§1.1(10)式，假定 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系式具有能说明各向异性情况的最简单形式，即其中 $\boldsymbol{D}$ 的各个分量与 $\boldsymbol{E}$ 的各个分量有线性关系：

$$\left.\begin{aligned}D_x&=\varepsilon_{xx}E_x+\varepsilon_{xy}E_y+\varepsilon_{xz}E_z,\\D_y&=\varepsilon_{yx}E_x+\varepsilon_{yy}E_y+\varepsilon_{yz}E_z,\\D_z&=\varepsilon_{zx}E_x+\varepsilon_{zy}E_y+\varepsilon_{zz}E_z.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

ε_{xx}, ε_{yy}, $\cdots$ 等九个量都是媒质常数，组成介电张量；因此，矢量 $\boldsymbol{D}$ 是这个张量与 $\boldsymbol{E}$ 的积.

将(1)式写成较简短的形式如下：

$$D_k=\sum_l \varepsilon_{kl}E_l,\tag{2}$$

式中 k 代表三个指标 x, y 和 z 之一，l 代表在求和时依次为 x, y

---

1) 也有磁晶体，但因磁化对于光学现象（快速振荡）的影响很小，所以磁各向异性可以忽略. 然而，仍保留磁导率并用标量 μ 表示，以便在公式中保持某种对称性，并且包括弱磁晶体；此外，保留 μ 可简化在真空里 μ 不等于 1 的单位系中的方程表述.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

和 z. 在形式张量记号法中将省略求和号,积中两处出现指标 l 应理解为对所有的 l 求和. 然而,我们将保留求和号,因这将有助于不熟悉张量计算的读者避免任何模糊之处.

假定电能密度和磁能密度的表达式 § 1.1(31)仍然有效. 因而

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{8\pi} \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} E_l, \tag{3}$$

和

$$w_m = \frac{1}{8\pi} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{1}{8\pi} \mu H^2. \tag{4}$$

我们也保留坡印廷矢量或称"光线矢量"的定义 § 1.1(38)式:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \tag{5}$$

并研究这些定义是否与能量守恒原理相符.

同 § 1.1.4 中一样, 把麦克斯韦方程第一式乘 $\boldsymbol{E}$, 第二式乘 $\boldsymbol{H}$, 并利用矢量恒等式 § 1.1(27),则有

$$\begin{aligned} -c\,\mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{B}} \\ &= \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu H^2). \end{aligned} \tag{6}$$

如果在这个方程两边都除以 4π, 则右边第二项代表每单位体积的磁能变化率,但第一项并不代表电能密度的变化率,除非

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} \dot{E}_l = \frac{dw_e}{dt} = \frac{1}{8\pi} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} (E_k \dot{E}_l + E_l \dot{E}_k), \tag{7}$$

即

$$\sum_{kl} \varepsilon_{kl} (E_k \dot{E}_l - \dot{E}_k E_l) = 0$$

成立. 附标 k 和 l 都是傀标; 二者遍取同样的 (x, y, z) 值. 因此,当第二项中交换 k 和 l 时,表达式不改变. 这就导至

$$\sum_{kl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{lk}) E_k \dot{E}_l = 0.$$

因不论场的数值如何,此式必成立,由此得出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}. \tag{8}$$

这意味着介电张量必定是对称的；它只有六个而不是九个独立的分量．反之，条件(8)足以保证(7)式有效，并得出微分形式的能量定理[“流体动力学连续性方程”§ 1.1(43)式]:

$$-\operatorname{div}\boldsymbol{S} = \frac{dw}{dt}, \quad (w = w_e + w_m). \tag{9}$$

张量 ε 的对称性使得它有可能把电能 w_e 的表达式简化为只含场各分量的平方而不含它们的积的形式． 在 x, y, z 空间中，考虑二次曲面

$$\varepsilon_{xx}x^2 + \varepsilon_{yy}y^2 + \varepsilon_{zz}z^2 + 2\varepsilon_{yz}yz + 2\varepsilon_{xz}xz + 2\varepsilon_{xy}xy = \text{常数}. \tag{10}$$

因为如果用 $\boldsymbol{E}$ 的分量代替 x, y 和 z，则上式变成等于 $8\pi w_e$，并且能量 w_e 对于任何场矢量值都必为正值，所以(10)式左边必为正定二次型．因此(10)式代表一个椭球．椭球总能变换到它的主轴上；因而存在一个固定于晶体中的坐标系，使得椭球方程为

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = \text{常数}. \tag{11}$$

在这个主介电轴系中，物质方程和电能表达式取下述简单形式:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2) \\ &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

ε_x, ε_y, ε_z 称为主介电常数(或主电容率)． 由这些公式立即可看出 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 将具有不同的方向，除非 $\boldsymbol{E}$ 与主轴之一的方向重合，或主介电常数都相等；在后一种情况($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$)中，椭球退化为球．

这里必须加上关于色散效应的一段注解．正如各向同性物质的情况中介电常数不是物质常数而依赖于频率一样，各向异性媒质中也如此，介电张量的六个分量 ε_{kl} 也将随频率而变． 结果不

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

仅主介电常数 ε_x, ε_y, ε_z 的数值而且主轴的方向都会改变。这种现象称为轴色散。然而它只能在这样的晶体中出现，其中结构的对称性不能确定三个一组优先的正交方向，即它只能在单斜系和三斜系中才观察到(参看 § 14.3.1)[1].

如果限于单色波，则可以不考虑色散；因此 ε_{kl} 各量是只取决于媒质的常数.

§ 14.2 在各向异性媒质中单色平面波的结构

§ 14.2.1 相速度和光线速度

在角频率 $\omega=2\pi\nu$ 并以速度 c/n 沿单位波法线 $\boldsymbol{s}$ 方向传播的单色平面波中，矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都按复数表示法与 $\exp\left[i\omega\left(\frac{n}{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})-t\right)\right]$ 成正比。后面即将谈到，除了相(或波法线)速度 c/n 外，还必须引入光线(或能量)速度，因为将会看到，在各向异性媒质中，能量一般是以一个不同的速度沿着一个不同于波法线的方向传播的.

在这种振荡场中，算符 $\partial/\partial t$ 总是等价于乘以 $-i\omega$，而算符 $\partial/\partial x$ 等价于乘以 $i\omega n s_x/c$。特别是

$$\dot{\boldsymbol{E}}=-i\omega\boldsymbol{E},\qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{E}=i\omega\frac{n}{c}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}. \tag{1}$$

对于不含电流的区域，麦克斯韦方程

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}=0,\qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}=0, \tag{2}$$

变为

$$n\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{D},\qquad n\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{3}$$

式中已用到关系式 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$. 在(3)的两式之间消去 $\boldsymbol{H}$，并利用

---

1) 这种色散现象在红外特别显著：参看 Th. Liebisch and H. Rubens, *Sitzber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.* (1919), 198, 876. H. Rubens, 同上, 976.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

熟知的矢量恒等式，得出

$$\boldsymbol{D}=-\frac{n^2}{\mu}\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E})=\frac{n^2}{\mu}[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E})]=\frac{n^2}{\mu}\boldsymbol{E}_\perp,\quad(4)$$

式中 $\boldsymbol{E}_\perp$ 表示在 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的平面内 $\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{s}$ 的矢量分量(见图14.1)。

由(3)式看出，矢量 $\boldsymbol{H}$(因而还有 $\boldsymbol{B}$)与 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 均垂直，因此后三者必共面。又看到 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 正交。因而同前，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 横截传播方向 $\boldsymbol{s}$，但 $\boldsymbol{E}$ 不然。图 14.1 示出这些矢量的相对方向，此外还有在光线矢量 $\boldsymbol{S}$ 方向上的单位矢量，用 $\boldsymbol{t}$ 表示，它垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 之间的夹角与 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 之间的夹角相同，用 α 表

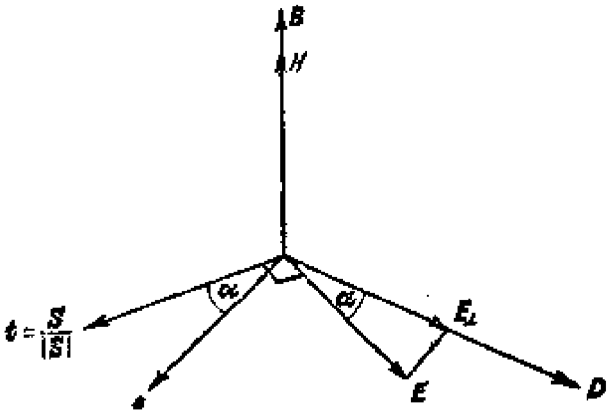


图 14.1 在电各向异性媒质中，波法线，场矢量和能流的方向

示。我们看到，一方面 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{s}$，另一方面 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{t}$，都构成三个一组的正交矢量，这两组有一个共同的矢量 $\boldsymbol{H}$，彼此相对转过角度 α。一个重要的结论是，在晶体中，能量一般不沿波法线方向传播。另一方面，电能密度等于磁能密度的定理仍然有效。这是由(3)式得出的，因为[1)]

$$\left.\begin{aligned}w_e&=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=-\frac{n}{8\pi}\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H}),\\ w_m&=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}=\frac{n}{8\pi}(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H},\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

1) 因现在讨论场变量的二次函数，所以在(5)和(6)式中的是场的实矢量，而不是相伴的复矢量(参看上册 §1.3, 33—34 页)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

根据熟知的成标三重积的特性，这些方程的右边彼此相等. 而且它们都等于 $n(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{s}/8\pi$，因此总能密度 $w=w_e+w_m$ 为

$$w=\frac{n}{c}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}. \tag{6}$$

我们必须区别相速度和能量输运速度. 前者，相速度是在单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 的方向上的，其数值为

$$v_p=\frac{c}{n}. \tag{7}$$

后者，光线速度是在与坡印廷矢量 S 同一方向上的，即在单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 的方向上. 它的数值 v_r 等于单位时间内通过垂直于能流方向的面积的能量除以每单位体积的能量. 按照能量定理 § 14.1(9)式，v_r 由下式给出，

$$v_r=\frac{S}{w}. \tag{8}$$

由(6)，(7)和(8)式得出，

$$v_p=v_r\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{s}=v_r\cos\alpha. \tag{9}$$

即相速度是光线速度在波法线方向上的投影.

应当注意，由坡印廷矢量导出的光线速度，也同坡印廷矢量一样带有一定程度的任意性(参看上册 § 1.1，24 页). 然而它还是一个有用的概念，尽管它象相速度一样没有可直接检验的物理意义.

如果 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是已知的 [例如规定 $\boldsymbol{E}$，而 $\boldsymbol{D}$ 通过 § 14.1(1)式由 $\boldsymbol{E}$ 确定]，则折射率 n 和波法线 $\boldsymbol{s}$ 由此也确定了. 首先，因 $\boldsymbol{E}_\perp$ 是 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 方向的矢量分量，

$$\boldsymbol{E}_\perp=\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{D}}{D}\right)\frac{\boldsymbol{D}}{D}, \tag{10}$$

所以由(4)式给出

$$n^2=\frac{\mu D}{\boldsymbol{E}_\perp}=\frac{\mu D^2}{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})}. \tag{11}$$

再者，因单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 垂直于 $\boldsymbol{D}$，且与 $\boldsymbol{D}$ 及 $\boldsymbol{E}$ 共面，所以它可表示为下述形式:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$s=\frac{E-E_{\parallel}}{|E-E_{\parallel}|}=\frac{E-\dfrac{(E\cdot D)D}{D^2}}{\sqrt{E^2-\dfrac{(E\cdot D)^2}{D^2}}}$$

$$=\frac{D^2E-(E\cdot D)D}{\sqrt{D^2[E^2D^2-(E\cdot D)^2]}}. \tag{12}$$

从折射率（refractive index）n 类推，也可利用下式定义光线折射率（ray index）或能量折射率（energy index）n_r：

$$n_r=\frac{c}{v_r}. \tag{13}$$

利用(7)和(9)式，则有

$$n_r=n\cos\alpha. \tag{14}$$

现在将证明光线折射率 n_r 和能量传播方向上的单位矢量 t 由类似于(11)和(12)的公式给出。由(14)，(11)和关系式 $E\cdot D=ED\cos\alpha$，得出

$$n_r^2=\frac{\mu(E\cdot D)}{E^2}. \tag{15}$$

单位矢量 t 垂直于 E，且与 E 及 D 共面，因此它必由(12)式中交换 E 和 D 所得的公式给出(或许除了符号以外)。所以

$$-t=\frac{E^2D-(E\cdot D)E}{\sqrt{E^2[E^2D^2-(E\cdot D)^2]}}. \tag{16}$$

左边的负号保证 s 和 t 指向 E 和 D 的同一侧，如图 14.1 所示。

当 E 和 D 的方向重合，即 E 在晶体主轴之一的方向上时，(12)和(16)式都化为 0/0。这是可以预料到的，因为这时 s 和 t 的方向除了必须垂直于 E 外，并未确定。

也可以用 E 和 D 表示坡印廷矢量的大小。根据(8)，(13)和(15)式，又记住对于平面波，$w=2w_e$，得出

$$S=v_rw=\frac{c}{n_r}\frac{E\cdot D}{4\pi}=\frac{c}{4\pi\sqrt{\mu}}E\sqrt{E\cdot D}, \tag{17}$$

可以看出，在各向同性媒质的情况中，上式与 § 1.4(8)和(9)式一致。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 14.2.2 光在晶体中传播的菲涅耳公式

§ 14.2.1 导出的公式只是麦克斯韦方程的结果，因此与媒质的特性无关. 现在将这些公式与物质方程 § 14.1(1)式结合起来.

我们将采用坐标轴与主介电轴重合的坐标系. 于是§ 14.1(1)式化为较简单的 § 14.1(12)式，用此式代替(4)式中的 $\boldsymbol{D}$，得出

$$\mu\varepsilon_k E_k = n^2[E_k - s_k(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s})],\ (k=x,y,z). \tag{18}$$

(18)式是 E_x，E_y 和 E_z 的三个齐次线性方程，仅当相伴的行列式为零时，这些分量的非零值才能满足(18)式. 这意味着折射率 n，矢量 $\boldsymbol{s}(s_x, s_y, s_z)$ 和主介电常数 ε_x，ε_y，ε_z 必须满足某个关系式. 把(18)式写成下述形式

$$E_k = \frac{n^2 s_k(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s})}{n^2-\mu\varepsilon_k}, \tag{19}$$

再乘以 s_k，然后把得到的三个方程相加，就可导出上述关系式；把此式除以公因子 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s}$，得出

$$\frac{s_x^2}{n^2-\mu\varepsilon_x}+\frac{s_y^2}{n^2-\mu\varepsilon_y}+\frac{s_z^2}{n^2-\mu\varepsilon_z}=\frac{1}{n^2}. \tag{20}$$

这个公式可表示成稍有不同的形式. 把(20)式两边都乘以 n^2，并减去 $s_x^2+s_y^2+s_z^2=1$，然后把所得表达式乘以 $-n^2$，得出

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_x}}+\frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_y}}+\frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_z}}=0. \tag{21}$$

我们用下式定义三个**主传播速度**[1]

$$v_x=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_x}},\qquad v_y=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_y}},\qquad v_z=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_z}}. \tag{22}$$

相速度 v_p 用(7)式时，(19)和(21)式取下述形式：

$$E_k=\frac{v_k^2}{v_k^2-v_p^2}s_k(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s}),\ (k=x,y,z), \tag{23}$$

---

1) 注意：v_x，v_y，v_z 不是一个矢量的各个分量，它们只是根据主轴来定义的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2} + \frac{s_y^2}{v_p^2 - v_y^2} + \frac{s_z^2}{v_p^2 - v_z^2} = 0. \tag{24}$$

(20)，(21)和(24)式是波法线的菲涅耳方程的几种等价形式。这是 v_p^2 的二次方程，把(24)式乘以式中各分母的积即可看出。因而，相应于每一个方向 $\boldsymbol{s}$，有两个相速度 v_p（与任一 v_p^2 值相应的两个值 $\pm v_p$ 算作一个，因为此负值显然属于相反的传播方向 $-\boldsymbol{s}$）。对于这两个 v_p 值中的每一个，由(23)式就可解出比值 $E_x:E_y:E_z$；关于 $\boldsymbol{D}$ 矢量的相应比值可接着由§14.1(12)式得出。因为这些比值为实值，所以 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 场都是线偏振的。因此得出下述重要结果：各向异性媒质的结构容许两个单色平面波在任一给定方向上传播，它们具有两种不同的线偏振和两个不同的速度。后面将证明，相应于一个给定的传播方向 $\boldsymbol{s}$，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的两个方向是互相垂直的。

现在证明对于光线速度 v_r 也有一个类似的公式。首先证明有一个与(4)式类似的关系式，其中 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 以及 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的地位互换，就最容易完成此任务。方便的做法是引入矢量 $\boldsymbol{D}_\perp$，定义为在 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的平面内 $\boldsymbol{D}$ 垂直于 $\boldsymbol{t}$ 的矢量分量。它显然由下式给出：

$$\boldsymbol{D}_\perp = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{t}). \tag{25}$$

因电矢量也垂直于 $\boldsymbol{t}$，且与 $\boldsymbol{D}$ 及 $\boldsymbol{t}$ 共面（见图14.1），所以 $\boldsymbol{D}_\perp$ 平行于 $\boldsymbol{E}$，因此还可以表示成下述形式：

$$\boldsymbol{D}_\perp = \left(\boldsymbol{D}\cdot\frac{\boldsymbol{E}}{E}\right)\frac{\boldsymbol{E}}{E} = \frac{n_r^2}{\mu}\boldsymbol{E}, \tag{26}$$

式中已用到(15)式。由(25)和(26)式得出

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu}{n_r^2}[\boldsymbol{D} - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{t})] = \frac{\mu}{n_r^2}\boldsymbol{D}_\perp. \tag{27}$$

此式类似于(4)式，它可以形式上由(4)式互换 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$，n 和 $\frac{1}{n_r}$，μ 和 $\frac{1}{\mu}$，以及 $\boldsymbol{s}$ 和 $-\boldsymbol{t}$ 的地位而得出。由基本方程得出下述很普遍的对偶规则，把各个变量排成两行如下：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{t}, \quad c, \quad \mu, \quad v_p, \quad n, \quad \varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \\ \boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{E}, \quad -\boldsymbol{t}, \quad -\boldsymbol{s}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{v_r}, \quad \frac{1}{n_r}, \quad \frac{1}{\varepsilon_x}, \quad \frac{1}{\varepsilon_y}, \quad \rightarrow \\ \qquad \varepsilon_z, \quad v_x, \quad v_y, \quad v_z, \\ \rightarrow \frac{1}{\varepsilon_z}, \quad \frac{1}{v_x}, \quad \frac{1}{v_y}, \quad \frac{1}{v_z}.\end{array}\right\} \tag{28}$$

如果任一关系式在某一行的诸量间成立，式中各量用另一行中相应的量代替，则可得出另一个有效的关系式.

把这个规则应用于波法线的菲涅耳方程(24)，就立即得出所要求的光线方程

$$\frac{t_x^2}{\frac{1}{v_r^2}-\frac{1}{v_x^2}}+\frac{t_y^2}{\frac{1}{v_r^2}-\frac{1}{v_y^2}}+\frac{t_z^2}{\frac{1}{v_r^2}-\frac{1}{v_z^2}}=0. \tag{29}$$

当然,也可以把这个方程表示为类似于(20)和(21)式的形式. 象(24)式一样,这也是一个二次方程，它对于每一个光线方向 $\boldsymbol{t}(t_x, t_y, t_z)$，给出两个可能的光线速度 v_r. 以适当的 v_r 值解与(23)式对偶的方程,即

$$D_k=-\frac{v_r^2}{v_k^2-v_r^2} t_k(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{t}), \quad (k=x, y, z), \tag{30}$$

就可以得出相应的 $\boldsymbol{D}$ 方向. 然后,利用 § 1.4.1(12)式就可以得出两个 $\boldsymbol{E}$ 矢量的方向(如前所述,它们都与 $\boldsymbol{t}$ 正交).

通常只给出矢量 $\boldsymbol{s}$ 或 $\boldsymbol{t}$ 中的一个,因此希望导出可直接计算另一个的关系式. 由图 14.1，有

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{s}=E_{\perp} \tan \alpha, \quad \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{t}=-D \sin \alpha. \tag{31}$$

而由(4)式，$D=n^2 E_{\perp}/\mu$. 因此

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{t}=-\frac{n^2}{\mu} E_{\perp} \sin \alpha=-\frac{n^2}{\mu} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{s} \cos \alpha=-\frac{1}{\mu} \frac{c^2}{v_p v_r} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{s}, \tag{32}$$

式中已用到(9)和(7)式. 把(32)式代入(30)式,给出

$$D_k=\varepsilon_k E_k=\frac{1}{\mu} \frac{c^2 v_r}{v_p\left(v_k^2-v_r^2\right)} t_k(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{s}). \tag{33}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

比较(33)和(23)式，并记住 $\mu\varepsilon_k v_k^2 = c^2$，得出

$$\frac{v_p s_k}{v_k^2 - v_p^2} = \frac{v_r t_k}{v_k^2 - v_r^2}. \tag{34}$$

对 t_k 求解

$$t_k = \frac{v_p}{v_r}\frac{v_k^2 - v_r^2}{v_k^2 - v_p^2} s_k, \tag{35}$$

因此

$$v_r t_k - v_p s_k = v_p s_k \frac{v_r^2 - v_p^2}{v_p^2 - v_k^2}. \tag{36}$$

把(36)的三个方程平方并相加，利用 § 14.2 (9) 式，即 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{t} = v_p/v_r$，得出

$$v_r^2 - v_p^2 = v_p^2(v_r^2 - v_p^2)^2\left[\left(\frac{s_x}{v_p^2 - v_x^2}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{v_p^2 - v_y^2}\right)^2 + \left(\frac{s_z}{v_p^2 - v_z^2}\right)^2\right]. \tag{37}$$

因此可以定义

$$g^2 = v_p^2(v_r^2 - v_p^2) = \frac{1}{\left(\frac{s_x}{v_p^2 - v_x^2}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{v_p^2 - v_y^2}\right)^2 + \left(\frac{s_z}{v_p^2 - v_z^2}\right)^2}. \tag{38}$$

此式用 $\mathbf{s}$ 表示 v_r，因根据菲涅耳方程(24)，v_p 已通过 $\mathbf{s}$ 得知。这样确定 v_r，于是(35)式就给出单位光线矢量 $\mathbf{t}$ 作为 $\mathbf{s}$ 的函数。利用 g 的表达式，(35)式可写成

$$t_k = \frac{s_k}{v_p v_r}\left(v_p^2 + \frac{g^2}{v_p^2 - v_k^2}\right), \quad (k = x, y, z). \tag{39}$$

因为相应于每一个 $\mathbf{s}$ 一般有两个相速度 v_p，所以对于每一个波法线方向，一般也有两个光线方向[1]。然而在某些晶体(双轴晶体——参看 § 14.3.1)中有两个奇异方向是由于(39)式中分母为零引起的，相应于其中每一个方向都有数目无限的光线；还有两个奇

1) M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933), pp. 235—237 中，对于双轴晶体情况，详细研究过相应于一条给定波法线的诸光线的位置。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

异光线方向，相应于其中每一个都有数目无限的波法线方向。这些特殊情况产生一种有趣的现象（锥形折射），将在§14.3.4中研究。

§14.2.3 确定传播速度和振动方向的几何作图

关于相速度、光线速度和振动方向的很多结果都可利用某些几何作图来说明。

(a) 波法线椭球

根据§14.1(13)式，在一给定的能量密度 $w=2w_e$ 处，矢量 $\boldsymbol{D}$ 的各个分量满足下述关系式：

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x}+\frac{D_y^2}{\varepsilon_y}+\frac{D_z^2}{\varepsilon_z}=C,\quad (C=8\pi w_e=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}). \tag{40}$$

用 x, y, z 代替 $D_x/\sqrt{C}$, $D_y/\sqrt{C}$, $D_z/\sqrt{C}$，并把它们看作空间的笛卡儿坐标，于是

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x}+\frac{y^2}{\varepsilon_y}+\frac{z^2}{\varepsilon_z}=1. \tag{41}$$

这个方程代表一个椭球，它的半轴等于主介电常数的平方根，并与主介电轴的方向重合。我们称这个椭球为波法线椭球，它比广泛使用但颇为含糊的术语"光折射椭球"（optical indicatrix）（也称为折射率椭球或倒易椭球）要优越。

利用波法线椭球，可求出属于一个给定的波法线方向 $\boldsymbol{s}$ 的两个相速度 v_p 和两个 $\boldsymbol{D}$ 振动方向如下：画一个过原点垂直于 $\boldsymbol{s}$ 的平面。这个平面与椭球的截线是一个椭圆；这个椭圆的主半轴与相速度的倒数 $1/v_p$ 成正比，它们的方向与矢量 $\boldsymbol{D}$ 相应的振动方向重合（图 14.2）。

为了得出这个结果，考虑用来规定此椭圆的两个方程：

$$xs_x+ys_y+zs_z=0, \tag{42}$$

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x}+\frac{y^2}{\varepsilon_y}+\frac{z^2}{\varepsilon_z}=1. \tag{43}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因为根据定义，椭圆的主轴就是它的最短和最长的直径，所以在(42)和(43)式的条件下求出

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{44}$$

的极值就能确定这两个主轴．我们利用拉格朗日待定因子法[1]来做到这一点．引入两个因子 $2\lambda_1$ 和 λ_2，并作函数

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_1(xs_x + ys_y + zs_z) + \lambda_2\left(\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} - 1\right). \tag{45}$$

于是我们的问题等价于无附加条件求 F 的极值．F 的极值必要条件是它对 x，y 和 z 的微商均为零，即

$$x + \lambda_1 s_x + \frac{\lambda_2 x}{\varepsilon_x} = 0,\quad y + \lambda_1 s_y + \frac{\lambda_2 y}{\varepsilon_y} = 0,$$

$$z + \lambda_1 s_z + \frac{\lambda_2 z}{\varepsilon_z} = 0. \tag{46}$$

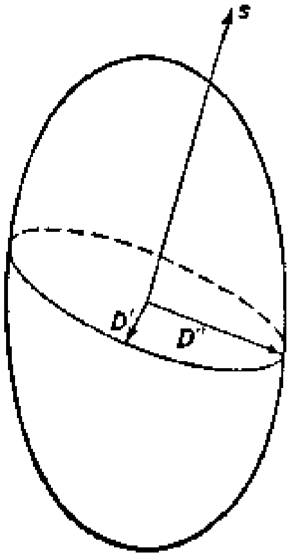


图 14.2　波法线椭球．属于一条波法线 s 的 D 矢量振动方向的作图法

将这些方程分别乘以 x，y，和 z，再相加，由(42)和(43)式，得出：

$$r^2 + \lambda_2 = 0. \tag{47}$$

其次，将(46)各方程分别乘以 s_x，s_y 和 s_z，再相加，又用到(42)式．由此得出

$$\lambda_1 + \lambda_2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z}\right) = 0. \tag{48}$$

把(47)和(48)式求出的 λ_1 和 λ_2 代入(46)式，给出

$$x\left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon_x}\right) + s_x r^2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z}\right) = 0, \tag{49}$$

以及两个类似的方程．对于一个给定的 s，它们是三个 x，y，z 的齐次方程．它们仅当相伴行列式为零时才相容；这个条件给出 r^2

1) 这种方法的充分阐述，例如见 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. II (London, Blackie & Son, Ltd., 1942), pp. 188—199.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的一个代数方程．现在马上可以看出，(49)式与(18)式不同之处仅在于记法．因为如果用 $D_x/\sqrt{C}$ 代替 x，用 $E_x/\sqrt{C}$ 代替 x/ε_x，用 $\boldsymbol{D}^2/C=\boldsymbol{D}^2/\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=n^2/\mu$ 代替 r^2［根据(11)式］，则(49)式变为

$$\mu D_x=n^2[E_x-s_x(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s})], \tag{50}$$

上式与两个类似的方程合在一起，与(18)式相同．

因此，我们求出 $n=c/v_p$ 的行列式方程的根(已看到 n 为二次)与垂直于 $\boldsymbol{s}$ 的椭圆截面半轴长度 r 成正比，而且矢量 $\boldsymbol{D}$ 的两个可能方向 $x:y:z$ 与这些轴的方向重合．因为椭圆两轴相互垂直，所以得出重要结果：相应于一个给定的传播方向 $\boldsymbol{s}$ 的两个矢量 $\boldsymbol{D}$ 的振动方向是相互垂直的．下面将用 $\boldsymbol{D}'$ 和 $\boldsymbol{D}''$ 来表示相应于一个特定的波法线方向 $\boldsymbol{s}$ 的两个 $\boldsymbol{D}$ 方向；这样，$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{D}'$ 和 $\boldsymbol{D}''$ 就构成三个一组相互正交矢量．

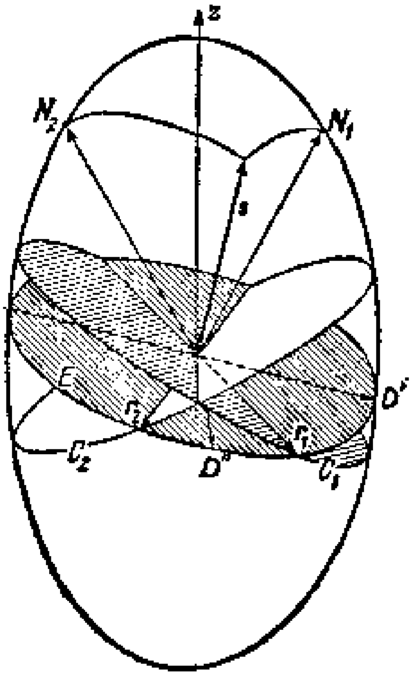


图 14.3 确定振动平面 $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{D}')$ 和 $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{D}'')$ 的作图法

在传播方向与波法线椭球的主轴之一例如 x 轴重合的特殊情况下，根据我们的作图法，r 的极值等于另外两个半轴的长度，即等于 $\sqrt{\varepsilon_y}$ 和 $\sqrt{\varepsilon_z}$．但我们已知 r 的极值也等于 $n/\sqrt{\mu}=c/v_p\sqrt{\mu}$．因此，沿主介电轴 x 方向传播的波的相速度等于 $c/\sqrt{\mu\varepsilon_y}$ 和 $c/\sqrt{\mu\varepsilon_z}$，即等于由(22)式形式上引入的主传播速度 v_y 和 v_z．当然，对于沿另外两个轴的方向传播，相应的结果也成立．

还有另一种作图法，可确定振动的方向．大家知道，椭球有两个通过中心的圆截面 C_1 和 C_2，并且这些截面的法线 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 与椭球最长和最短的主轴(z 和 x)共面．这两个方向 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 称为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光轴(optic axis)[1],以后(§ 14.3.3)将详加讨论. 因为截面 C_1 和 C_2 是圆(半径也相同),所以 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 方向具有下述特性: 沿着它们传播的速度只有一个, 因此 $\boldsymbol{D}$ 可取垂直于 $\boldsymbol{s}$ 的任何方向. 设 E 是通过中心并与任意的单位法线 $\boldsymbol{s}$ 垂直的椭圆截面. 这个平面与圆 C_1 和 C_2 相交于两个径向矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 处, 它们长度相等, 因此应与 E 的主轴夹角相等(见图 14.3 和 14.4). 所以,所要求的振动方向是 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 方向的等分线. 但 $\boldsymbol{r}_1$ 垂直于 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{s}$, 因此垂直于含 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的平面;同样, $\boldsymbol{r}_2$ 垂直于含 $\boldsymbol{N}_2$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的平面. 如果这些平面与椭圆 E 相交于矢量 $\boldsymbol{r}_1'$ 和 $\boldsymbol{r}_2'$ 处, 则椭圆的主轴也应是 $\boldsymbol{r}_1'$ 和 $\boldsymbol{r}_2'$ 方向的等分线. 由此得出,电位移的振动平面, 即含 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{D}'$ 或 $\boldsymbol{D}''$ 的平面,是 $(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{s})$ 和 $(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{s})$ 平面[2] 之间夹角的内或外等分面. 正如所料,当 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{N}_1$ 或 $\boldsymbol{N}_2$ 的方向重合时, 这种作图就变得不确定了.

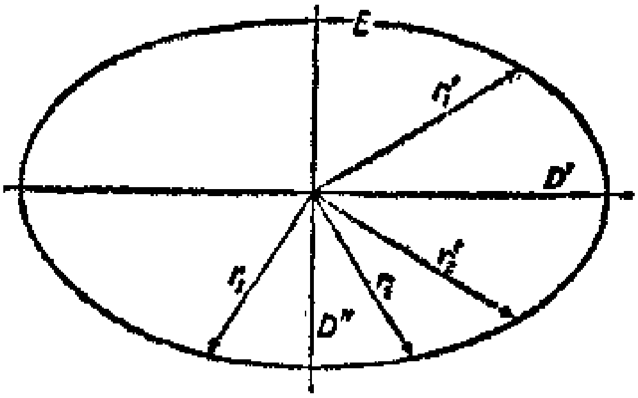


图 14.4　图 14.3 的平面 E

(b)　光线椭球

如果按照对偶规则(28),从光线椭球

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1 \qquad (51)$$

出发,就可以用同波法线一样的方法处理光线. 特别是,这个椭球垂直于光线方向 $\boldsymbol{t}$ 的中央截面是一个椭圆, 它的半轴长度正比于

1) 更确切地说, 应称为波法线的光轴. 光线椭球 [见本页(b)] 的相应方向定义为光线光轴.

2) 本章全用 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 来表示含矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的平面.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

两个相应的光线速度 v_r，并取在电矢量的两个容许的方向 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}''$ 上。因此，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}''$ 构成三个一组相互正交的矢量。

(c) 法线面和光线面

设想以晶体内部一固定点 O 作为原点，在同一方向 $\boldsymbol{s}$ 上画两个矢量，其长度与两个相应的相速度成正比。随着 $\boldsymbol{s}$ 取所有可能的方向，上述矢量的端点就形成一个有两层外壳的曲面，称为**波法线面**，或简称**法线面**。

同样，从一固定原点画出在所有的方向 $\boldsymbol{t}$ 上长度正比于相应光线速度的位置矢量，其端点就形成一个双叶的曲面，称为**光线面**。

这两种曲面比我们刚讨论过的椭球更为复杂。由(24)和(29)式可以证明，光线面是四次曲面，法线面是六次曲面[1]。这两个曲面之间存在一个重要的关系，现在将把它推导出来。

已经看到，如果 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{D}$ 是已知的，就可以确定 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的方向以及相应的速度 v_p 和 v_r，因此也就确定在这两个曲面上的相应点(图 14.5 中的 P 和 P')。设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 是表示这些点的矢量：

$$\boldsymbol{r}=v_r\boldsymbol{t},\quad \boldsymbol{r}'=v_p\boldsymbol{s}. \tag{52}$$

我们将证明，$\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{D}$ 的微小变化引起矢量 $\boldsymbol{r}$ 的变化与 $\boldsymbol{r}'$ 相垂直。

我们从(27)式开始，

$$\frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}=\frac{1}{n_r^2}[\boldsymbol{D}-\boldsymbol{t}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{t})]. \tag{53}$$

用(52)第一式代入上式的 $\boldsymbol{t}$，又令 $n_r=c/v_r$，得出：

$$\frac{c^2}{\mu}\boldsymbol{E}=r^2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r}). \tag{54}$$

现在设 $\boldsymbol{E}$ 改变一微小量 $\delta\boldsymbol{E}$。如果 $\delta\boldsymbol{D}$ 和 $\delta\boldsymbol{r}$ 分别是 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 相应的变化，则根据(54)式，有

---

1) 不能指望法线面和光线面会有同次的方程，因为它们不是彼此对偶的。为了作出法线面的对偶的图，必须根据对偶规则(28)，画出长度为 $1/v_r$ (而不是 v_r)的矢量。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{c^2}{\mu}\delta\boldsymbol{E} = 2(\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r})\boldsymbol{D} + r^2\delta\boldsymbol{D} - \delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{D}). \quad (55)$$

如果用 $\boldsymbol{D}$ 标乘此式两边，并利用下述关系式：

$$\boldsymbol{D}\cdot\delta\boldsymbol{E} = \varepsilon_x E_x\delta E_x + \varepsilon_y E_y\delta E_y + \varepsilon_z E_z\delta E_z = \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}, \quad (56)$$

则得出

$$\frac{c^2}{\mu}\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D} = \delta\boldsymbol{D}\cdot[r^2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r})] + 2\delta\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{r}D^2 - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{r})]. \quad (57)$$

由于(54)式，有 $\delta\boldsymbol{D}$ 作因子的项可消去，而乘以 $\delta\boldsymbol{r}$ 的项可写成 $2\delta\boldsymbol{r}\cdot[(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{D}]$. 因此，由于 $\boldsymbol{r} = v_r\boldsymbol{t}$，有

$$\delta\boldsymbol{r}\cdot[(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{t})\times\boldsymbol{D}] = 0. \quad (58)$$

现在，矢量 $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{t}$ 垂直于 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 两者，因此 $(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{t})\times\boldsymbol{D}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的平面内并与 $\boldsymbol{D}$ 成直角；所以它平行于 $\boldsymbol{s}$（见 § 14.1）. 因此

$$\boldsymbol{s}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0, \quad (59)$$

即 $\delta\boldsymbol{r}$ 垂直于 $\boldsymbol{s}$，这样就证明了我们的论断. 这个结果意味着，**光线面的切面总是垂直于相应的波法线.** 图 14.5 在平面截面上说明这个关系. 因为由(9)式，从原点到这个平面的垂直距离等于 $v_r\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{s} = v_r\cos\alpha = v_p$，由此得出，**法线面是光线面的垂足曲面，反之，光线面是通过法线面上的点并与从原点到这些点的径向矢量成直角而画出的那些平面的包络.** 如果知道这两个曲面之一的形状，则另一个曲面可由这种关系确定.

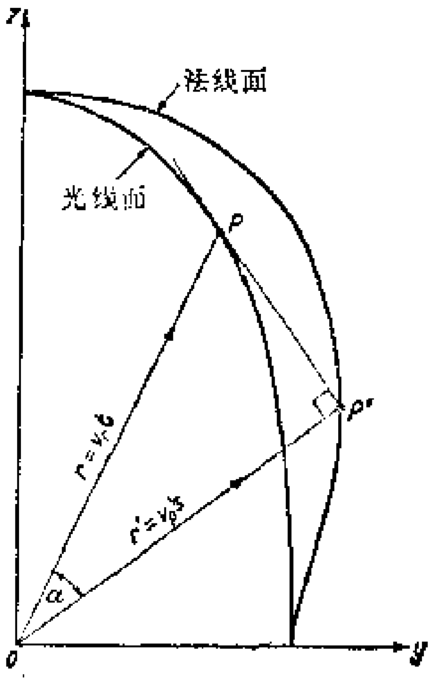


图 14.5 法线面和光线面之间的关系

我们可以用更为物理化的术语来解释这个结果. 考虑不是单个波而是由相同频率但传播方向稍有不同的多个平面波组成的波群. 其中各分波的波法线 $\boldsymbol{s}$ 充满了在“平均

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

波法线" s_0 附近的一个立体角，并假定只有那些法线紧靠 s_0 的波才具有可观的振幅. 设在时间 $t=0$ 时所有这些波在 O 点处同位相；因此在这一点处扰动为极大值. 现在考察这个极大值是怎样传播的.

考虑在时间 $t=0$ 时通过 O 处的所有波阵面. 经过一个单位时间以后，以速度 v_p 沿 s 方向传播的波阵面 W 将到达 W' 的位置，使得从 O 到其上的垂足为位置矢量 $v_p s$；因此，W' 是垂直于法线面相应的径向矢量的平面. 在波群互相增强的区域内，即这个平面与具有邻近波法线的那些平面相交的区域内，波群的振幅最大. 而这正好是在这些平面的包络附近的区域，即在光线面上相应点 $v_r t$ 邻近的区域. 上述考虑证实，波群携带的能量以速度 v_r 沿单位矢量 t 的方向传播.

§14.3 单轴晶体和双轴晶体的光学性质

§14.3.1 晶体的光学分类

透明晶体按其光学性质分成不同的三类:

第一类晶体，可以在其中选择三个结晶学上等价的互相正交的方向. 它们是所谓立方晶系的晶体. 这些等价方向显然与主介电轴重合，且有 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z(=\varepsilon)$；因此 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，晶体是光学上各向同性的，并与非晶体等价.

第二类晶体，不属于第一类，可在其中一个平面内选择两个或多个结晶学上等价的方向. 它们是三角晶系，四方晶系和六角晶系的晶体，含各等价方向的平面垂直于三重，四重或六重对称轴. 有一个主介电轴必须与这个特定方向重合，而另外两个主介电轴可选择为与它垂直的某一对正交线. 如果取这个特定方向作为 z 轴，则有 $\varepsilon_x=\varepsilon_y\neq\varepsilon_z$. 这样的晶体称为光学上是单轴的.

第三类晶体，其中没有两个结晶学上等价的方向可供选择. 它们是属于所谓斜方晶系，单斜晶系和三斜晶系的晶体. 其中 $\varepsilon_x\neq\varepsilon_y\neq\varepsilon_z$，并且介电轴的方向或能或不能由对称性确定(见

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表 30)，因此可能依赖于波长． 这类晶体称为光学上是双轴的．

所有的晶体按其光学性质分成这三类，可通过研究有关的椭球之一，例如波法线椭球，清楚地看出来．显然，保持晶体结构不变的对称操作不可能改变椭球[1]． 现在椭球退化为球只有两步．一个椭球或 (a) 所有的轴都不等长，或 (b) 两个轴相等而一个轴不等(回转椭球)，或 (c) 所有的轴相等(球)；它们相应于刚讨论过的三类[顺序是 (III)，(II)，(I)]． 术语单轴和双轴指的是椭球具有的光轴数，即具有下述性质的直径数，通过椭球中心垂直于这些直径的平面截面是圆． 一般的椭球有两个这样的直径(双轴晶体)，回转椭球有一个(单轴晶体)，球有无限多个(各向同性晶体)．

表 30 给出所有可能情况的概况． 可依赖于颜色的主介电轴用两条彼此夹一小角的细线示出(表示对于两个波长的位置)，固

表 30

晶 系	介 电 轴		波法线椭球	光学分类
三 斜	*CCC*		一般椭球	双 轴
单 斜	*CCF*		一般椭球	双 轴
斜 方	*FFF*		一般椭球	双 轴
三角，四方，六角	*FRR*		回转椭球	单 轴
立 方	*RRR*		球	各向同性

C = 有色散的轴
F = 方向固定的轴
R = 可自由转动的或不确定的轴

1) 例如，单斜系晶体可用与晶轴之一平行的二重轴，或与此晶轴垂直的镜平面，或此二者来表征．在上述任一情况下，椭球显然必有一个轴与此晶轴平行，以便经对称操作后保持不变．

关于晶体分类和对称操作的详细说明，我们可引用 C. W. Bunn, *Chemical Crystallography* (Oxford, Clarendon Press, 1945), Chapter 2.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

定轴用粗线，而可自由转动的(或不确定的)轴用虚线，其末端在一个圆或一个球上。

§14.3.2 光在单轴晶体中的传播

我们从波法线的菲涅耳方程§14.2(24)式出发，把它写成下述形式：

$$s_x^2(v_p^2-v_y^2)(v_p^2-v_z^2)+s_y^2(v_p^2-v_z^2)(v_p^2-v_x^2)$$
$$+s_z^2(v_p^2-v_x^2)(v_p^2-v_y^2)=0. \qquad (1)$$

对于光学上的单轴晶体，光轴在 z 方向，则 $v_x=v_y$. 用[1] v_o 代替这个共同的速度，并用 v_e 代替 v_z，(1)式化为

$$(v_p^2-v_o^2)[(s_x^2+s_y^2)(v_p^2-v_e^2)+s_z^2(v_p^2-v_o^2)]=0. \qquad (2)$$

设 θ 表示波法线 $\mathbf{s}$ 与 z 轴的夹角；则

$$s_x^2+s_y^2=\sin^2\theta,\quad s_z^2=\cos^2\theta,$$

(2)式变为

$$(v_p^2-v_o^2)[(v_p^2-v_e^2)\sin^2\theta+(v_p^2-v_o^2)\cos^2\theta]=0. \qquad (3)$$

这个方程的两个根(记作 v_p' 和 v_p'')由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}v_p'^2&=v_o^2,\\ v_p''^2&=v_o^2\cos^2\theta+v_e^2\sin^2\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(4)式表明，法线面的两个壳是一个半径 $v_p'=v_o$ 的球面和一个(四次)回转曲面即卵形面。这样，相应于任一特定的波法线方向的两个波之一是寻常波，其速度与传播方向无关，另一个是非常波，其速度依赖于波法线方向与光轴之间的夹角。仅当 $\theta=0$ 即波法线在光轴方向时，这两个速度才相等。

当 $v_o>v_e$ 时[见图14.6(a)]，寻常波传播比非常波快(除了 $\theta=0$，此时两者相等)；这种晶体称为正单轴晶体(例如石英)。如果 $v_o<v_e$，[见图14.6(b)]，寻常波传播比非常波慢，则称为负单轴晶体(例如长石)。

利用有两个主轴相等的波法线椭球，可以方便地找出振动方

---

1) 这里，下标 o 和 e 代表寻常的和非常的，这些术语将在以后阐明。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

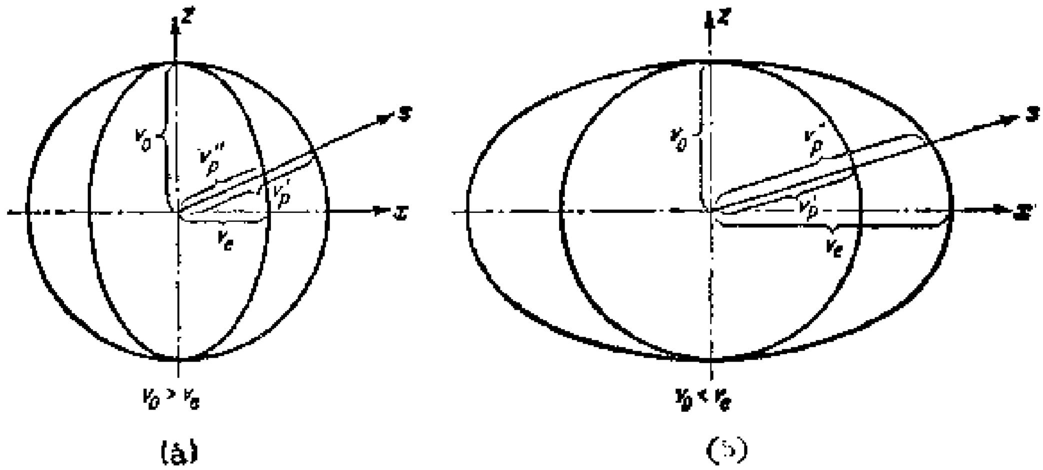


图 14.6 单轴晶体的法线面
(a) 正单轴晶体, (b)负单轴晶体

向. 含波法线 s 和光轴 OZ 的平面称为主平面(图 14.7 中用阴影线表示). 椭球对于这个平面是对称的. 由此得出,通过 O 点并垂直于 s 的平面所截出的椭圆截面对于主平面是对称的,因此,如图 14.7 所示,椭圆的两个主轴垂直和平行于主平面. 垂直于主平面的半轴等于椭球体的赤道圆半径,即它与寻常波的速度 v_o 成反比. 我们看到,寻常波的矢量 $\boldsymbol{D}$ (图 14.7 中的 $\boldsymbol{D}'$) 垂直于主平面振动, 而非常波的矢量 $\boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{D}''$) 在主平面内振动.

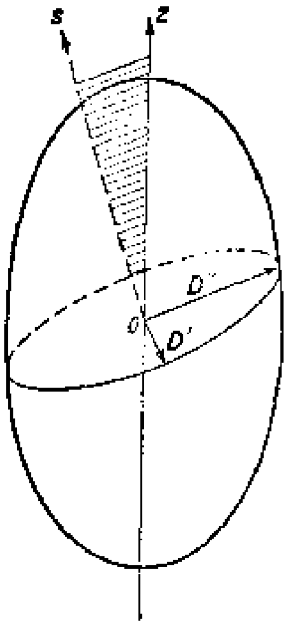


图 14.7 单轴晶体中的振动方向

在光学史中关于"光矢量"是垂直还是平行于偏振面振动的问题上,单轴晶体中的光学现象曾起过重要的作用. (偏振面定义为以这样的入射角从空气-电介质界平面反射时的入射面,在此入射角下,任一入射波都变成线偏振波,用电磁理论的语言,偏振面即 ($\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{s}$) 平面;参看上册 47 页和 67 页). 今天不再详细讨论这个问题了[1],因为我们知道不存在单一物理实

---

1) 关于历史背景的叙述,见 E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I: The Classical Theories (London, T. Nelson, 1951), p. 116.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

体能与“光矢量”等同.

§ 14.3.3 光在双轴晶体中的传播

现在研究在双轴晶体的一般情况下基本方程(1)的主要结果.如果首先考虑法线面被我们选定的参照系(主介电轴)的三个坐标平面 $x=0$, $y=0$ 和 $z=0$ 截出的截线, 将有助于想象这个法线面. 为了唯一地确定各交线的形状,将标明这三个轴满足

$$\varepsilon_x<\varepsilon_y<\varepsilon_z, \quad (v_x>v_y>v_z). \tag{5}$$

如果在(1)式中令 $s_x=0$,则方程分成两个因子,得出

$$\left.\begin{aligned} v_p'^2 &= v_x^2, \\ v_p''^2 &= v_z^2 s_y^2 + v_y^2 s_z^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

令 $v_p s_y = y$, $v_p s_z = z$; 则 $v_p^2 = y^2 + z^2$, 方程变为

$$y^2+z^2=v_x^2, \quad (y^2+z^2)^2=v_z^2 y^2+v_y^2 z^2. \tag{6a}$$

因此, 法线面被坐标平面 $x=0$ 截出的截线是一个圆和一条卵形线. 法线面分别被另外两个坐标平面截出的截线同样由一个圆和一条卵形线组成,唯一的差别在于这两条曲线的相对位置. 按(5)

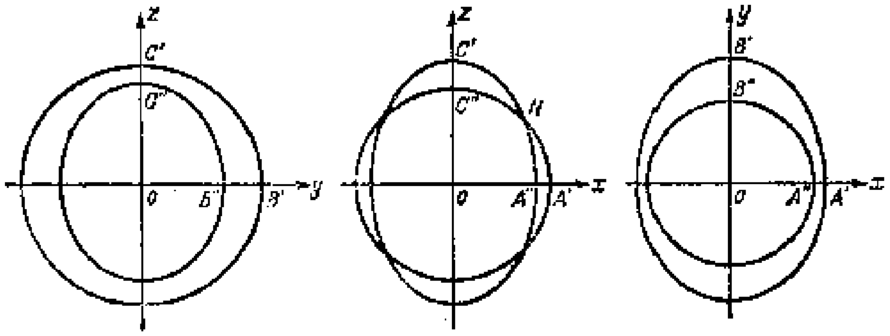


图 14.8 双轴晶体的法线面的截线

式所示选择各轴, 则在 yz 平面内圆完全在卵形线之外;在 xy 平面内圆完全在卵形线之内;在 zx 平面内圆和卵形线相交于四点(图 14.8). 法线面的一个卦限的透视如图 14.9 所示, 图中两条曲线 $A'B'C'N$ 和 $A''B''C''N$ 都被一光滑曲面跨过. 一般地说, 两个曲面相交于一条曲线,但在这种情况下,这两个曲面只有四点是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

共同的，即点N和在其他象限中的相应各点．连接原点与这些点的两条直线是波法线的两个光轴．根据900页提到的关于椭球中心圆截面数的几何定理得出，没有其他的这类点，所以也没有其他的波法线光轴．现在将通过直接的计算证实这一点，同时建立以后需用到的一个不等式．

设

$$v_x^2 = v_y^2 + q_x,\quad v_z^2 = v_y^2 - q_z,\quad v_p^2 = v_y^2 + q, \tag{7}$$

由于(5)式，上式中 q_x 和 q_z 都是正的．作此代换，(1)式变为

$$s_x^2 q(q + q_z) + s_y^2(q + q_z)(q - q_x) + s_z^2(q - q_x)q = 0, \tag{8a}$$

或

$$q^2 + [s_x^2 q_z + s_y^2(q_z - q_x) - s_z^2 q_x]q - s_y^2 q_x q_z = 0. \tag{8b}$$

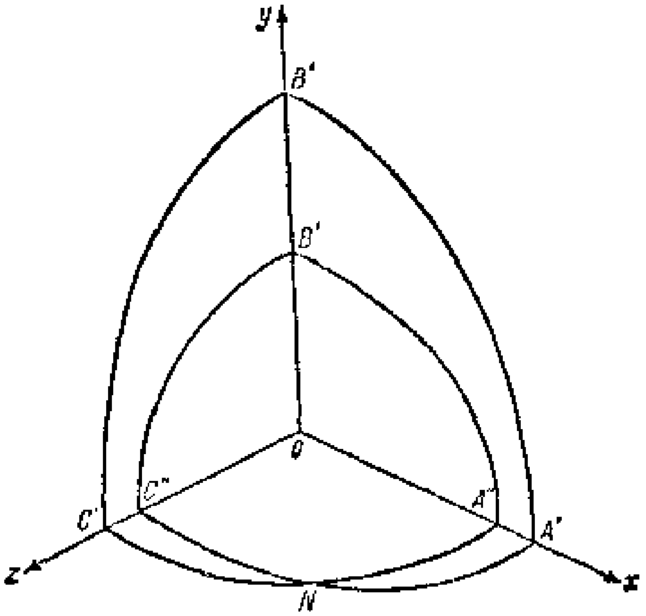


图 14.9　双轴晶体的法线面

因常数项 $-s_y^2 q_x q_z$ 不能是正的，所以这个方程的根必为实值．如果用 q' 和 q'' 表示这个方程的根，则

$$q'q'' = -s_y^2 q_x q_z \leqslant 0.$$

因此 q' 和 q'' 必有相反的符号，设 $q' \geqslant 0$ 和 $q'' \leqslant 0$.

如果 $q > q_x$ 或 $q < -q_z$，则(8a)式左边各项都是正值．因此 q 必位于 $-q_z \leqslant q \leqslant q_x$ 的区域内，由此，

$$-q_z \leqslant q'' \leqslant 0 \leqslant q' \leqslant q_x. \tag{9}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以仅当 q' 和 q'' 两根都为零时它们才能相等；对于这种情况，根据 (8b) 式，必同时有

$$s_y^2 = 0, \quad s_x^2 q_x = s_z^2 q_x. \tag{10}$$

因此得出两个 $\mathbf{s}$ 方向，对其中每一个 $\mathbf{s}$ 方向，相应的两个速度相等，这就证实了存在两个波法线的光轴．如前所述，这些光轴位于 xz 平面内．如果 β 是光轴之一与 z 方向的夹角，则 $s_x = \sin\beta$，$s_z = \cos\beta$，根据(10)式，

$$\tan\beta = \frac{s_x}{s_z} = \pm\sqrt{\frac{q_x}{q_z}} = \pm\sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}}; \tag{11}$$

因此光轴的位置相对于 z 轴是对称的．

用速度表示，不等式(9)变为

$$v_z^2 \leqslant v_p''^2 \leqslant v_y^2 \leqslant v_p'^2 \leqslant v_x^2, \tag{12}$$

这是以后需用到的一个关系式．我们看到，不论波法线的方向如何，两个相速度都是实值；当然，由利用波法线椭球对相速度几何作图看来，这个结论也是显然的．

如果 $\mathbf{s}$ 是用它与波法线两光轴的夹角 θ_1 和 θ_2 来规定的，则相应于一个给定的波法线方向 $\mathbf{s}$ 的两个相速度的表达式有一很简单的形式．因为光轴的方向余弦为 $\pm\sin\beta$，0，$\cos\beta$，所以角 θ_1 和 θ_2 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_1 &= s_x\sin\beta + s_z\cos\beta,\\ \cos\theta_2 &= -s_x\sin\beta + s_z\cos\beta.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(8b)式的两个根用 s_x 和 s_z 表示为

$$q = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \tag{14}$$

式中，如果又利用恒等式 $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$，则

$$p = s_x^2 q_z - s_z^2 q_x + q_x - q_z, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= p^2 + 4s_y^2 q_x q_z\\ &= (q_x + q_z)^2 - 2(q_x + q_z)(s_x^2 q_z + s_z^2 q_x) + (s_z^2 q_x - s_x^2 q_z)^2.\end{aligned} \tag{16}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现在由(13)和(11)式，

$$\cos\theta_1\cos\theta_2=\frac{q_z s_z^2-q_x s_x^2}{q_x+q_z},\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2=2\frac{q_x s_x^2+q_z s_z^2}{q_x+q_z}. \tag{17}$$

因此，用 θ_1 和 θ_2 表示，(15)和(16)式变为

$$P=q_z-q_x-(q_z+q_x)\cos\theta_1\cos\theta_2, \tag{15a}$$

$$\Delta=[(q_z+q_x)\sin\theta_1\sin\theta_2]^2, \tag{16a}$$

把(15a)和(16a)式代入(14)式，并用(7)式代替 q, q_z 和 q_x，最后得出：

$$v_p^2=\frac{1}{2}[v_x^2+v_z^2+(v_x^2-v_z^2)\cos(\theta_1\pm\theta_2)]. \tag{18}$$

虽然 v_y 在这个方程中不出现，但它隐含在 θ_1 和 θ_2 中，因为这些角都依赖于 β，而它是所有三个主速度的函数。

在单轴晶体的特殊情况下，θ_1 和 θ_2 相等；很容易证实此时(18)式正好化为(4)式。

类似的分析也适用于光线。从光线方程 § 14.2(29) 式出发，求出光线面与坐标平面 $x=0$ 的截线由下述两条曲线组成：

$$v_r'^2=v_x^2,\qquad \frac{1}{v_r''^2}=\frac{t_y^2}{v_z^2}+\frac{t_z^2}{v_y^2}. \tag{19}$$

如果令 $v_r t_y=y$，$v_r t_z=z$，则 $v_r^2=y^2+z^2$，并且(19)式变为

$$y^2+z^2=v_x^2,\quad \frac{y^2}{v_z^2}+\frac{z^2}{v_y^2}=1, \tag{19a}$$

即光线面与平面 $x=0$ 的截线是一个圆和一个椭圆[而不是象(6a)式中那样的更一般的卵形线类型]。分别被其他两个坐标平面截出的截线同样是一个圆和一个椭圆。由于不等式(5)，在 yz 平面内圆包围着椭圆；反之在 xy 平面内椭圆包围着圆；而在 xz 平面内圆和椭圆相交于四点。这四点确定了**光线轴** R_1 和 R_2 的位置，它们的方向由(10)式的对偶给出：

$$t_y^2=0,\qquad t_x^2\left(\frac{1}{v_y^2}-\frac{1}{v_z^2}\right)=t_z^2\left(\frac{1}{v_x^2}-\frac{1}{v_y^2}\right). \tag{20}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此这两个轴分别与 z 轴的夹角 γ 由下式给出：

$$\tan\gamma=\frac{t_x}{t_z}=\pm\frac{v_z}{v_x}\sqrt{\frac{v_x^2-v_y^2}{v_y^2-v_z^2}}=\pm\frac{v_z}{v_x}\tan\beta. \tag{21}$$

如果 $v_z<v_x$，则光线轴与 z 轴的夹角比法线轴与 z 轴的夹角小。

§ 14.3.4 晶体中的折射

(a) 双折射

考虑一平面波从真空入射到各向异性媒质的表面 Σ 平面上。它将产生一透射场和一反射场。我们将用与各向同性媒质情况(§ 1.5.1)中实质上相同的论证扼要地讨论一下透射场的性质。我们将把注意力限于找出在晶体内部扰动的传播方向，而不研究振幅比值的表达式(相应于菲涅耳公式)[1]。

设 $\boldsymbol{s}$ 是入射波的单位波法线，$\boldsymbol{s}'$ 是透射波的单位波法线。我们即将看到一般有两个透射波，因此有两个可能的 $\boldsymbol{s}'$ 值。入射波和透射波的场矢量分别是 $(t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}/c)$ 和 $(t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}'/v')$ 的函数。场通过边界的连续性要求对于平面 Σ 上任一点 $\boldsymbol{r}$ 和所有时间 t 都有

$$t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}{c}=t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}'}{v'},$$

即

$$\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{s}'}{v'}-\frac{\boldsymbol{s}}{c}\right)=0. \tag{22}$$

因此，矢量 $\boldsymbol{s}'/v'-\boldsymbol{s}/c$ 必垂直于边界。

容许的波法线 $\boldsymbol{s}'$ 可确定如下：取 Σ 上任一点 O 作为原点，画出在所有方向 $\boldsymbol{s}'$ 上长度各为 $1/v'$ 的矢量，其中 v' 是根据菲涅耳方程 § 14.2(24) 式相应于每个 $\boldsymbol{s}'$ 的相速度。端点的轨迹是一个双叶曲面，它与法线面的区别在于每个径向矢量的长度是 $1/v'$ 而

1) 例如在 G. Szivessy, *Hdb. d. Phys.*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), 715 中讨论了这些内容。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

不是 v'. 我们把这个曲面称为**波法线的反曲面**；它是光线面的对偶，因此同光线面本身一样也是四次曲面．因为所要求的矢量 $\mathbf{s}'/v'$ 必须使得 $\mathbf{s}'/v'-\mathbf{s}/c$ 垂直于 Σ，所以它的端点 Q' 一定在通过矢量 $\mathbf{s}/c$ 端点 P 的 Σ 的法线上．一般地说，Σ 的法线与反曲面相交于四点，其中两点位于与晶体相同的边界一侧．因此有两个这样的点(图 14.10 中的 Q' 和 Q'')，从而有两个可能的波法线方向，使得**每个入射波一般将产生两个折射波**；每一个折射波对应于一个光线方向和一个光线速度，这二者描述晶体内部能量的传播[1]．这就是**双折射**现象．它可由下述熟悉的效应显示出来，即通过一片方解石观察一个小物体时看到两个象．

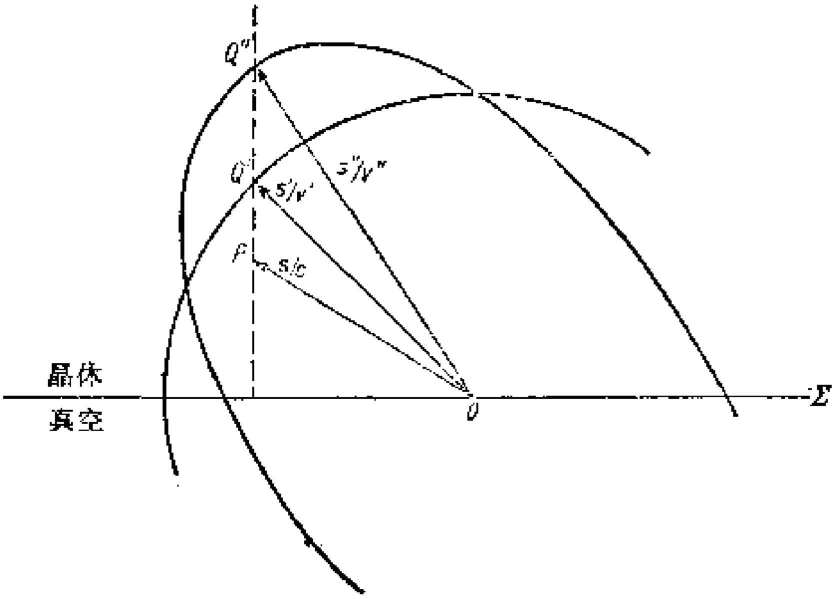


图 14.10 双折射：容许的波法线的作图法

取边界面 Σ 为平面 $z=0$，(22)式变为

$$\frac{xs_x+ys_y}{c}=\frac{xs'_x+ys'_y}{v'}=\frac{xs''_x+ys''_y}{v''}, \tag{23}$$

1) 双折射的起因也可利用把惠更斯作图法(§3.3.3)推广到各向异性媒质来说明．然而这种方法的适当表述决不象教科书中通常给出的那样简单，因为惠更斯作图法是用发自点光源的子波而不是用独立的平面波运算的，它的传播规律通常未加证明而接受下来．这种方法中所固有的某些困难已被 M. G. Lamé 在他的 *Leçons Sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (Paris, Gauthier-Villars, 2nd ed., 1866) 和 V. Volterra, *Acta Math.*, **16** (1892), 153 讨论过．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

它对于所有的 x 和 y 值都必须满足.这意味着,首先,$s'_x/s_x = s'_y/s_y$ 和 $s''_x/s_x = s''_y/s_y$, 因此两条折射光线均位于入射面内. 而且,如果 θ_i, θ'_t 和 θ''_t 分别是入射波和两个透射波与轴的夹角,则由(23)式,有

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta'_t} = \frac{c}{v'}, \qquad \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta''_t} = \frac{c}{v''}. \tag{24}$$

因而每一个透射波看来遵从与各向同性媒质情况相同的折射定律. 然而现在速度 v 依赖于 θ_t, 因此晶体中传播方向的确定是更复杂的. 在单轴晶体中,反波法线面的一叶是一个球面,因此有一个透射波的相速度与 θ_t 无关,这就是寻常波.

在正入射的特殊情况下 ($\theta_i = 0$), 有 $\theta'_t = \theta''_t = 0$, 因此晶体中两波法线重合,并在 Σ 的法线方向. 另一种有很大理论意义的特殊情况是沿着双轴晶体光轴之一的方向传播的波的情况. 它产生通称锥形折射的现象,现在将对它作讨论.

(b) 锥形折射

前面提到过,当 $\boldsymbol{s}$ 与双轴晶体中波法线的光轴之一重合时,$\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 之间的关系有一奇异性. 在讨论与沿这个特殊方向传播有联系的折射现象之前,必须研究这种奇异性.

§ 14.2.3 中已说明,与一波法线方向 $\boldsymbol{s}$ 相联系的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 平行于通过波法线椭球并与 $\boldsymbol{s}$ 垂直的椭圆截面的主轴. 如今在矢量 $\boldsymbol{s}$ 沿波法线光轴方向的特殊情况下,截面为圆形,因此所有与 $\boldsymbol{s}$ 垂直的 $\boldsymbol{D}$ 方向都是容许的;结果在这种情况下可能有(由 § 14.1(1) 式对每一个 $\boldsymbol{D}$ 算出的)电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的无限多个方向,以及(如图 14.1 中确定的)无限多个光线方向 $\boldsymbol{t}$. 现在将证明所有这些 $\boldsymbol{t}$ 矢量都位于一个锥面上.

设 $\boldsymbol{s}'(s'_x, 0, s'_z)$ 是在不等式(5)的条件下以主介电轴为参照系沿波法线光轴之一的单位矢量. 则 s'_x 和 s'_z 由(11)式相联系,并且垂直于 $\boldsymbol{s}'$ 的容许的 $\boldsymbol{D}$ 矢量满足下列关系式:

$$s'_x D_x + s'_z D_z = 0.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

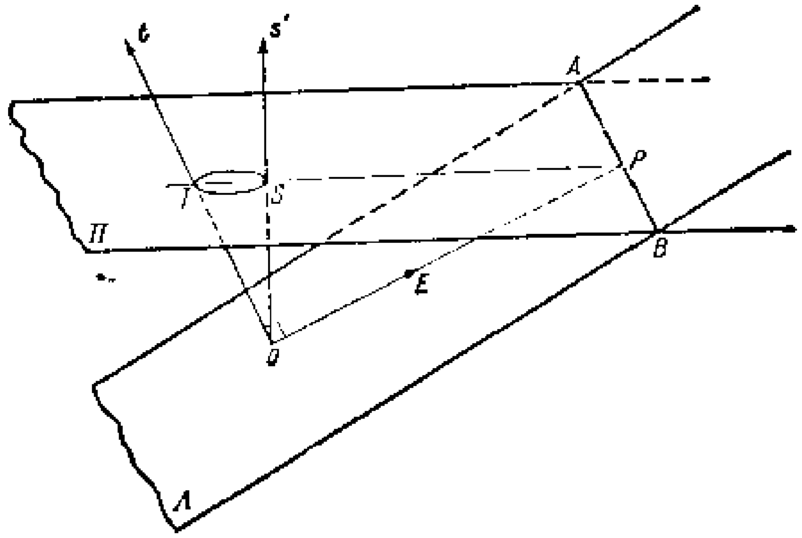


图 14.11　与双轴晶体中波法线的一个光轴相应的光线位置的图示

用相应的 $\boldsymbol{E}$ 矢量分量来表示，这个关系式可写成

$$s'_x\varepsilon_x E_x + s'_z\varepsilon_z E_z = 0. \tag{25}$$

图 14.11 中，设 Π 为垂直于 $\boldsymbol{s}'$ 的任一平面，并设电矢量 $\boldsymbol{E}$ 所在的直线与该平面相交于 P. 因按(25)式，所有的 $\boldsymbol{E}$ 矢量必位于与分量为 $(s'_x\varepsilon_x, 0, s'_z\varepsilon_z)$ 的矢量垂直的平面 Λ 内，所以所有可能的点 P 必位于直线 AB 上，AB 是平面 Π 和 Λ 的交线. 现在光线矢量 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{s}'$ 共面，并垂直于 $\boldsymbol{E}$. 设 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{s}'$ 分别与平面 Π 交于点 T 和 S. 则根据相似三角形，有

$$TS \cdot SP = OS^2 = \text{常数}. \tag{26}$$

因为 P 的轨迹是直线 AB，所以 T 的轨迹与 AB 相反，即为[1]通过反演中心 S 并且在 S 处的切线平行于 AB 的圆. 因此相应于波法线一个光轴有无限多的光线，这些光线构成一个锥面. 这个锥面不是圆锥面，因为圆的中心不是由 O 到平面 Π 的垂足.

如果 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{s}'$ 和 $\boldsymbol{t}'$ 都在 xz 平面内，则 $\boldsymbol{t}$ 的方向必为方向 $(s'_x\varepsilon_x, 0, s'_z\varepsilon_z)$，并且 $\boldsymbol{E}$ 总与它垂直. 如果这个方向与 z 轴的夹角为 ϕ，则在此平面内锥的孔径角 χ 由下式给出：

---

1) 例如见 D. M. Y. Sommerville, *Analytical Conics* (London, Bell and Sons, 1941), p. 92.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\tan\chi=\tan(\beta-\phi)=\frac{\dfrac{s'_x}{s'_z}-\dfrac{s'_x\varepsilon_x}{s'_z\varepsilon_z}}{1+\dfrac{\varepsilon_x s'^2_x}{\varepsilon_z s'^2_z}}$$

$$=\frac{1}{v_y^2}\sqrt{(v_x^2-v_y^2)(v_y^2-v_z^2)},\qquad(27)$$

式中已用到(11)式. 通常 $(v_x^2-v_y^2)/v_y^2\ll 1$, $(v_y^2-v_z^2)/v_y^2\ll 1$, 因此,这个锥很接近于圆锥,孔径角为 χ.

用严格类似的方法可以证明，**相应于一个光线轴有无限多的波法线，这些波法线构成一个锥面**. 这个锥的孔径角 ϕ 由(27)式的对偶即下式给出:

$$\tan\phi=\frac{1}{v_xv_z}\sqrt{(v_x^2-v_y^2)(v_y^2-v_z^2)}=\frac{v_y^2}{v_xv_z}\tan\chi.\qquad(28)$$

利用 § 14.2.3 导出的法线面是光线面的垂足曲面这一性质，就可以方便地用法线面和光线面来说明这种情况. 这些曲面与 xz 平面的交线如图 14.12 所示. 法线面与这个平面相交于一个半径 $v'_p=v_y$ 的圆以及一条极半径为 v''_p 的卵形线，而光线面与这个平面相交于同一个圆 $v_r=v_y$ 和一个椭圆 v''_r. 如果圆与卵形线相交于 N, 则直线 ON 在波法线的光轴方向上，并且通过 N 垂直于 ON 的平面必与光线面在容许光线方向的锥与此曲面相割的所有各点处相切. 因而光线面具有下述不寻常的特性，即某些切平面与它在无限多点相切[1].

光线光轴用 OR 表示,其中 R 是光线面两叶的交点;两叶的交点 R 处有无限多个切平面,它们的法线位于一锥面上. 从 O 到这些平面的法线构成相应于光线方向 OR 的波法线方向的锥. 这两个锥的孔径角 χ 和 ϕ 也在图中示出. 根据即将搞清楚的理由，属于 N 的即由 OA 这样的光线构成的锥,称为**内锥形折射的锥**;属于 R 的即由 OB 这样的波法线构成的锥,称为**外锥形折射的锥**.

---

1) 这个曲面特性的详细讨论，见 G. Salmon, *Analytical Geometry of Three Dimensions*, 由 R. A. P. Rogers 修订, Vol. 2 (London, Longmans, Green & Co., 1915, 5th ed.), Chapter IV.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

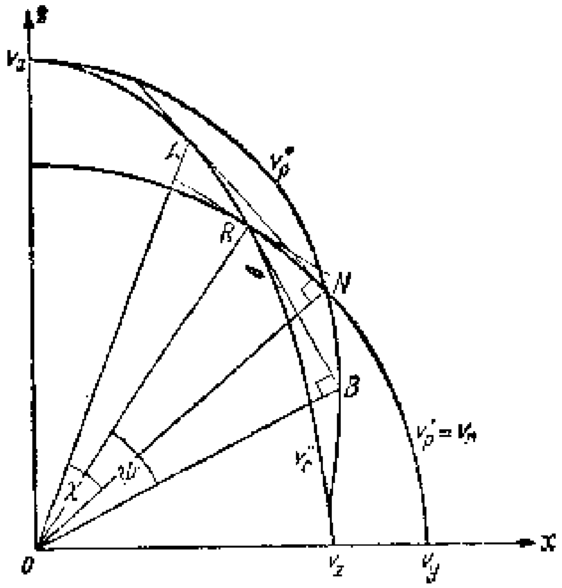


图 14.12 锥形折射：锥的作图法

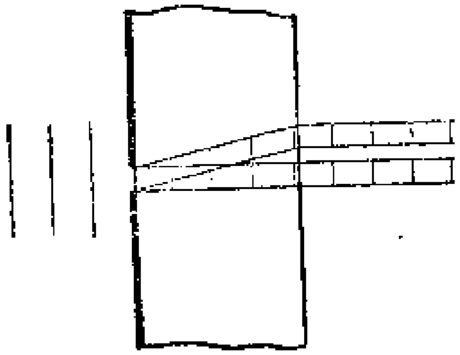


图 14.13 内锥形折射

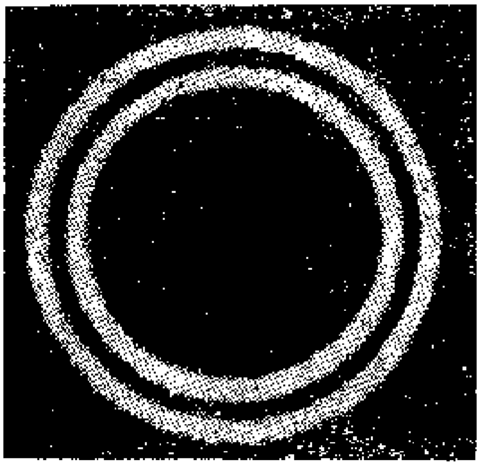


图 14.14 锥形折射引起的光分布

现在考虑一片双轴晶体，例如霰石，切成使它的两个平行表面垂直于波法线的光轴．如果它被正入射到其中一个表面上的一束窄的单色光照明，则在这片晶体内能量将分布在一个空心锥内，即在内锥形折射的锥内，并在另一侧出射时，它将形成一个空心柱，如图 14.13 所示．因而将预期在平行于晶体表面的屏上会看到一个亮圆环．1832 年哈密顿曾预言这种值得注意的现象，一年以后为洛埃所证实，他在哈密顿的鼓励下在霰石中研究了这种现象．这个实验的成功，作为菲涅耳的光的波动理论最惊人的证实之一，对此理论被普遍承认有很大的贡献(见历史引言，上册第 6 页)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

实际上,对锥形折射现象的论证不象刚才指出的那样简单,因为本来不可能获得严格平行的单色光束. 在实验中总不得不用有限角孔径的光束,在这种情况下,波根道夫 (Poggendorff)[1] 和海定格 (Haidinger)[2] 最早表明,人们观察到的是两个亮圆被一个细的暗圆分开,如图 14.14 所示. 在洛埃的首次实验中,观察不到这种结构,是因为限制其光束宽度的孔径太大,所以这两个亮圆模糊成为一个圆了. 在这一发现以后很长时间内仍未得到解释,直至沃依格特 (Voigt)[3] 对此作出一种解释,它可概述如下:

我们必须考虑其法线对光轴稍有倾斜的波的传播. 每一波法线将在晶体内部产生两条光线,我们料想这些光线的方向与内锥形折射的锥的母线方向仅稍有不同. 为了求出透射光线是如何分布的,必须考虑与图 14.12 中的切平面 AN 相切的圆附近的那一部分光线面. 光线面的这一部分可比拟为汽车轮胎的充气内胎的一部分,切平面可比拟为位于胎上的平板. 图 14.15 示出与 xz 平面的截面. 现在光线面上代表相应于波法线方向 $\boldsymbol{s}$ 的两条光线方

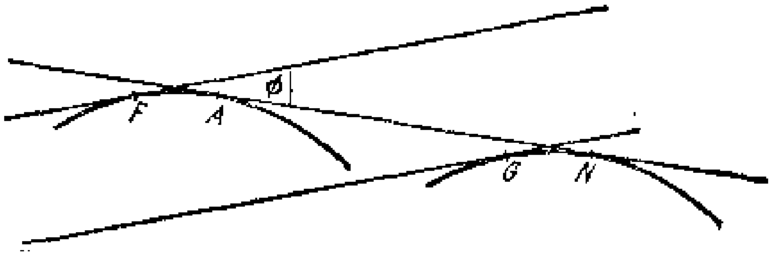


图 14.15 属于对波法线光轴倾角很小的波法线的光线位置图示

向的那些点,就是垂直于 $\boldsymbol{s}$ 的两个切平面与光线面的切点,如图 14.5 所示. 当波法线 ON 稍偏离光轴时,切平面分成两个平行平面,其中一个平面在曲面上滚动,使得它的切点从相切圆的中心移到 F,而第二个平面(它不能在我们的模型中表示,因为它必须割

1) J. C. Poggendorff, *Pogg. Ann.*, **48** (1839), 461.
2) W. V. Haidinger, *Wiener Ber.* (2), **16** (1854), 129; *Pogg. Ann.* (4), **96** (1855), 486.
3) W. Voigt, *Phys. Z.* **6** (1905), 672, 818.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

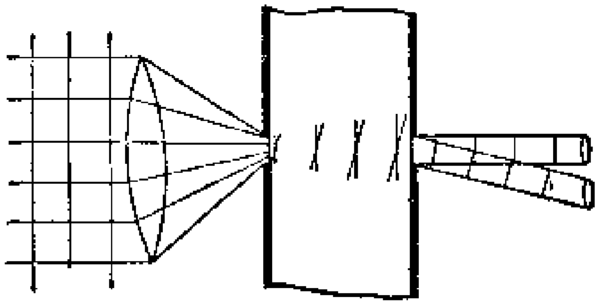


图 14.16 外锥形折射

穿内胎）滚动使得它的切点从中心移到 G. 图 14.15 示出上述对于 xz 平面内的波法线位移的情况，但对于任何方向的位移也会发生同样情况.

由上述得知，其波法线对光轴有一小倾角 ϕ 的所有入射光线，将产生对内锥形折射的锥中轴倾角为 $\frac{1}{2}\chi+a\phi$ 和 $\frac{1}{2}\chi-a\phi$ 的光线对，其中 a 是某一常数. 因而与入射光束中角范围在 ϕ 和 $\phi+d\phi$ 之间相应的所有能量将出现在半角孔径为 $\frac{1}{2}\chi\pm a\phi$ 而夹角为 $ad\phi$ 的两个锥内，但是入射光束中相应的能量正比于 $\phi d\phi$，直至 ϕ 的极大值. 由此得出，在角 $\frac{1}{2}\chi\pm a\phi$ 处，光线锥内的强度正比于 ϕ，特别是在 $\phi=0$ 处它为零. 因而必料到出现两个亮圆，当中有一暗圆，同观察到的一样.

外锥形折射说明了先前确定的事实，相应于一个给定的光线方向有由波法线方向构成的整锥. 利用一块晶片切割后使其表面垂直于光线轴，可观察到这种现象. 在两个表面上放上彼此精确相对的小孔，其中一个孔用会聚光照明，如图 14.16 中所示. 只有那些方向很靠近光线轴方向的光线才到达第二个孔，因此到达第二个孔的波的法线全都在外锥形折射的锥附近，所以将从晶体射出一锥光. 由于是从晶体射出的折射，所以这个光锥的角孔径将大于外锥形折射的真正角度 ϕ. 在平行于晶体表面的屏上再次观察到光的两个同心圆，这个双重圆的解释与内锥形折射情况所作的解释是类似的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§14.4 晶体光学测量

本节中将扼要地叙述确定晶体的特征(即单轴还是双轴)，它的光轴位置和它的主折射率数值的方法. 我们将看到，通过观察晶片上的干涉条纹可以确定光轴的位置；干涉图样的结构清楚地指出光轴与晶片表面的交点. 利用晶体棱镜，通过测量偏向角或全反射角，可以确定主折射率.

作为准备知识，必须讨论偏振光的产生并进行分析.

§14.4.1 尼科耳棱镜

产生线偏振光的最常用的器件之一是尼科耳棱镜[1]. 它是由自然的菱形方解石(单轴晶体)沿对角平面(图14.17中用AC表示)切成两个相等部分，再用加拿大树胶把这两部分胶合在一起构成的. 菱形的长约为宽的三倍，其主截面在B和D处的角度都等于71°；研磨端面AD和BC使这个角度减小到68°.

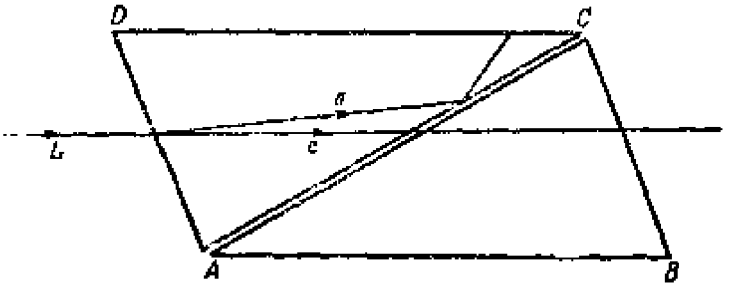


图 14.17 尼科耳棱镜

沿平行于长边的方向L入射的一条光线被分成一条寻常光线和一条非常光线. 对于寻常光线，加拿大树胶的光密度较低，对于非常光线，加拿大树胶的光密度较高(方解石晶体：寻常折射率$n_o=1.66$，非常折射率$n_e=1.49$；加拿大树胶$n=1.53$)，由§1.5.4的公式很容易证实，寻常光线在加拿大树胶界面上满足全反射条件；这条光线向着涂黑的面DC全反射，因此被此面吸收.

1) W. Nicol, *Edinburgh New Philos. Journ.*, **6** (1829), 83.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

非常光线穿过棱镜，实际上没有横向位移，它是线偏振的，它的 **D** 矢量在主截面内(见§14.3.2)．因此尼科耳棱镜产生线偏振光，它的振动方向是已知的．

如果入射光线向着菱形的边缘倾斜，只要寻常光线在加拿大树胶上的入射角不小于临界角，则尼科耳棱镜仍可作为起偏振器．这限制了空气中入射光线锥的角度，因此棱镜有效的张角约为[1] 30°．

令自然光通过一片对两个振动方向的吸收系数显著不同的晶状吸收物质，也可以得到相当纯的线偏振光．§14.6.3 中将讨论这种“偏振片”．

象尼科耳棱镜这样一类从其他偏振状态的光产生线偏振光的装置，称为起偏振器．这类装置也可以用作检偏振器，即作为线偏振光及其振动方向的检测器．要用尼科耳棱镜检测线偏振光，我们只须绕棱镜的纵轴转动棱镜，并注意是否有一个没有光通过的位置．如果有这样一个位置，则光是线偏振的，它的 **D** 矢量的振动方向垂直于主截面．

§14.4.2 补偿器

晶状物质也可以用来研究椭圆偏振光，即研究它的两轴方向及其长度比．为此，使用适当的物质和厚度的晶片，用它在两个方向互相正交的振动之间引入一个程差．特别是，可以引入这样的程差，使得椭圆偏振光转换为线偏振光，根据线偏振光的分析就得出所需要的关于椭圆偏振光的信息．这种装置称为补偿器，因为它的作用是补偿一个位相差[2]．

1) 有几种改进型的尼科耳棱镜，可用于更大的角场．对于这些的描述，例如见 L. C. Martin, *An Introduction to Applied Optics*, Vol. 1 (London, Pitman, 1930), p. 204, 或 R. W. Wood, *Physical Optics* (New York, Macmillan, 3rd ed., 1934), pp. 337—8.

2) 对于补偿器的详细论述，见 H. G. Jerrard, *J. Opt. Soc. Amer.*, **38** (1948), 35. M. Richartz 和 Hsien-Yü Hsü, 同上, **39** (1949), 136 页的文章中给出了可用于偏振光分析的方法概述.

§10.8 中讨论过的相干矩阵或斯托克斯参量，提供了完全偏振光或部分偏振光理论分析的系统方法.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(a) 四分之一波片

考虑一块厚为 h 的平面平行晶片. 设 z 轴垂直于晶片，x 和 y 轴沿相应的 $\boldsymbol{D}$ 振动方向. 可以假定，绕法线转动晶片直至 x 和 y 轴平行于入射光振动椭圆的主轴. 则入射光的 $\boldsymbol{D}$ 矢量各分量可用下式表示：

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(i)} &= a\cos\omega t, \\ D_y^{(i)} &= b\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

横过晶片时，因为两条光线的速度不同，所以这两个分量的位相有不同的变化. 忽略反射损失，则从晶片出射的光的 $\boldsymbol{D}$ 矢量各分量由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(t)} &= a\cos(\omega t + \delta'), \\ D_y^{(t)} &= b\sin(\omega t + \delta''), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}n'h, \qquad \delta'' = \frac{2\pi}{\lambda}n''h, \tag{3}$$

λ 是真空波长[1]. 因此，晶片引入的位相差为

$$\delta'' - \delta' = \frac{2\pi}{\lambda}(n'' - n')h. \tag{4}$$

特别是，如果出射光要求是线偏振的，则必有 $\delta'' - \delta' = \pm\frac{1}{2}\pi$，或更一般地说，必有 $\delta'' - \delta' = (2m+1)\pi/2$，其中 m 是任一整数，因此，晶片的厚度必为

$$h = \left|\frac{2m+1}{n'' - n'}\right|\frac{\lambda}{4}. \tag{5}$$

用了这个补偿器，透射光的线振方向由下式给出：

$$\frac{D_y^{(t)}}{D_x^{(t)}} = \pm\frac{b}{a}. \tag{6}$$

---

1) 与 §1.3 不同，这里写 λ 而不写 λ_0，因为下标"0"在整个这一节中均指寻常光线.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

引入位相差 $|\delta''-\delta'|=\pi/2$，即两个光学厚度之差为四分之一波长的补偿器，称为**四分之一波片**[1]. 它可以很方便地用撕成厚度 $h=\lambda/4|n''-n'|$ 的云母箔(双轴晶体)制成.

椭圆偏振光可用它按下述方法分析：使光通过四分之一波片，再通过尼科耳棱镜，使两者独立地转动，直至通过尼科耳棱镜的视场变得全暗为止. 这个位置是云母箔的轴平行于入射光振动椭圆的轴的位置，并且根据(6)式，尼科耳棱镜处于这个位置时使得其电矢量与 x 轴倾角为 $\tan^{-1}b/a$ 的线偏振光消光.

如果入射光是圆偏振的，则 $b=+a$ 或 $b=-a$，并且透射光的 $\boldsymbol{D}$ 矢量在与轴 OX 夹角分别为 45° 或 135° 的方向上线偏振. 前者相应于左旋偏振，后者相应于右旋偏振.

因为四分之一波片的厚度依赖于 λ，所以精确的补偿只对于一个特定波长的单色光才是可能的. 为了对于任一给定波长的光都得到补偿，必须用楔形片或楔形片的组合来代替单个平行面箔. 我们接着讨论某些这种类型的补偿器.

(b) 巴俾涅补偿器

巴俾涅[2]的补偿器能实现所有的位相差(包括零). 它是由两块有相等锐角的石英楔(正单轴晶体)组成的. 如图 14.18 所示，两块楔彼此对放，并且可以沿着它们的接触平面移动，因而形成可变厚度的平行片. 在一楔中光轴平行于棱，在另一楔中光轴垂直于棱.

设 n_o 和 n_e 是石英的寻常折射率和非常折射率，h_1 和 h_2 是在某一特定点处两楔的厚度. 通过这两楔后，两条光线之间的位相差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)(h_1-h_2). \tag{7}$$

---

1) G. Airy, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **4** (1833), 313.

2) J. Babinet, *C. R. Acad. Sci, Paris*, **29** (1849), 514. J. Jamin, *Ann. Chim.* (*Phys.*), (3), **29** (1850), 274.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中两楔的贡献是带有相反符号的，因为其矢量垂直于主轴振动的光线(寻常光线)是传播较快的一条光线，结果在一楔中沿平行于棱的方向振动的分量将超过另一分量，而在另一楔中将落后于另一分量．现在，随着入射点横过晶片移动，h_1 和 h_2 以及 δ 都连续地变化，在中央 δ 为零．结果将有一系列直线，沿着这些直线，透射光是线偏振的，因而可以用一个适当取向的尼科耳棱镜消光．

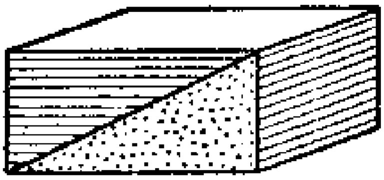


图 14.18　巴俾涅补偿器

取 x 轴平行于棱，椭圆偏振的入射光可表示为

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(i)} &= a_1\cos(\omega t+\delta_0'), \\ D_y^{(i)} &= a_2\cos(\omega t+\delta_0''). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

透过补偿器的光表示为

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(t)} &= a_1\cos(\omega t+\delta'), \\ D_y^{(t)} &= a_2\cos(\omega t+\delta''), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \delta' &= \delta_0' + \frac{2\pi}{\lambda} n_o(h_1-h_2), \\ \delta'' &= \delta_0'' + \frac{2\pi}{\lambda} n_e(h_1-h_2). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

出射光为线偏振时，必有 $\delta''-\delta'=m\pi(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，即

$$\delta_0''-\delta_0' = -\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)(h_1-h_2)+m\pi. \tag{11}$$

线振方向由下式给出:

$$\frac{D_y^{(t)}}{D_x^{(t)}} = \pm\frac{a_2}{a_1}. \tag{12}$$

首先，设在补偿器前面放上一个尼科耳棱镜，使得补偿器接收线偏振光．于是 $\delta_0''=\delta_0'$，如果补偿器后面有一检偏振器，与起

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

偏振的尼科耳棱镜正交，则会出现平行于棱的一些暗带，在暗带通过的各点，(11)式右边是 π 的倍数. 这些暗带确定了零位置. 如果接着只用补偿器和检偏振棱镜来检查椭圆偏振光，则由零位置到暗带的位移即可确定入射光的位相差 $\delta_0''-\delta_0'$；并且平行和垂直于棱的 $\boldsymbol{D}^{(i)}$ 分量的振幅比值可以由检偏振器的取向用 (12) 式确定. 根据这些数据，应用 § 1.4.2 的公式就可以求出振动椭圆的主轴位置及其比值.

(c) 索累补偿器

在某些场合，需要产生在整个视场内恒定的位相差(正，负，或零). 这可以用索累[1]补偿器来做到. 它包括两块石英楔 A 和 A'，构成如巴俾涅补偿器那样的平面平行片，但不同的是现在两楔中

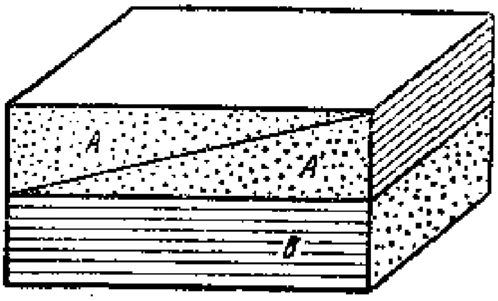


图 14.19 索累补偿器

的光轴都平行于棱. 下面的楔与一平面平行石英片 B 粘合，B 的光轴与棱成直角(见图 14.19). 显然，这个补偿器对两条光线引入的有效程差为 $h_B-(h_A+h_A')$. 在此程差为零的零位置处，整个视场可以用一适当取向的检偏振器弄暗. 移动上面的楔可以改变有效程差，但对于每个位置，程差在整个视场内保持恒定. 椭圆偏振光的分析与巴俾涅补偿器类似.

(d) 伯列克补偿器

伯列克[2]补偿器在生物显微术中很有用（例如测量一些丝状

1) H. Soleil, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **21** (1845), 426; **24** (1847), 973; **26** (1848), 162. J. Duboscq and H. Soleil, 同上, **31** (1850), 248.
2) M. Berek, *Zbl. Miner. Geol. Paläont.* (1913), 388, 427, 464, 580.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

双折射物质中的程差）．它是由一厚片单轴晶状媒质组成的，其光轴垂直于厚片的表面．寻常光线和非常光线之间的位相差是通过倾斜此厚片而引入的．把它安装成使其能被一分度轮转动，分度轮可校准到直接示出所引入的程差．

§14.4.3 有晶片时的干涉

如前所述，光轴的方向可以利用晶片上的干涉现象来确定．所观察到的优美的干涉效应明显地证明了晶体光学中理论与实验之间的一致，就其本身而言，这些干涉效应就值得加以研究．

首先考虑从起偏振器出射的一束线偏振光正入射到厚度为 h 的平面平行晶片上．进入晶片后，每一条光线分成具有不同传播速度的两条光线，其 $\mathbf{D}$ 矢量在垂直于晶片法线方向的两个相互正交的方向上振动．它们从晶片出射时具有某一位相差 δ．如果在晶片后面放一个检偏振的尼科耳棱镜，就能选出这两个振动在某一方向上的分量，并可导至二者在检偏振器后面的透镜的焦平面内干涉．

图 14.20 中，图面平行于晶面．$\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{D}''$ 表示晶体内两个互相正交的振动方向，OP 和 OA 分别是通过起偏振器和检偏振器的振动方向．设 ϕ 是 OP 与 $\mathbf{D}'$ 的夹角，χ 是 OA 与 OP 的夹角．入射到晶片上的光的振幅用矢量 OE（平行于 OP）表示；它在 $\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{D}''$ 方向上的分量是

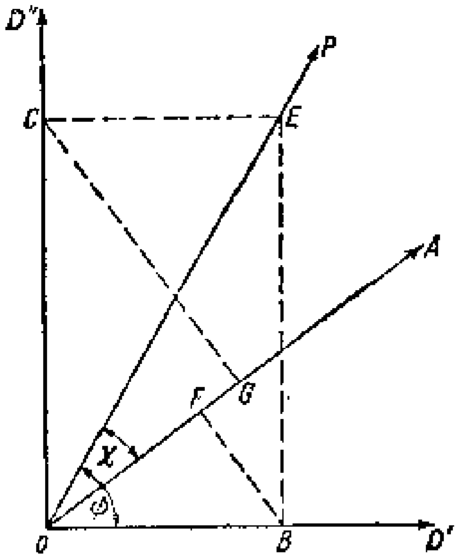


图 14.20 透过起偏振器和检偏振器的振动分量的作图

$$OB = E\cos\phi,$$
$$OC = E\sin\phi. \qquad (13)$$

检偏振器只透过平行于 OA 的分量，由图及(13)式可知，这些分量的振幅为

$$OF = E\cos\phi\cos(\phi-\chi),$$
$$OG = E\sin\phi\sin(\phi-\chi). \quad (14)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

离开晶片后，这两个分量的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n'' - n')h. \tag{15}$$

根据§7.2(15)式，位相差为 δ 的两个单色波干涉得到的强度由下式给出：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta,$$

式中 I_1 和 I_2 是这两个波的强度(振幅平方)．用(14)式给出的振幅，则有

$$I = E^2\left\{\cos^2\chi - \sin 2\phi \sin 2(\phi - \chi)\sin^2\frac{\delta}{2}\right\}, \tag{16}$$

式中已用到恒等式 $\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{\delta}{2}$.

如果去掉晶片($\delta = 0$)，则强度应为 $I = E^2\cos^2\chi$；因而(16)式中的第二项表示晶片的影响．

现在考虑两种重要的特殊情况：

(a) 检偏振器和起偏振器平行($\chi = 0$)．在这种情况下，(16)式化为

$$I_{/\!/} = E^2\left(1 - \sin^2 2\phi \sin^2\frac{\delta}{2}\right). \tag{17}$$

当

$$\phi = 0,\quad \frac{\pi}{2},\quad \pi,\quad \cdots, \tag{18}$$

即通过检偏振器的振动方向与晶片中的振动方向之一重合时，有透射极大值．(18)式的位置被透射极小值的位置隔开，后者由 $\sin 2\phi = \pm 1$ 即

$$\phi = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \cdots \tag{19}$$

给出，极小值为

$$I_{/\!/\,极小} = E^2\left(1 - \sin^2\frac{\delta}{2}\right) = E^2\cos^2\frac{\delta}{2}. \tag{20}$$

这些极小值不完全暗，除非 δ 是 π 的奇数倍，即除非晶片厚度为一系列依赖于光的波长的容许值之一．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

(b) 检偏振器和起偏振器垂直（$\chi=\pi/2$）。在这种情况下，(16)式给出

$$I_{\perp}=E^2\sin^2 2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}. \tag{21}$$

上式与(17)式比较表明，此时干涉现象是互补的．当ϕ为(18)式给出的数值之一时，有完全暗的极小值．在这些极小值的中间位置，即(19)式的位置，有相对的极大值，它们的数值为

$$I_{\perp 极大}=E^2\sin^2\frac{\delta}{2}. \tag{22}$$

这些现象可用来产生精确互补的颜色；只须将一束平行白光通过被一块晶片隔开的两个尼科耳棱镜，先使两个棱镜平行（$\chi=0$）再使两个棱镜正交（$\chi=\pi/2$）即可．为了得到均匀场，必须具有足够好的准直光束，以保证不引入有影响的位相差．

如果入射到第一个起偏振器上的光来自位于透镜焦平面上的扩展不相干光源，则光源中每一点将在其共轭点上产生强度分布，与光源中所有其他各点无关．因此在象平面内观察到光的分布，它可以用等强度曲线来描绘，形成所谓晶片的干涉图．象平面内每一点对应一个进入和离开晶体的平行光线方向，因此必须考虑位相差δ随此方向的变化．只考虑起偏振器和检偏振器正交（即$\chi=\pi/2$）的情况就足够了；因为当二者平行时图同样是互补的，而其他情况给出的干涉图较不明显．

相应于给定入射方向的强度依赖于ϕ和δ，分别考虑ϕ或δ变化的影响是有用的．ϕ为常数的曲线称为同消色线（或刷形线），δ为常数的曲线称为等色线．同消色线依赖于晶片中光轴的取向，而与晶片厚度和波长无关，除非有轴的色散．等色线依赖于波法线方向和晶片厚度，之所以这样命名是因为采用白光时它们是一些颜色相同的线．这些曲线族中强度为零的一些曲线分别称为主同消色线和主等色线，它们分别按(21)式由$\sin 2\phi=0$和$\sin\frac{1}{2}\delta=0$给出．在这些曲线上，光的偏振状态与通过晶体前

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

相同. 这是因为在主同消色线上,通过检偏振器的振动方向与晶体中振动方向之一重合,而在主等色线上,两个出射光束之间的位相差是 2π 的整数倍. 这两组曲线是重叠的,但可以分别研究.

在研究这些曲线的形状以前,必须考虑位相差 δ 是怎样依赖于入射角的. 设 SA, AB', AB'' 分别代表 A 处的入射波和两个折

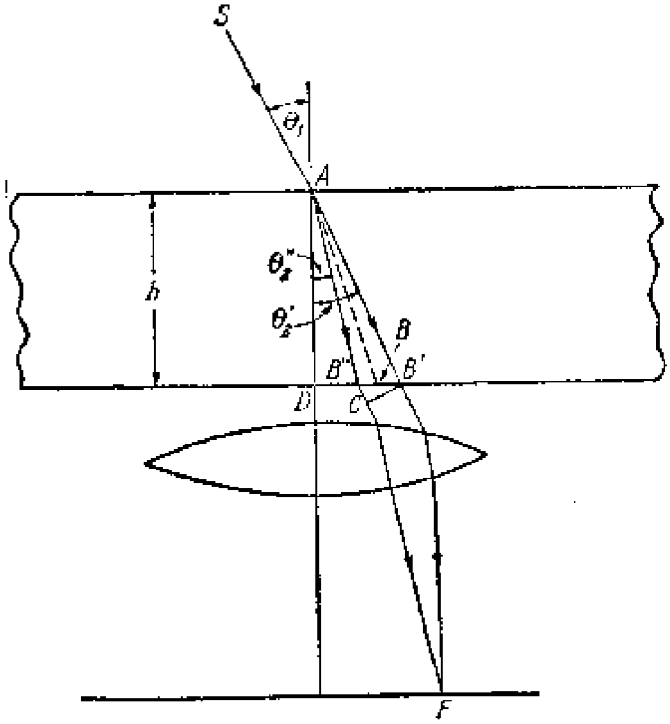


图 14.21 透过晶片的两个波之间的位相差的测定

射波的波法线, 设 θ_1, θ_2', θ_2'' 分别是入射角和两个折射角(见图 14.21).又设 λ 是第一种媒质(空气)中的波长, $\lambda'=\lambda/n'$ 和 $\lambda''=\lambda/n''$ 是两个折射波的波长. 从晶片出射的两条光线将互相平行,并且与入射波法线平行(见图 14.21),二者的位相差为

$$\delta = 2\pi\left[\frac{AB''}{\lambda''}+\frac{B''C}{\lambda}-\frac{AB'}{\lambda'}\right], \tag{23}$$

式中

$$AB'=\frac{h}{\cos\theta_2'},\quad AB''=\frac{h}{\cos\theta_2''}, \tag{24}$$

及

$$B''C = B''B'\sin\theta_1 = h\sin\theta_1(\tan\theta_2'-\tan\theta_2''). \tag{25}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

把(24)和(25)式代入(23)式，得出

$$\delta=2\pi h\left[\frac{1}{\cos\theta_2''}\left(\frac{1}{\lambda''}-\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2''}{\lambda}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\cos\theta_2'}\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2'}{\lambda}\right)\right]. \tag{26}$$

应用折射定律，可在第一个括弧中用 $\sin\theta_2''/\lambda''$ 代替 $\sin\theta_1/\lambda$，在第二个括弧中用 $\sin\theta_2'/\lambda'$ 代替 $\sin\theta_1/\lambda$，得出

$$\delta=2\pi h\left[\frac{\cos\theta_2''}{\lambda''}-\frac{\cos\theta_2'}{\lambda'}\right]=\frac{2\pi h}{\lambda}(n''\cos\theta_2''-n'\cos\theta_2'). \tag{27}$$

由于 $n''-n'$ 这一差值总比 n' 与 n'' 小很多，因此可以用一个近似表达式来代替(27)式。取一级近似，则有

$$n''\cos\theta_2''-n'\cos\theta_2'=(n''-n')\frac{d}{dn}(n\cos\theta_2)$$
$$=(n''-n')\left[\cos\theta_2-n\sin\theta_2\frac{d\theta_2}{dn}\right], \tag{28}$$

式中 n 是 n' 和 n'' 的平均值，θ_2 是相应的 θ_2' 和 θ_2'' 的平均值。对折射定律 $\sin\theta_1=n\sin\theta_2$ 求微商，保持 θ_1 不变，又有

$$0=\sin\theta_2+n\cos\theta_2\frac{d\theta_2}{dn}. \tag{29}$$

因此(28)式可写成

$$n''\cos\theta_2''-n'\cos\theta_2'=\frac{1}{\cos\theta_2}(n''-n'), \tag{30}$$

把(30)式代入(27)式，(27)式变为

$$\delta=\frac{2\pi h}{\lambda\cos\theta_2}(n''-n'). \tag{31}$$

$h/\cos\theta_2$ 这个量表示两条光线在晶片中的平均几何路程，它乘以 $(n''-n')$ 给出了相应的光程差。

回到扩展光源的情况，就必须考虑不同传播方向的波的透射。假定这些方向与晶片法线的夹角很小。每一个入射波用它通过图 14.21 中固定点 A 的波法线来表示。这些波经透镜会聚到焦点 F 上，这些 F 点同透射波法线 AB (AB' 和 AB'' 的平均值)与晶片下

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

表面交点 B 一一对应。因为 AB 对晶片法线 AD 的倾角很小，所以这些 F 点将构成这些 B 点的稍有畸变的象(投影)。因此，等色线的形状实质上是由 δ 为常数的 B 点轨迹给出的。特别是，对于主等色线，这个常数是 2π 的整数倍。如果想要看到改变晶片厚度的影响，只须把含有这些 B 点的平面平行它本身移动即可。

由此得出，绕某一点 A 作 $\delta(h, \theta_2)$ = 常数的等位相差曲面，亦称为等色曲面，并找出它们与 h = 常数的平面的交线，就可以看到所有的等色线。在确定上述曲面时，必须记住在 δ 的表达式(31)中折射率 n' 和 n'' 也是 θ_2 的函数。

我们将分别讨论由单轴晶片和双轴晶片得出的干涉图的形状。用极距

$$\rho = AB = \frac{h}{\cos\theta_2} \tag{32}$$

和 AB 对晶体媒质波法线的一条(或两条)光轴方向的夹角 θ(或夹角 θ_1 和 θ_2)来确定这些 B 点将是方便的(图 14.22)。

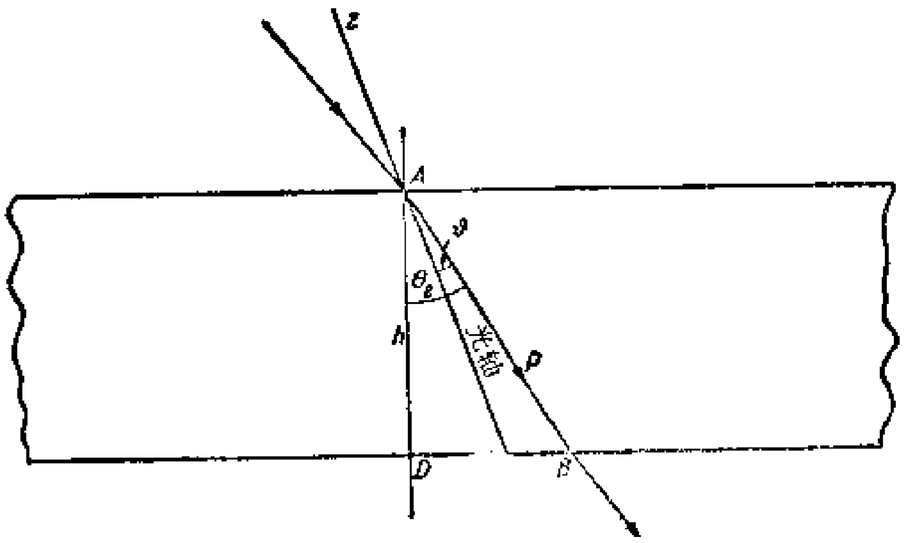


图 14.22 晶片的干涉图理论图示

§ 14.4.4 单轴晶片的干涉图

在单轴晶体中，根据 § 14.3(4)式，与光轴成 θ 角的波法线方

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

向所对应的相速度之间有下述关系:

$$v_p'^2 - v_p''^2 = (v_o^2 - v_e^2)\sin^2\theta. \qquad (33)$$

因为 $v_p = c/n$，其他的速度也有同样的关系，所以由 (33) 式得出:

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right)\sin^2\theta. \qquad (34)$$

这些折射率之差通常比它们的数值小很多，因此(34)式可以写成下述近似形式:

$$n'' - n' = (n_e - n_o)\sin^2\theta. \qquad (35)$$

将此式代入(31)式,并用(32)式,得出

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_e - n_o)\sin^2\theta. \qquad (36)$$

因此,等位相差曲面由下式给出:

$$\rho\sin^2\theta = C, \quad (C = \text{常数}). \qquad (37)$$

为了设想这些曲面的形状,取 z 轴沿光轴的笛卡儿坐标系. 则

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho^2\sin^2\theta = x^2 + y^2, \qquad (38)$$

根据(37)式,等位相差曲面由下式给出:

$$(x^2 + y^2)^2 = C^2(x^2 + y^2 + z^2). \qquad (39)$$

这些曲面可通过绕 z 轴旋转曲线

$$x^4 = C^2(x^2 + z^2) \qquad (40)$$

而产生，上式的一条典型曲线如图 14.23 所示. 离原点很远时 $(z^2 \gg x^2)$，曲线渐近逼近于抛物线

$$x^2 = \pm Cz. \qquad (41)$$

在 x 轴附近，

$$C^2 = \frac{x^4}{x^2 + z^2} = \frac{x^2}{1 + \frac{z^2}{x^2}} = x^2\left(1 - \frac{z^2}{x^2} + \cdots\right), \qquad (42)$$

因此,曲线在该处近似为双曲线

$$x^2 - z^2 = C^2. \qquad (43)$$

图 14.23 中用虚线画出了抛物线和双曲线.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

现在只要取(39)式的曲面与离原点不同距离 h 处代表晶片出射面的那些平面的截线，就能确定所有的等色线．由图 14.23 显然得知，可以出现形状很不相同的等色线，它们取决于晶体该面相对于光轴的取向．如果晶片表面垂直于光轴，则等色线显然为圆；如果表面的法线与光轴夹角很小，则等色线为近似于椭圆的闭合线；但如果法线与光轴夹角很大，则等色线近似于双曲线．

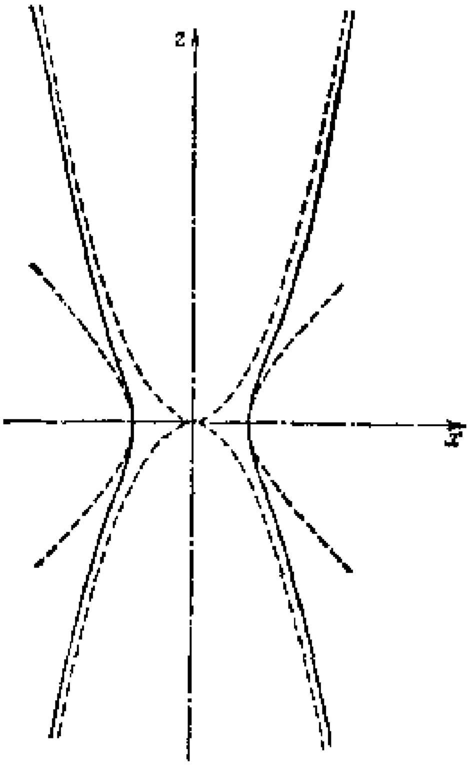


图 14.23　光学单轴晶体的等位相差曲面的子午曲线

主同消色线(在这些曲线上 $\sin 2\phi = 0$) 表现为一暗而模糊的十字，它的臂平行于起偏振器和检偏振器的方向，它的中心相应于与光轴平行的波法线方向．这是由下述事实得出的：对于晶体任一给定的波法线方向，振动方向平行或垂直于含此波法线及光轴的主平面．因而视场内相应于主平面与通过起偏振或检偏振尼科耳棱镜的振动方向平行的所有各点处都是暗的．

图 14.24 是单轴晶体的典型干涉图，主同消色线和主等色线清晰可见．

平面平行晶片的干涉图在偏振光镜方面有一重要的实际应用，偏振光镜是用来在大部分是非偏振的光束中检测小部分偏振光的仪器．萨伐尔 (Savart) 晶片[1] 就是一个例子．它是由两块石英晶片组成的，每一片切成使其光轴与晶片法线成 45°，再粘合在一起，使含晶片法线与光轴的平面相互垂直．因而在一块晶片中的寻常振动方向是另一块晶片中的非常振动方向，并且位相差符

1) 参看 *Ann. d. Physik*, **49** (1840), 292.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

号相反；当波垂直通过晶片时，位相差正好相互抵消．这种装置保证了接近正入射时位相差随波长的变化很小，因此可得到白光条纹．如果萨伐尔晶片放在两个正交的尼科耳棱镜之间，其主平面与两个尼科耳棱镜的方向成45°，则干涉图样由几乎是直线的亮暗条纹组成．如果去掉起偏振的尼科耳棱镜，使部分偏振光通过此系统，则将在非偏振分量所产生的均匀背景上叠加偏振分量所产生的条纹，甚至偏振光的比例很低时仍能测得这些条纹．当入射光的振动平面与萨伐尔晶片的主平面成45°时，这些条纹具有最大的衬比．

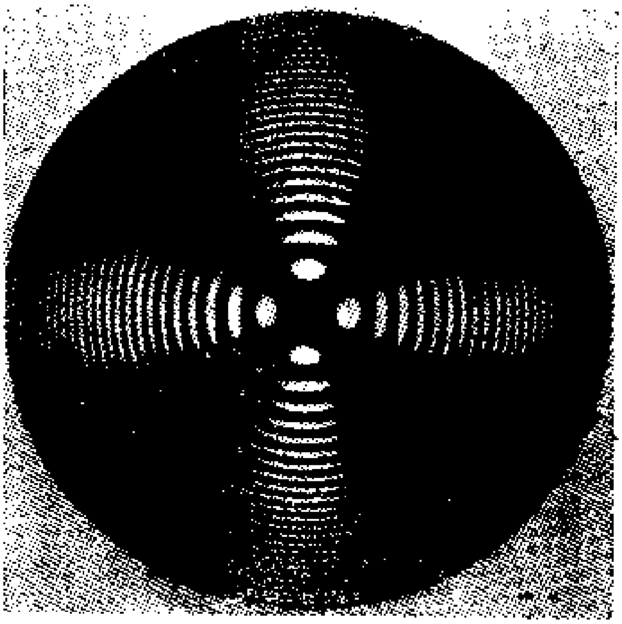


图 14.24　萤石的干涉图．垂直于光轴切割，放在两个正交的尼科耳棱镜之间

§ 14.4.5　双轴晶片的干涉图

对于平面平行双轴晶片，代替(33)式，有更一般的关系式：

$$v_p'^2 - v_p''^2 = (v_x^2 - v_z^2)\sin\theta_1\sin\theta_2, \tag{44}$$

它是由 § 14.3(18)式得出的．这里 θ_1 和 θ_2 是波法线方向 AB 与两个波法线光轴的夹角．因为 $v_p = c/n$，$v_x = c/n_x$，等等，所以由(44)式得出

$$\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2}\right) = \left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n_z^2}\right)\sin\theta_1\sin\theta_2, \tag{45}$$

因为各折射率之差比各折射率的数值小得多，所以近似得出

$$n'' - n' = (n_x - n_z)\sin\theta_1\sin\theta_2. \tag{46}$$

把(46)式代入(31)式，再令 $h/\cos\theta_2 = \rho$，得出位相差 δ 的表达式为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_z - n_x)\sin\theta_1\sin\theta_2. \tag{47}$$

可见现在等位相差曲面由下式给出:

$$\rho\sin\theta_1\sin\theta_2 = C,\ (C = \text{常数}). \tag{48}$$

在每一个光轴方向($\theta_1 = 0$ 或 $\theta_2 = 0$)上,ρ 趋于无穷,因此这些曲面渐近逼近于围绕光轴的柱面. 当 θ_1 很小时,θ_2 近似等于两光轴夹角 2β, 于是(48)式变为

$$\rho\sin\theta_1 = \frac{C}{\sin 2\beta}. \tag{49}$$

而 $\rho\sin\theta_1$ 是从光轴 $\theta_1 = 0$ 到曲面上一点的距离; $\rho\sin\theta_2$ 与此类似. 因此"渐近的柱面"是圆柱面. 等位相差曲面的一般形状如图 14.25 所示. 显然,在光轴附近,等色线是闭合曲线,近似于椭圆,并围绕着焦平面内与光轴对应的那两点.

同前,找出所有使晶体中振动方向与通过尼科耳棱镜的方向重合的波法线方向,就得出主同消色线. 我们可用 § 14.2.3(a)的作图,那里已证明过振动平面等分($\mathbf{N}_1$,$\mathbf{s}$)和($\mathbf{N}_2$,$\mathbf{s}$)两平面之间的夹角,$\mathbf{N}_1$ 和 $\mathbf{N}_2$ 是光轴方向. 因而如果晶体垂直 z 轴,透过两个尼科耳棱镜的振动方向平行于 x 和 y 轴,则主同消色线将位于 xz 平面和 yz 平面内,而干涉图将表现为一暗十字,它的一对臂通过与光轴对应的那些点.

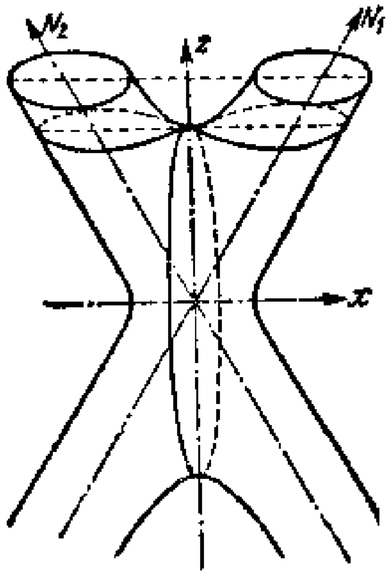


图 14.25 光学双轴晶体的等位相差曲面

更一般地说,如果晶体位于相对于两个尼科耳棱镜方向的其他任一取向,则主同消色线的形状将是等轴双曲线,其渐近线在透过尼科耳棱镜的振动方向上,其臂通过与光轴对应的那些点. 如果固定两个尼科耳棱镜,使晶片在它本身的平面内转动,则同消色线的图样将改变,但等色线除了转动以外仍保持不变;因为等色线是按与尼科耳棱镜方向

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

无关的条件定义的．双轴晶片的典型干涉图如图 14.26 所示．

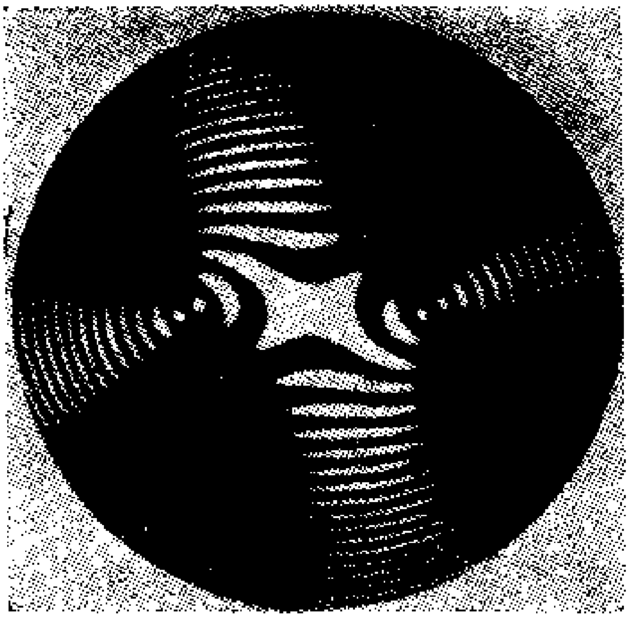


图 14.26　巴西黄玉的干涉图

§ 14.4.6　晶体媒质的光轴定位及其主折射率的测定

因为等色线是围绕一条(或两条)光轴的闭合曲线，所以干涉图的观测提供了确定晶体是单轴的还是双轴的以及光轴定位的现成方法． 在配有两个尼科耳棱镜的显微镜(称为**偏光显微镜**)中，或者去掉目镜把眼睛聚焦在物镜后焦平面上 (因而再现图 14.21 的条件)，或者在显微镜主体内插入一个附加透镜，使得通过目镜可以观察到物镜的后焦平面，就可观察到干涉图． 第二种方法的好处是看到干涉图较大的象，并可用目镜中已校准的标度在干涉图上作测量． 因而可测出双轴晶体光轴之间的夹角(当然必须计及光射出晶体时被折射这一事实)． 用这些方法，即使很小的晶体碎片，例如在薄的矿物切片中可能出现的碎片，也足以确定光轴的位置和测量它们的倾角．

晶体的主折射率 n_x, n_y, n_z 既可以通过测量棱镜中的偏向角或全反射角来确定，也可以浸没在一系列有递级折射率的液体中来确定．

棱镜法对单轴晶体比对双轴晶体更为方便． 棱镜切成使它的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

折射棱平行于波法线的光轴。于是寻常波和非常波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量分别与此棱垂直和平行。当一束非偏振光入射到棱镜一个表面上时，根据从棱镜出射的两条光线的偏离就能求出这两个折射率。利用一个尼科耳棱镜可区别寻常光线和非常光线。

浸没法依赖于下述事实：当透明物体浸没在折射率相同的液体中时它是看不见的。因为对于任一给定的传播方向，晶体有两个折射率，如果用非偏振光观察，它在任何液体中都是看得见的。然而，如果用偏振光，其 $\boldsymbol{D}$ 矢量沿晶体中振动方向之一，则晶体将在适当的折射率 n' 或 n'' 的液体中看不见。如果主介电轴的方向是已知的，则晶体可以这样取向，使得光依次平行于每一个轴通过，而 n' 和 n'' 可依次使之等于 n_x，n_y 和 n_z 中的两个。

如果主介电轴的方向是未知的，则把所研究的那种类型的大量晶体按随机的取向浸没在一系列有递级折射率的液体中就能得出很好的折射率估计值。对于入射光的两个振动方向，每一个晶体将在两个不同的折射率值时变得看不见。设这两个折射率为 n' 和 n''，由 § 14.3(12)不等式，有

$$n_x \leqslant n' \leqslant n_y \leqslant n'' \leqslant n_z. \tag{50}$$

因而 n_x 等于 n' 值的下限，n_z 等于 n'' 值的上限，n_y 既等于 n' 的上限又等于 n'' 的下限；如果已作足够多次测量，这些限应一致。

如果晶体是单轴的，则每一个晶体的折射率之一为 n_o，另一将在 n_o 和 n_e 之间的范围内。

§14.5 应力双折射和形式双折射

§ 14.5.1 应力双折射

当透明的各向同性媒质受到机械应力时，它会变为光学各向异性的。这种现象通称**应力双折射**或**光弹性效应**，它最早被布儒斯特[1]注意到，并得到有益的实际应用。我们将扼要说明如何用

1) D. Brewster, *Phil. Trans.* (1815), 60; (1816), 156. *Trans. Roy. Soc. Ed.*, 8 (1818), 369.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光学方法得出关于起初各向同性物质中应力状态的信息．作为准备，我们必须讨论物质的弹性常数和光学常数之间存在的关系．

弹性固体中的应力状态和应变状态是用二阶张量即应力张量 P_{kl} 和应变张量 r_{kl} 来表征的，二者的分量相互有线性关系． 这两个张量总是对称的，但它们的主轴一般不同于介电张量的主轴，如§14.1中所述，后者确定物体的光学性质．

当施加应力于物体时，介电张量改变，可以假定，在一级近似下，介电张量各分量的变化与六个应力分量有线性关系，因而也与六个应变分量有线性关系． 于是可引入两组新的系数即**应力-光学常数**和**应变-光学常数**来表征这些关系．

如果以未受应力的物质的主介电轴为参考坐标系，则波法线椭球的方程为

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x}+\frac{y^2}{\varepsilon_y}+\frac{z^2}{\varepsilon_z}=1. \qquad (1)$$

加上其分量为 $P_{xx}, P_{xy}, \cdots$ 的应力时，这个椭球改变为另一个椭球，其方程可写为

$$a_{xx}x^2+a_{yy}y^2+a_{zz}z^2+a_{yz}yz+a_{zx}zx+a_{xy}xy=1. \qquad (2)$$

根据我们的假定，每一个系数 a_{kl} 与(1)式中相应的系数相差一个 P 的线性函数．因此有六个关系式，其中两个典型的关系式为

$$\left.\begin{aligned}a_{xx}-\frac{1}{\varepsilon_x}&=q_{11}P_{xx}+q_{12}P_{yy}+q_{13}P_{zz}+q_{14}P_{yz}\\&\quad+q_{15}P_{zx}+q_{16}P_{xy},\\a_{yz}&=q_{41}P_{xx}+q_{42}P_{yy}+q_{43}P_{zz}\\&\quad+q_{44}P_{yz}+q_{45}P_{zx}+q_{46}P_{xy}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

在这些记号中，下标中每个数字 1—6 指的是一对轴，如：$1=xx$，$2=yy$，$3=zz$，$4=yz$，$5=zx$，$6=xy$.

系数 a_{kl} 与应变分量之间有一组类似的方程．应力的光学效应也可以用光线椭球的形变来描述，因而得到进一步的两组具有36个系数的线性方程．这些系数与波法线椭球的系数有关，因为这两个椭球的主轴总在相同的方向上，并且一个椭球的半轴是另

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一个椭球的半轴的倒数.

如果在结构中存在对称元素,则(3)式取更简单的形式. 对于立方晶系的晶体,三个主轴 x, y, 和 z 是等价的,结果在应力-光学常数之间下述关系成立[1]:

$$\left.\begin{aligned} &q_{11}=q_{22}=q_{33},\\ &q_{12}=q_{21}=q_{23}=q_{32}=q_{31}=q_{13},\\ &q_{44}=q_{55}=q_{66},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

所有其余系数均为零.

对于各向同性物质,(3)式在轴有任何变化时必保持不变. 这只有当应力-光学常数满足立方对称条件而且下述关系式

$$2q_{44}=q_{11}-q_{12} \tag{5}$$

成立时才有可能. 因此在这种情况下只有两个独立的常数. 因为现在所有的轴系统都是等价的,所以可以用任一组的轴,特别是用应力张量的主轴; 因此 $P_{yz}=P_{zx}=P_{xy}=0$, 并且代替(3)式有更简单的关系式:

$$\left.\begin{aligned} a_{xx}-\frac{1}{\varepsilon}&=q_{11}P_{xx}+q_{12}P_{yy}+q_{12}P_{zz},\\ a_{yy}-\frac{1}{\varepsilon}&=q_{12}P_{xx}+q_{11}P_{yy}+q_{12}P_{zz},\\ a_{zz}-\frac{1}{\varepsilon}&=q_{12}P_{xx}+q_{12}P_{yy}+q_{11}P_{zz},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$a_{yz}=a_{zx}=a_{xy}=0.$$

因而在这种情况下应力张量的主轴与波法线椭球的主轴相同,同根据对称考虑所预料的一样.

虽然象岩盐那样的立方晶体在无应变时是光学各向同性的,但在有应变时它们的行为就不同于象玻璃那样的真正各向同性物

1) 每一种晶系的应力-光学系数之间存在的关系的讨论,见 F. Pockels, *Ann. d. Physik*, **37** (1889), 158. 以及他的 *Lehrbuch der Kristalloptik*, (Leipzig, 1906), pp. 469—74. 它们的概述见 G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Vol. 21 (Berlin, Springer, 1929), 840.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

质了．通过观察放在两个正交的尼科耳棱镜(或其他起偏振装置，例如偏振片，参看§14.6.3)之间的物体，就可以方便地观察到应力的效应．考虑一片厚度为 h 的物质，使光正入射到它上面．设此片受到应力，使得应力张量的两个主轴，如 x 和 y，以及介电张量的两个主轴位于此片平面内，并与起偏振器和检偏振器的方向夹角为 ϕ 和 $\phi+\pi/2$，如§14.4.3中一样．法线椭球与 xy 平面的截线为椭圆

$$a_{xx}x^2+a_{yy}y^2=1, \tag{7}$$

式中 a_{xx} 和 a_{yy} 由(6)式给出．对于在此片中传播的两个波，折射率 n' 和 n'' 由下式给出：

$$n'=\frac{1}{\sqrt{a_{xx}}},\quad n''=\frac{1}{\sqrt{a_{yy}}}. \tag{8}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n''^2}&=a_{xx}-a_{yy}\\&=(q_{11}-q_{12})(P_{xx}-P_{yy}).\end{aligned} \tag{9}$$

实际上，n' 和 n'' 通常只与 n_x 稍有不同，因此近似地有

$$n''-n'=\frac{1}{2}n_x^3(q_{11}-q_{12})(P_{xx}-P_{yy}). \tag{10}$$

代入§14.4(31)式，得出从此片出射的两个波之间的位相差 δ：

$$\delta=\frac{\pi h}{\lambda}n_x^3(q_{11}-q_{12})(P_{xx}-P_{yy}). \tag{11}$$

因而位相差正比于 $P_{xx}-P_{yy}$，它表示在对 x 和 y 方向倾斜45°的平面上的切应力的两倍．在这种情况下，只有一个有关的应力-光学常数，即 $q_{11}-q_{12}$.

由此得出，如果观察放在两个正交的尼科耳棱镜之间的受到应力的玻璃片或透明塑料片，则会看到亮暗条纹，这些条纹是切应力等值线．这类“应力图样”如图14.27所示．只有当图样任一给定区域中应力系统的主轴与透过尼科耳棱镜的振动方向成45°时，才看到该区域中极大强度的条纹．当应力主轴与透过尼科耳

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

棱镜的方向平行时，条纹消失，视场变黑；因而应力系统的轴方向可以通过旋转两个正交尼科耳棱镜来确定，而切应力的数值可以从条纹的序得出．这种方法可用来研究工程结构中的应力；结构的模型用适当的塑料制成，用刚才描述过的方法直接观察压力效应．用这种方法常常避免了冗长的计算[1]．

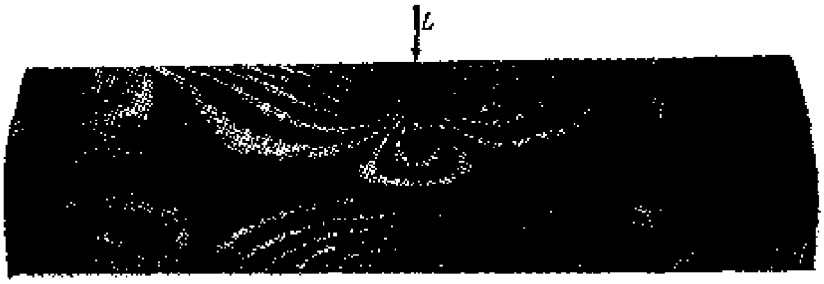


图 14.27 在集中负荷的作用下横梁的应力图样．负荷的位置用 L 表示，两端(未示出)被夹紧

§ 14.5.2 形式双折射

晶体的双折射性质可以用组成晶体分子的电各向异性来说明．然而，双折射可以由尺度上比分子大得多的各向异性产生，即此时有同样的光学各向同性物质颗粒有序排列，它们的大小比分子大很多而比波长小很多．于是我们谈到了**形式双折射**（form birefringence）．

根据光学测量常常可得到产生形式双折射的亚微观颗粒的信息．我们将通过研究形状为薄平行片的有规则的颗粒集合这种有些理想化的情况来说明这种方法的原理．设 t_1 是每一片的厚度，t_2 是相邻两片间隔的宽度(图 14.28)．又设 ε_1 是每一片的介电常数，ε_2 是这些片浸没在其中的媒质的介电常数．

设一平面单色波入射到此集合上，首先假定它的电矢量与这些片垂直，如果设片表面的线度比波长大得多而厚度 t_1 和 t_2 比波

---

1) 对于这种方法的充分论述，例如见 E. G. Coker and L. N. G. Filon, *A Treatise On Photoelasticity* (Cambridge University Press,1931)，或 M. M. Frocht, *Photoelasticity*, Vol. I (1941), Vol. II (1948), (New York, John Wiley).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

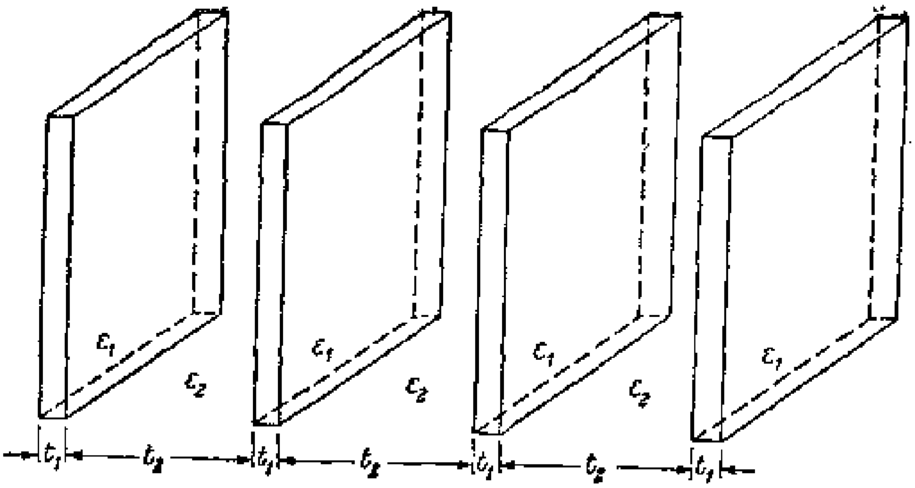


图 14.28 薄平行片的有规则集合

长小得多，则片内的场和空间的场可认为是均匀的．而且，根据§ 1.1.3，电位移的法向分量经过表面时必连续，在表面处，媒质的特性突然改变．因而电位移在片内和在空间必有相同的 $\boldsymbol{D}$ 值．如果 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 是相应的电场，则

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_1},\quad \boldsymbol{E}_2=\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_2},\tag{12}$$

总体积内的平均场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{t_1\dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_1}+t_2\dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_2}}{t_1+t_2}.\tag{13}$$

因此，有效介电常数 $\varepsilon_\perp$ 为

$$\varepsilon_\perp=\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{E}}=\frac{(t_1+t_2)\varepsilon_1\varepsilon_2}{t_1\varepsilon_2+t_2\varepsilon_1}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{f_1\varepsilon_2+f_2\varepsilon_1},\tag{14}$$

式中 $f_1=t_1/(t_1+t_2)$，$f_2=t_2/(t_1+t_2)=1-f_1$ 分别是这些片和周围媒质所占体积与总体积之比．

其次，设入射场的电矢量与这些片平行．根据§ 1.1.3，电矢量的切向分量经过不连续表面时是连续的，因此在这种情况下电场在片内和在空间将有相同的 $\boldsymbol{E}$ 值． 在这两个区域内的电位移为

$$\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_1\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{D}_2=\varepsilon_2\boldsymbol{E},\tag{15}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，平均电位移 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D}=\frac{t_1\varepsilon_1\boldsymbol{E}+t_2\varepsilon_2\boldsymbol{E}}{t_1+t_2}. \tag{16}$$

所以现在有效介电常数由下式给出：

$$\varepsilon_{/\!/}=\frac{D}{E}=\frac{t_1\varepsilon_1+t_2\varepsilon_2}{t_1+t_2}=f_1\varepsilon_1+f_2\varepsilon_2. \tag{17}$$

因为有效介电常数对于所有平行于这些片的方向都相同，但对于垂直于这些片的方向则有所不同，所以此集合的表现如同光轴垂直于片的平面的单轴晶体。 $\varepsilon_{/\!/}-\varepsilon_{\perp}$ 这一差值总是正的，因为根据(14)和(17)式，

$$\varepsilon_{/\!/}-\varepsilon_{\perp}=\frac{f_1f_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{f_1\varepsilon_2+f_2\varepsilon_1}\geqslant 0. \tag{18}$$

寻常波的电矢量垂直于光轴，即平行于片平面。(18)式意味着此集合的表现总是如同一个**负单轴晶体**(参看 § 14.3.2)。 利用折射率表示，(18)式可写成

$$n_e^2-n_o^2=-\frac{f_1f_2(n_1^2-n_2^2)^2}{f_1n_2^2+f_2n_1^2}. \tag{19}$$

对于形状较不理想化的颗粒集合，计算自然更加复杂[1]。

一种有重要实际意义的情况是平行同类细圆杆的集合。 维纳[2] 已证明，如果这些杆占总体积的很小部分 ($f_1\ll 1$)，则代替(19)式，有

$$n_e^2-n_o^2=\frac{f_1f_2(n_1^2-n_2^2)^2}{(1+f_1)n_2^2+f_2n_1^2}. \tag{20}$$

因此，这种集合的表现如同一个**正单轴晶体**，其光轴与杆轴平行。

形式双折射的观察在生物显微术中是有用的。观察所得差值的符号表明颗粒的形状更接近于杆还是更接近于片，如果 n_1 和 n_2

---

1) 一般的论述见 O. Wiener, *Abh. Sächs. Ges. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.* No. 6. **32** (1912), 575. 与椭球颗粒有关的公式也见于 W. L. Bragg and A. B. Pippard, *Acta Cryst.*, **6** (1953), 865.

2) 上述引文中 581 页。 瑞利也计算过平行圆柱长方阵列的主介电常数，见 *Phil. Mag.*, (5), **34** (1892), 481, 只要折射率 n_1 与 n_2 之差很小，即使 f_1 的值不比 1 小很多，(20)式与他的结果仍然一致。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是已知的，则有可能根据(19)式(20)式估计颗粒所占体积百分比。为了区别颗粒物质中的形式双折射和固有双折射，可改变媒质的折射率 n_2；当 $n_2=n_1$ 时形式双折射将消失，而固有双折射不受 n_2 变化的影响。如果两种双折射都存在，则 $|n_e^2-n_o^2|$ 随 n_2 变化的图形将在 $n_2=n_1$ 处有一极小值，但不为零。

产生形式双折射的颗粒有序化可以是永久的或半永久的，例如在烟草斑纹病毒晶体中[1]，或者，它也可以是悬浮在液体中的同类颗粒的暂时有序化。如果颗粒是无规取向的，则液体中同类颗粒的悬浮呈现光学各向同性，当液体稳定时通常是这种情况；然而，如果使液体流动，则颗粒有排列在一特定方向上的趋势，因此这种集合的表现如同一个晶体。把悬浮液放在两同轴圆筒之间，其一旋转而另一固定，光沿着平行于圆筒轴的方向传播，观察放在两个正交的尼科耳棱镜之间的液体，就可以看到这种效应[2]。这种现象最早被麦克斯韦[3]观察到，它有助于研究液体越过障碍物的流动，给出关于速度梯度的方向和大小的信息。

§14.6 吸收晶体

§14.6.1 光在吸收的各向异性媒质中的传播

到此为止已讨论过的晶状媒质的光学性质都是用介电张量 ε_{kl} 表征的。为了描述不仅是各向异性的而且是有吸收的媒质，必须另外再引入**电导率张量** σ_{kl}。这两个张量的主轴方向一般不相同，因此光在这种媒质中传播的理论相当复杂。然而对于较高对称类(至少是斜方对称)，这两个张量的主轴方向重合，我们将限于

---

1) 参看 M. H. F. Wilkins, A. R. Stokes, W. E. Seeds, and G. Oster, *Nature*, **166** (1950), 127—9.

2) 根据这种测量确定颗粒取向的讨论，见 P. Boeder, *Z. f. Phys.*, **75** (1932), 258, 和 J. T. Edsall, *Advances in Colloidal Science*, Vol. I, edited by E. O. Kraemer (New York, Interscience Publishers Inc.,1942), p. 269.

3) J. C. Maxwell, *Proc. Roy. Soc.*, **22** (1873), 46. 也见于他的 *Collected Papers*, Vol. 2 (Cambridge University Press, 1890), 379.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

注意这类晶体，因为它们能说明一般理论具有的基本特征。于是，只须用复介电常数 $\hat{\varepsilon}_x$, $\hat{\varepsilon}_y$ 和 $\hat{\varepsilon}_z$ 代替实介电常数 ε_x, ε_y 和 ε_z. 我们将看到，只要所有依赖于 $\hat{\varepsilon}_x$, $\hat{\varepsilon}_y$ 和 $\hat{\varepsilon}_z$ 的量都假定是复数，前面所有的晶体光学公式在形式上都保留下来。

从导电媒质的麦克斯韦方程即

$$\text{curl}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \text{curl}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}} \tag{1}$$

出发，并考虑一个平面阻尼波的传播。用复数表示，矢量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 都各自正比于

$$\exp\left[i\omega\left(\frac{\hat{n}}{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}) - t\right)\right].$$

与 § 14.2(3)式类似，得出下述方程：

$$\hat{n}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{D} + \frac{4\pi}{i\omega}\boldsymbol{j}, \quad \hat{n}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}. \tag{2}$$

令 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, 并在这两个方程中消去 $\boldsymbol{H}$, 得出

$$\mu\left[\boldsymbol{D} + \frac{4\pi i}{\omega}\boldsymbol{j}\right] = \hat{n}^2[\boldsymbol{E} - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E})]. \tag{3}$$

如果取坐标轴在主介电张量的方向上(根据我们的假定，它们与电导率张量的方向重合)，则有

$$\left.\begin{aligned} &D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z, \\ &j_x = \sigma_x E_x, \quad j_y = \sigma_y E_y, \quad j_z = \sigma_z E_z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

把(4)式代入(3)式，并引入复介电常数

$$\hat{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_k, \quad (k = x, y, z) \tag{5}$$

(3)式变为

$$\mu\hat{\varepsilon}_k E_k = \hat{n}^2[E_k - s_k(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s})]. \tag{6}$$

此式与 § 14.2(18)式形式上相同，其中实常数 ε_k 和 n 用复常数 $\hat{\varepsilon}_k$ 和 $\hat{n}_k$ 代替。把(6)式重写为下述形式：

$$E_k = \frac{\hat{n}^2 s_k(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s})}{\hat{n}^2 - \mu\hat{\varepsilon}_k}, \tag{7}$$

通过与 § 14.2 中同样的论证(或简单地利用形式替换 $\varepsilon_k \to \hat{\varepsilon}_k$,

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$n \to \hat{n}$)，得出菲涅耳方程

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{\hat{n}^2}-\frac{1}{\mu\hat{\varepsilon}_x}}+\frac{s_y^2}{\frac{1}{\hat{n}^2}-\frac{1}{\mu\hat{\varepsilon}_y}}+\frac{s_z^2}{\frac{1}{\hat{n}^2}-\frac{1}{\mu\hat{\varepsilon}_z}}=0. \tag{8}$$

引入复速度

$$\hat{v}_p=\frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}}}=\frac{c}{\hat{n}},\quad \hat{v}_x=\frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}_x}}=\frac{c}{\hat{n}_x}, \tag{9}$$

等等，可再次把菲涅耳方程写成§14.2(24)式的形式：

$$\frac{s_x^2}{\hat{v}_p^2-\hat{v}_x^2}+\frac{s_y^2}{\hat{v}_p^2-\hat{v}_y^2}+\frac{s_z^2}{\hat{v}_p^2-\hat{v}_z^2}=0. \tag{10}$$

这些关系式严格类似于无吸收晶体那些关系式，然而它们的物理解释稍有不同。由(8)式或(10)式，再次得出$\hat{n}(\boldsymbol{s})$的二次方程，即得出相应于每个传播方向$\boldsymbol{s}$的两个折射率和两个主振动$\boldsymbol{D}'$和$\boldsymbol{D}''$。由(7)式看出，比值$D_x:D_y:D_z$是复数，因此主振动一般不再是线振动，而是椭圆振动。还有一个差别是电位移矢量不再垂直于波法线$\boldsymbol{s}$。因为用$\boldsymbol{s}$点乘(2)式第一式得出

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{4\pi}{i\omega}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{j}=\frac{4\pi}{i\omega}\left[\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}s_xD_x+\frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}s_yD_y+\frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}s_zD_z\right], \tag{11}$$

(11)式右边一般不为零。然而，如果比值$4\pi\sigma_k/\omega\varepsilon_k$比1小很多，则$\boldsymbol{D}$在$\boldsymbol{s}$方向上的分量将比$\boldsymbol{D}$本身小很多。

如果假定吸收很小，即不包括金属而只考虑某种程度上透明的物质，则进一步的分析就相当简化了。我们将限于讨论这种情况。形式上说，弱吸收意味着衰减指数κ的二次幂与1相比可以忽略。因此利用(9)式可以写出

$$\left.\begin{aligned}&\hat{n}=n(1+i\kappa),\ \hat{n}^2=n^2(1+2i\kappa),\\&\hat{v}_p=\frac{c}{n(1+i\kappa)}=v_p(1-i\kappa),\quad \hat{v}_p^2=v_p^2(1-2i\kappa),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

以及带下标x，y和z的类似表达式，例如

$$\hat{n}_x=n_x(1+i\kappa_x),\quad \hat{v}_x=c/\hat{n}_x=v_x(1-i\kappa_x),\ 等等.$$

又

$$\mu\hat{\varepsilon}_k=\hat{n}_k^2=n_k^2(1+2i\kappa_k)=\mu\varepsilon_k(1+2i\kappa_k),\quad (k=x,y,z) \tag{13}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

与(5)式比较，得出

$$\kappa_k = \frac{2\pi}{\omega}\frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}. \tag{14}$$

回到菲涅耳方程(10)式，把实部和虚部分开．(10)式的一个典型项为

$$\frac{s_x^2}{\hat{v}_p^2 - \hat{v}_x^2} = \frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2 - 2i[\kappa v_p^2 - \kappa_x v_x^2]}$$
$$= \frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2}\left[1 + 2i\frac{\kappa v_p^2 - \kappa_x v_x^2}{v_p^2 - v_x^2}\right], \tag{15}$$

由此得出(10)式的实部就是早先§14.2(24)式形式的菲涅耳方程．虚部给出下述方程:

$$\kappa v_p^2\left\{\frac{s_x^2}{(v_p^2 - v_x^2)^2} + \frac{s_y^2}{(v_p^2 - v_y^2)^2} + \frac{s_z^2}{(v_p^2 - v_z^2)^2}\right\}$$
$$= \frac{\kappa_x v_x^2 s_x^2}{(v_p^2 - v_x^2)^2} + \frac{\kappa_y v_y^2 s_y^2}{(v_p^2 - v_y^2)^2} + \frac{\kappa_z v_z^2 s_z^2}{(v_p^2 - v_z^2)^2}. \tag{16}$$

同前，对于任一给定的波法线方向 $\mathbf{s}$，菲涅耳方程一般给出两个相速度 v_p。现在这两个波携带的能量一部分被吸收了，(16)式给出了两个衰减指数的近似值．

我们可以把 κ 的公式表示为不同的形式．由(7)，(4)，(9)和(13)式，

$$D_k = \frac{c^2}{\mu}\frac{\varepsilon_k}{\hat{\varepsilon}_k}\frac{s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})}{\hat{v}_k^2 - \hat{v}_p^2}$$
$$= -\frac{c^2}{\mu}\frac{s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})}{v_p^2 - v_k^2}\left[1 + 2i\frac{(\kappa - \kappa_k)v_p^2}{v_p^2 - v_k^2}\right], (k = x, y, z), \tag{17}$$

式中再次只保留到衰减指数的一次幂项．现在(17)式中的虚数项包含两个 κ 的差，在许多情况下可以忽略，这意味着忽略振动的椭圆性．在这种近似中，属于任一给定波法线 $\mathbf{s}$ 的两个 $\mathbf{D}$ 矢量的方向与具有同一(实)主介电常数的无吸收晶体相同．因此有

$$\frac{s_k^2}{(v_p^2 - v_k^2)^2} = \left(\frac{\mu}{c^2}\right)^2\frac{D_k^2}{(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E})^2}, \tag{18}$$

并且(16)式可写为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\kappa v_p^2 = \frac{\kappa_x v_x^2 D_x^2 + \kappa_y v_y^2 D_y^2 + \kappa_z v_z^2 D_z^2}{D^2}. \qquad (19)$$

随着 v_p 趋近于主速度 v_k 之一，这个公式显然会不成立，因为我们所忽略的(17)式中的虚部在分母中包含差值 $v_p^2 - v_k^2$ (参看§ 14.6.3 末的评论).

因为属于一给定波法线方向 $\mathbf{s}$ 的两个系数 κ' 和 κ'' 一般是不同的，所以这两个波被吸收的强度不同. 这两个系数可能依赖于频率，并且按不同的方式随频率变化，因此，如果白光入射到晶体上，则晶体一般将出现颜色，并且这颜色将取决于入射光的振动方向. 这种现象通称为**多向色性**；在单轴晶体的情况下，也称为**二向色性**；在双轴晶体的情况下称为**三向色性**[1].

对于**单轴晶体** [$\hat{\varepsilon}_x = \hat{\varepsilon}_y = \hat{\varepsilon}_o$, $\hat{\varepsilon}_z = \hat{\varepsilon}_e$; 又 $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_o$, $\kappa_z = \kappa_e$]，关系式采取更简单的形式. 与无吸收的单轴晶体的情况一样，菲涅耳方程分解为两个因子(参看§ 14.3.2)，给出

$$\left.\begin{aligned} \hat{v}_p'^2 &= \hat{v}_o^2, \\ \hat{v}_p''^2 &= \hat{v}_o^2 \cos^2\theta + \hat{v}_e^2 \sin^2\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

同前，式中 θ 是波法线 $\mathbf{s}$ 与光轴的夹角. 将实部和虚部分开，第一个方程给出

$$v_p' = v_o, \quad \kappa_p' = \kappa_o, \qquad (21a)$$

第二个方程给出

$$v_p''^2 = v_o^2 \cos^2\theta + v_e^2 \sin^2\theta, \quad \kappa_p'' v_p''^2 = \kappa_o v_o^2 \cos^2\theta + \kappa_e v_e^2 \sin^2\theta, \qquad (21b)$$

式中再次忽略了包含衰减指数二次幂的项. 我们看到，寻常波的吸收对于所有的传播方向都是相同的.

对于**双轴晶体**，关系式复杂得多了. 我们将限于注意有意义的特殊情况. 如同§ 14.3.3，首先考虑 $s_x = 0$ 的那些传播方向. 于是与§ 14.3(6)式类似，由菲涅耳方程(10)给出下述方程:

---

1) 这种术语是由下述事实得出的，对于单轴晶体有两个特征颜色，对于双轴晶体有三个特征颜色. 但有些作者把二向色物质指为吸收系数依赖于入射光偏振状态的任何物质.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned} v_p'^2 &= v_x^2, \\ v_p''^2 &= v_z^2 s_y^2 + v_y^2 s_z^2. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

将实部和虚部分开，得出相应于波法线方向 $s(o, s_y, s_z)$ 的两个速度和两个衰减指数：

$$v_p'^2 = v_x^2, \quad \kappa_p' = \kappa_x, \tag{23a}$$

和

$$v_p''^2 = v_z^2 s_y^2 + v_y^2 s_z^2, \quad \kappa_p'' v_p''^2 = \kappa_z v_z^2 s_y^2 + \kappa_y v_y^2 s_z^2. \tag{23b}$$

当然，对于垂直于 y 和 z 方向的传播，类似的关系式也成立.

一般不存在使两根 v_p' 和 v_p'' 相等的实值 s_y 和 s_z. 可找出实相速度 v_p' 和 v_p'' 相等的方向，但相应的衰减指数（κ' 和 κ''）一般是不同的.

其次考虑沿与波法线光轴偏离不太大的方向的传播. 为了应用(19)式，必须确定 $\boldsymbol{D}'$ 和 $\boldsymbol{D}''$ 的方向. 利用 § 14.2.3 中确定的结果可以做到这一点，根据那里的结果，两个振动平面 $(\boldsymbol{D}', \boldsymbol{s})$ 和 $(\boldsymbol{D}'', \boldsymbol{s})$ 等分平面 $(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{s})$ 和 $(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{s})$ 之间的夹角，其中 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 是波法线的轴. 设 ϕ 是平面 $(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{s})$ 与 xz 平面(它含两个光轴)的夹角. 因为平面 $(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{s})$ 近似平行于 xz 平面，由刚引用过的定理得出，$\boldsymbol{D}'$ 与 xz 平面的夹角近似为 $\phi/2$ (见图 14.29). 因此 $\boldsymbol{D}'$ 在 xz 平面内的分量为 $D'\cos(\phi/2)$. 为了得出 x 分量，必须把这个矢量投影于 x 轴上. 因为 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{N}_1$ 近似地重合，所以投影角近似地等于光轴 $\boldsymbol{N}_1$ 与 z 轴的夹角，结果 (见图 14.30) $D_x' = D'\cos\beta \times \cos(\phi/2)$. 用类似的方法可得出其他分量. 因此

$$\left.\begin{aligned} D_x' &= D'\cos\frac{\phi}{2}\cos\beta, \\ D_y' &= D'\sin\frac{\phi}{2}, \\ D_z' &= -D'\cos\frac{\phi}{2}\sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

矢量 $\boldsymbol{D}''$ 与 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{D}'$ 正交；在(24a)式中用 $\phi/2 + \pi/2$ 代替 $\phi/2$，即

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

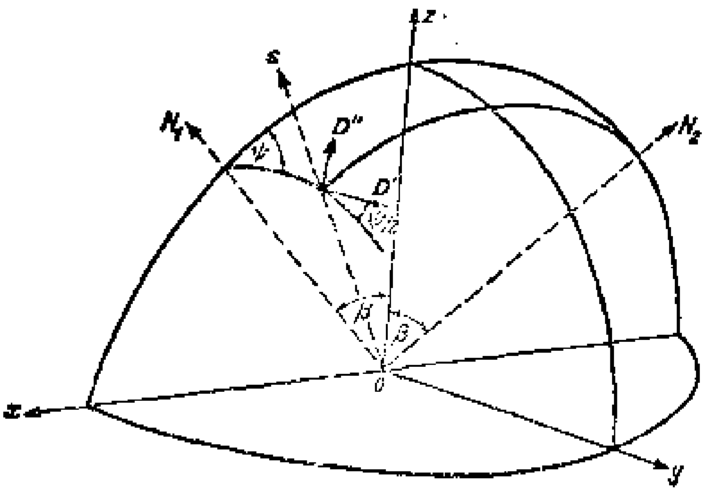


图 14.29 吸收晶体的理论图示

可得出它的分量为

$$D''_x = -D''\sin\frac{\psi}{2}\cos\beta,\quad D''_y = D''\cos\frac{\psi}{2},$$

$$D''_z = D''\sin\frac{\psi}{2}\sin\beta. \tag{24b}$$

把(24a)和(24b)式代入(19)式，又利用近似式 $v'_p = v''_p = v_y(v_x > v_y > v_z)$，因为我们限于讨论与光轴偏离不太远的方向，所以上述近似式可认为是合理的． 因此得出所要求的衰减指数 κ' 和 κ''：

$$\left.\begin{aligned}\kappa' v_y^2 &= (\kappa_x v_x^2\cos^2\beta + \kappa_z v_z^2\sin^2\beta)\cos^2\frac{\psi}{2} + \kappa_y v_y^2\sin^2\frac{\psi}{2},\\ \kappa'' v_y^2 &= (\kappa_x v_x^2\cos^2\beta + \kappa_z v_z^2\sin^2\beta)\sin^2\frac{\psi}{2} + \kappa_y v_y^2\cos^2\frac{\psi}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

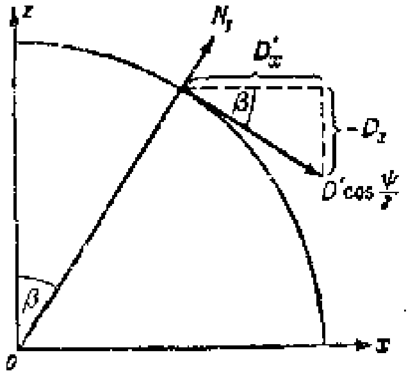


图 14.30 吸收晶体的理论图示

鉴于(19)式中包含的近似，当 s 紧密靠近光轴时，不能指望这些公式仍然有效．在波法线沿着光轴的极限情况下，角度 ψ 是不确定的；为了得出相应的衰减指数，要回到非涅耳方程． 对于 xz 平面内 $(s_y = 0)$ 的任一 s 方向，同(23)式一样，使实部和虚部分别相等，得出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\left.\begin{aligned} v_p'^2 &= v_y^2, \quad \kappa_p' = \kappa_y, \\ v_p''^2 &= v_x^2 s_z^2 + v_z^2 s_x^2, \quad \kappa_p'' v_p''^2 = \kappa_x v_x^2 s_z^2 + \kappa_z v_z^2 s_x^2. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

特别是,对于光轴 $s_x = \sin\beta$, $s_z = \cos\beta$, 式中 β 是由 § 14.3(11)式给出的两光轴之一与 z 轴的夹角. 又 $v_p' = v_p'' = v_y$, 如果又用 $\kappa_\perp$ 代替 κ', $\kappa_{/\!/}$ 代替 κ'', 则(26)式右边两个方程变为:

$$\left.\begin{aligned} \kappa_\perp &= \kappa_y, \\ \kappa_{/\!/} v_y^2 &= \kappa_x v_x^2 \cos^2\beta + \kappa_z v_z^2 \sin^2\beta. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$\kappa_\perp$ 是垂直于光轴平面偏振的 $\boldsymbol{D}$ 波的衰减指数, $\kappa_{/\!/}$ 是在光轴平面内偏振的 $\boldsymbol{D}$ 波的衰减指数. 因而沿光轴方向传播的波的吸收依赖于它的振动方向.

把(27)式代入(25)式, 用衰减指数 $\kappa_{/\!/}$ 和 $\kappa_\perp$ 以及偏振方位角 ϕ 来表示 κ' 和 κ'' 是很方便的. 这就得出

$$\left.\begin{aligned} \kappa' &= \kappa_{/\!/} \cos^2\frac{\phi}{2} + \kappa_\perp \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{\kappa_{/\!/} + \kappa_\perp}{2} + \frac{\kappa_{/\!/} - \kappa_\perp}{2}\cos\phi, \\ \kappa'' &= \kappa_{/\!/} \sin^2\frac{\phi}{2} + \kappa_\perp \cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{\kappa_{/\!/} + \kappa_\perp}{2} - \frac{\kappa_{/\!/} - \kappa_\perp}{2}\cos\phi. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

§ 14.6.2 吸收晶片的干涉图

现在扼要地讨论垂直于波法线光轴切成的吸收晶片的干涉效应. 其理论与无吸收晶片差别不很大, 唯一的重要区别是两条干涉光线被吸收的强度不同, 结果条纹可见度降低. 其他的结论尤其是位相差的表达式在我们的近似中保持不变, 因为传播的几何定律同以前一样.

在吸收媒质中传播距离 l 后, 根据 § 13.1(19)式, 平面波的振幅按因子 $\exp\{-\omega n\kappa l/c\}$ 减小. 因此采用与 § 14.4.3 中相同的安排和记号(参看图 14.20), 由晶片出射的主振动振幅由下式给出[参看 § 14.4(13)式]

$$OB = Ee^{-\frac{\omega\kappa'}{v'}l}\cos\phi, \quad OC = Ee^{-\frac{\omega\kappa''}{v''}l}\sin\phi. \tag{29}$$

这里 $l = h/\cos\theta_2$, h 是晶片的厚度, θ_2 是晶片中的波法线与轴的夹角, 假定两个波在晶片中的两条路程相同; 如果限于讨论接近

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

光轴的波法线方向，就这样近似．在同样的近似下，可取(29)式中的 $v' = v'' = v_y$．令

$$u = \frac{\omega l}{v_y} \sim \frac{\omega l}{v'} \sim \frac{\omega l}{v''} \tag{30}$$

是方便的．以此替换，则

$$OB = Ee^{-\kappa' u}\cos\phi,\quad OC = Ee^{-\kappa'' u}\sin\phi. \tag{31}$$

代替§14.4(14)式，现在得出，通过起偏振器和检偏振器后，波振幅的表达式为(参看图 14.20)

$$\begin{aligned} OF &= Ee^{-\kappa' u}\cos\phi\cos(\phi - \chi), \\ OG &= Ee^{-\kappa'' u}\sin\phi\sin(\phi - \chi). \end{aligned} \tag{32}$$

引至干涉的光的总强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta, \tag{33}$$

式中，除去非必要的比例因子外，$I_1 = OF^2$，$I_2 = OG^2$，位相差 δ 的计算同前．

现在考察某些有意义的特殊情况．

(a) 单轴晶体

在这种情况下，有

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_y = v_o, \quad v_z = v_e, \\ \kappa_x &= \kappa_y = \kappa_o, \quad \kappa_z = \kappa_e. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

非常光线的振动方向在主平面内，即在含波法线与光轴的平面内．因此，可以使非常波的 $\boldsymbol{D}$ 矢量与起偏振器的方向 OP 的夹角与(32)式中的角 ϕ 等同．然而，为了与(21a)和(21b)式保持一致，必须将 κ' 和 κ'' 互换．因两个尼科耳棱镜正交($\chi = \pi/2$)，由(32)式，有

$$OF = Ee^{-\kappa' u}\cos\phi\sin\phi,\quad OG = -Ee^{-\kappa'' u}\sin\phi\cos\phi, \tag{35}$$

由(33)式得出

$$I = \frac{E^2}{4}\sin^2 2\phi\{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}\cos\delta\}. \tag{36a}$$

对于光轴，$\kappa' = \kappa''$，$\delta = 0$，(36a)式化为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$I_0 = 0; \tag{36b}$$

因此干涉图样中央(相应于光轴的一点)是暗的. 由 $\sin 2\phi = 0$ 即 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/2$ 给出的暗的同消色线横跨视场. 因而同消色线具有十字形,它的臂平行于起偏振器和检偏振器的方向(参看 § 14.4.4). 强度的极小值和极大值为

$$\left.\begin{aligned} I_{极小} &= \frac{E^2}{4}\sin^2 2\phi\{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}\}, \\ I_{极大} &= \frac{E^2}{4}\sin^2 2\phi\{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} + 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}\}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

因此,条纹可见度 $\mathscr{V}$ 为

$$\mathscr{V} = \frac{I_{极大} - I_{极小}}{I_{极大} + I_{极小}} = \frac{2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}}{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u}} = \frac{1}{\cosh\{(\kappa' - \kappa'')u\}}. \tag{38}$$

因而 κ' 与 κ'' 之差越小, 可见度越大. 因为对于接近光轴的波法线方向(θ很小), κ' 和 κ'' 接近相等, 所以只要有足够的光透过晶片, 在这个区域内条纹将清晰可见. 如果 κ_o 比 κ_e 小得多(例如镁铂氰化物), 则在接近光轴处将有相对地小的吸收, 中央条纹将是亮的. 如果 κ_o 比 κ_e 大得多(例如电气石), 则在接近光轴处的吸收相对将是最弱的,中央条纹是暗的. 在这两种情况下,可见度从场的中央向边缘下降. 如果 κ_o 和 κ_e 接近相等, 干涉图除了可见度随着与中央处的距离增加而下降以外, 与无吸收晶体的干涉图类似.

(b) 双轴晶体

我们再一次限于两个尼科耳棱镜正交的情况($\chi = \pi/2$), 并假定晶片表面垂直于光轴之一(N_1). 只考虑传播方向接近这个轴的波.

设 N_1, N_2 和 Q 是两光轴和波法线与晶片出射表面的交点. 又设 ϕ 是直线 N_1Q 与 N_1N_2 的夹角, α 是光轴平面与透过起偏振器 P 的振动平面之间的夹角.

如果 $N_1Q \ll N_1N_2$, 则 $\boldsymbol{D}'$ 振动方向与 N_1N_2 的夹角近似为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

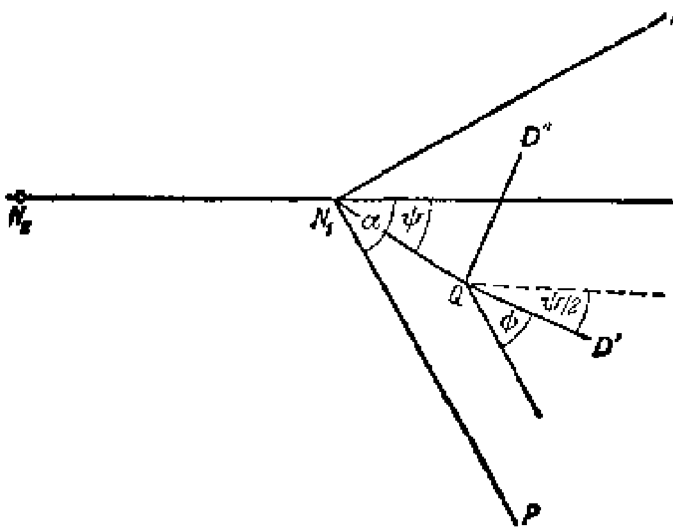


图 14.31 吸收的双轴晶片上干涉理论的图示

$\psi/2$，因此 D' 与方向 OP 之间的夹角 ϕ 近似为(见图 14.31)

$$\phi = \alpha - \frac{\psi}{2}. \tag{39}$$

所以，导至干涉的波的振幅(32)式为

$$OF = E\cos\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right)e^{-\kappa' u},$$

$$OG = -E\sin\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right)e^{-\kappa'' u}. \tag{40}$$

因此强度为

$$I = \frac{E^2}{4}\sin^2(2\alpha - \psi)\{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}\cos\delta\}. \tag{41a}$$

对于沿光轴方向传播的波，ψ 是不确定的. 在这种特殊情况下，我们把振动分解为平行和垂直于含光轴平面的分量，即令 $\psi = 0$，并用 $\kappa_{\parallel}$ 和 $\kappa_{\perp}$ 代替 (41a) 式中的 κ' 和 κ''，[参看 (28) 式]. 又 $\delta = 0$，因此代替 (41a) 式，得出

$$I_0 = \frac{E^2}{4}\sin^2 2\alpha\{e^{-\kappa_{\parallel} u} - e^{-\kappa_{\perp} u}\}^2. \tag{41b}$$

(41a) 式表明，沿着 $\sin(2\alpha - \psi) = 0$ 的一条线，强度为零，这是主同消色线. 而在无吸收晶体情况下同消色线通过相应于光轴的点，现在情况不再是这样了，除非如(41b)式所示，$\alpha = 0$ 或

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\alpha=\pi/2$,即除非起偏振器的平面平行或垂直于含两光轴的平面.

由 $\cos\delta=1$ 即 $\delta=0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \cdots$ 给出的暗等色线是围绕相应于光轴的点的环. 仅当 κ' 和 κ'' 接近相等时,由(38)式给出的条纹可见度才是看得见的. 根据(28)式,当 ϕ 接近 $\pi/2$ 或 $-\pi/2$ 时就是如此.

让我们考虑当 δ 保持不变时强度如何随 ϕ 而变化. 如果把(28)式代入,则(41a)式可写成下述形式:

$$I=\frac{E^2}{2}e^{-(\kappa_{\parallel}+\kappa_{\perp})u}\sin^2(2\alpha-\phi)\{\cosh[(\kappa_{\parallel}-\kappa_{\perp})u\cos\phi]-\cos\delta\}. \tag{42}$$

当 $|\cos\phi|$ 最大时,大括号中的项最大,当 $|\cos\phi|$ 最小时,大括号中的项最小. 因此,当 $\phi=0$ 和 $\phi=\pi$ 时,强度极大,当 $\phi=\pi/2$ 和 $-\pi/2$ 时,强度极小. 因而除了暗同消色线 $\phi=2\alpha$ 外,视场还被一暗"刷"形跨过,它的臂垂直于含光轴的平面[1].

§ 14.6.3 二向色的起偏振器

前一节中已经讨论过偏振光通过吸收晶片的传播. 这里将讨论这种晶片对自然(非偏振)光的影响.

再次假定晶片表面垂直于波法线的光轴(如果是双轴晶片则垂直于光轴之一),考虑在一个接近于光轴的方向上的传播. 一个自然光的平行光束可看作是由在垂直于传播方向的任何两个相互正交方向上偏振的两个互不相干的等振幅光束组成的[参看§ 10.8(56)式]. 选择晶体中主振动方向作为这两部分光束的振动方向. 如果 E 是进入晶片的两个部分光束中每一个的振幅,则在晶片中传播距离 l 后,它们的振幅为

$$E'=Ee^{-\kappa' u},\quad E''=Ee^{-\kappa'' u}, \tag{43}$$

同前,式中 $u=\omega l/v_y$,已假定光是准单色的,平均频率为 ω,因此

1) 利用(28)式,(44)式可写成

$$I=2E^2e^{-(\kappa_{\parallel}+\kappa_{\perp})u}\cosh\{(\kappa_{\parallel}-\kappa_{\perp})u\cos\phi\},$$

由上式看出,当自然光通过晶片时,不存在起偏振器和检偏振器,暗刷形也出现.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

总强度由下式给出:

$$I = I' + I'', \tag{44}$$

式中

$$I' = I_0 e^{-2\kappa' u}, \quad I'' = I_0 e^{-2\kappa'' u}, \tag{45}$$

以及 $I_0 = E^2$. 对于光轴方向,κ' 和 κ'' 必须用 $\kappa_{/\!/}$ 和 $\kappa_\perp$ 来代替.

我们看到,当光在媒质中传播了距离 l 后,这两个分量的振幅之比为 $\exp\{-(\kappa' - \kappa'')u\}$, 因此光已变为部分偏振的. 如果两个衰减指数差别很大, 则相当薄的一片物质就足以把入射的非偏振光束变换为接近线偏振的光束; 即晶片起着起偏振器的作用. 能起这类起偏振器作用的自然晶体的一个例子是电气石, 它对寻常光线的抑制比对非常光线强烈得多. 然而对于大部分波长来说,它也吸收了非常光线相当大的一部分(见图 14.32), 因此它不适合于实际应用. 主要是由于兰特 (Land) (约 1932 年)及其合

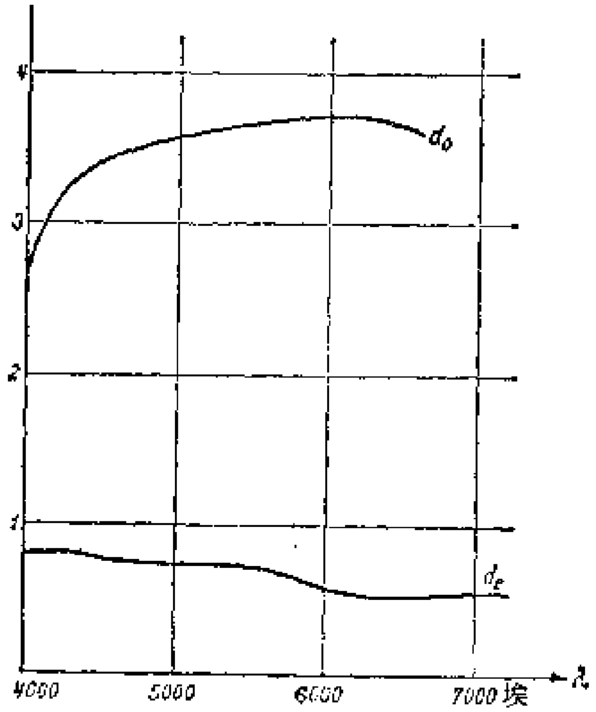


图 14.32 约 0.2 毫米厚与光轴平行方向成 24° 切开的黑电气石的二向色性,光垂直于光轴入射

$d = 4\pi(\log_{10}e)(n\kappa l/\lambda) \sim 5.5 n\kappa l/\lambda$.

[引自 E. H. Land and C. D. West 的论文,发表在 *Colloid Chemistry*, Vol. 6, ed. J. Alexander (New York, Reinhold Publishing Corporation, 1946), 167.]

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

作者的研究成果，有可能制成人造的二向色物质，它们起着优良的起偏振器的作用．这些物质商业上通称为偏振片，它们不是单晶，而是有长链分子的有机聚合物片，经延伸或其他某种处理使这些分子几乎完全排成行[1]，并且有时染色．特别适合于这种用途的聚合物是人工制造的聚乙醇乙烯 $(—CH_2—CHOH—)_x$．图 14.33 中示出在定向的聚乙醇乙烯上碘的二向色性作为波长的函数．

良好的二向色起偏振器的吸收系数之比可高达 100:1．它可以使在某一方向上偏振的光约 80% 透过，而使在垂直于上述方向上偏振的光少于 1% 透过．可得到大片的这种起偏振的物质，工厂生产中使用机器制成宽 30 英寸而长度不定的片．在这方面，这些“偏振片”比尼科耳棱镜好，后者的尺寸因缺少大片光学质量良

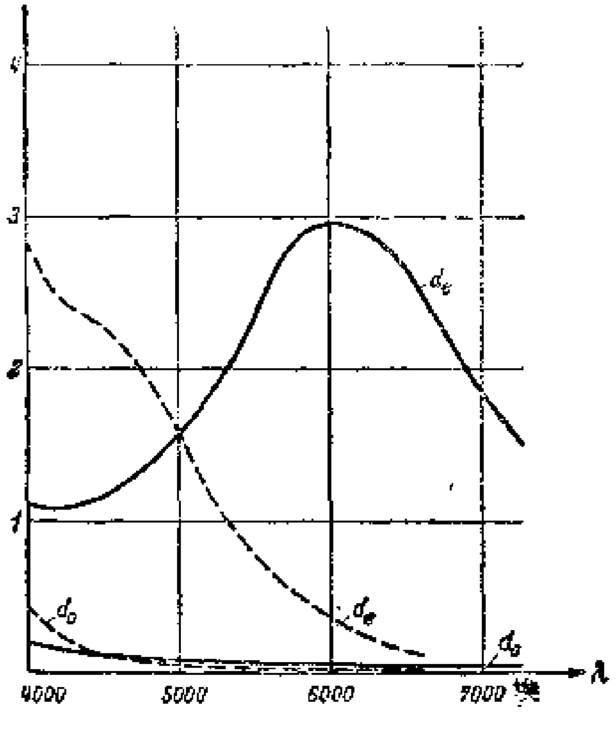


图 14.33 蓝（实线）和棕（虚线）的定向聚乙醇乙烯上碘的二向色性

$d=4\pi(\log_{10}e)(n\kappa l/\lambda)\sim 5.5n\kappa l/\lambda$

[引自 E. H. Land and C. D. West 的论文，发表在 *Colloid Chemistry*, Vol. 6, ed. J. Alexander (New York, Reinhold Publishing Corporation, 1946), 177.]

1) 关于二向色的起偏振器更充分的讨论，见图 14.32 和图 14.33 说明中所引论文，或 E. Land, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41** (1951), 957.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

好的方解石而受到限制。

最后，记住在本章的主要部分曾假定晶体中光的主振动的椭圆性可以忽略。这个假定当然不总是正确的。例如，可以证明，在每一个吸收晶体中存在四个方向，成对地位于光轴附近，它们均为圆偏振。然而，吸收越来越弱时，有明显椭圆性的区域就越来越限于这些特殊方向附近，这些方向本身趋向于与光轴重合。考虑及此，有关现象的一般特征仍然保留，因此不需要深入讨论。自然，我们的分析没有揭示吸收晶体光学理论某些更细致的方面，对于这些方面的讨论必须参考其他著作[1]。

---

1) 例如，见 G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), 861—904.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录1 变 分 法

经典物理学方程的一个普遍特征是它们可由变分原理导出。两个早期的例子是光学中的费马原理(1657年)和力学中的莫培督原理(1744年)。弹性方程，流体动力学方程和电动力学方程也可用这种方法表示。

然而，处理通常包含四个或更多个独立变量 $x, y, z, t\cdots$ 的场方程时，由于偏微分方程很复杂，因此很少利用将解表示为某些积分的平稳值这一特性。在这些情况下，变分法唯一的根本优点在于导出一些守恒定律——例如能量守恒定律。在包含一个独立变量(力学中是时间，而几何光学中是光线长度)的一些问题中，情况很不相同。由此人们研究常微分方程组，结果弄清楚用变分法研究解的性质是很方便的。事实上，这种方法在每一个细节上都是通常几何光学的直接推广。它的近代表示法主要归功于希耳伯特(Hilbert)，我们以1903年前后他在哥廷根(Göttingen)所作的未发表的讲义作为以下各节讨论的依据。这里仅介绍三维空间(x, y, z)的理论，但不难推广到更多维的情况。

§1 作为极值必要条件的欧勒方程

设 $F(u, v, x, y, z)$ 是对于所有五个变量都有直至二阶连续偏微商的一个给定函数。又设 C 是 x, y, z 空间内的任一曲线 $x=x(z)$，$y=y(z)$。x 和 y 的微商也假定直至二阶都连续。如果令

$$u=x', \quad v=y',$$

(撇号表示对 z 求微商)，则积分

$$I=\int_{z_1}^{z_2} F(x', y', x, y, z)\, dz \tag{1}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是曲线 C 的函数,即两个函数 $x(z)$, $y(z)$ 的函数,换句话说,它是一个泛函. 变分法的基本问题是:

确定两个给定点 $P_1[x_1=x(z_1),\ y_1=y(z_1),\ z_1]$ 和 $P_2[x_2=x(z_2),\ y_2=y(z_2),\ z_2]$ 之间的曲线 C,使沿这条曲线的积分为极值(极小值或极大值).

这种曲线 C 称为致极曲线,它必须满足的必要条件可通过简单的线性变分过程确定. 为此,选择一个具有连续的一阶微商的函数 $\xi(z)$,它在端点为零,

$$\xi(z_1)=\xi(z_2)=0; \tag{2}$$

并且用 $x+\varepsilon\xi$ 代替致极曲线的 x 坐标而构成"变"曲线 C',其中 ε 是一个小的参量. 于是(1)式变为 ε 的函数,

$$I(\varepsilon)=\int_{z_1}^{z_2} F(x'+\varepsilon\xi',\ y',\ x+\varepsilon\xi,\ y,\ z)\,dz. \tag{3}$$

下面这个量

$$(\delta I)_x=\left(\frac{\partial I}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\xi'+\frac{\partial F}{\partial x}\xi\right)dz \tag{4}$$

称为对 x 的初级变分. 显然,初级变分为零

$$(\delta I)_x=0 \tag{5}$$

是极值的必要条件.

现在,如果对(4)式的第一项作分部积分,并用边界条件(2)式,则得出

$$(\delta I)_x=\int_{z_1}^{z_2}\left(F_x-\frac{d}{dz}F_{x'}\right)\xi\,dz, \tag{6a}$$

式中 F_x 代表 $\partial F/\partial x$, 等等. 同样,用 $y+\varepsilon\eta$ 代替 y 求出

$$(\delta I)_y=\int_{z_1}^{z_2}\left(F_y-\frac{d}{dz}F_{y'}\right)\eta\,dz. \tag{6b}$$

因 ξ 和 η 可在区间 $z_1\leqslant z\leqslant z_2$ 内任意选择,由(6a)和(6b)式得出,条件 $(\delta I)_x=0$ 和 $(\delta I)_y=0$ 可以用两个微分方程的形式表示,后者通称欧勒方程,

$$F_x-\frac{d}{dz}F_{x'}=0, \tag{7a}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$F_y - \frac{d}{dz} F_{y'} = 0. \qquad (7b)$$

(7a)和(7b)是 $x(z)$ 和 $y(z)$ 的两个二阶微分方程. 首项,即那些具有最高阶微商的项,完全写出如下:

$$F_{x'x'}x'' + F_{x'y'}y'' + \cdots = 0, \qquad (8a)$$

$$F_{y'x'}x'' + F_{y'y'}y'' + \cdots = 0. \qquad (8b)$$

只要相伴的行列式不为零,即

$$F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 \neq 0, \qquad (9)$$

则可对 x'' 和 y'' 解(8a)和(8b)式. 我们假定这一条件在所涉及的整个五维区域内都成立.

两个二阶微分方程的解包含四个任意积分常数,因此,致极曲线构成一个四参量曲线族(∞^4 致极曲线).

§2 希耳伯特独立积分与哈密顿-雅科毕方程

为了讨论这些致极曲线的特性,考虑另一个有关问题是方便的. 将变量 u 和 v 看作 x, y, z 空间内的函数,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z). \qquad (10)$$

因此 $F[u(x, y, z), v(x, y, z), x, y, z]$ 以及它的偏微商 F_u, F_v 都是 x, y, z 的函数. 现在选择一条曲线 $C[x = x(z), y = y(z)]$, 并构成积分

$$S = \int_{z_1}^{z_2} \{F + (x' - u)F_u + (y' - v)F_v\}\, dz. \qquad (11)$$

问题是这样的: 找出保证 S 与曲线 C 的选择无关的函数 u, v: 因此 S 只是端点 P_1 和 P_2 的函数, 其中 P_1 的坐标是 $x_1 = x(z_1)$, $y_1 = y(z_1)$, z_1, P_2 的坐标是 $x_2 = x(z_2)$, $y = y(z_2)$, z_2. S 称为希耳伯特独立积分.

为了确定 u 和 v, 首先把(11)式改写为

$$S = \int_{P_1}^{P_2} (U dx + V dy + W dz), \qquad (12)$$

式中

$$U = F_u, \quad V = F_v, \quad W = F - uF_u - vF_v. \qquad (13)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

众所周知，(12)式与曲线无关的必要且充分条件是分量为 U，V，W 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度分量均为零，即

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=0. \tag{14}$$

这是一组三个 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 的偏微分方程；然而这些方程不完全独立，因为对于任意的 U，V 和 W，恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0 \tag{15}$$

成立(对于任一矢量 $\boldsymbol{A}$，$\operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{A}=0$)。 如果(14)式满足，则 $Udx+Vdy+Wdz$ 是全微分，

$$dS=Udx+Vdy+Wdz, \tag{16}$$

因此 S 只是 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的函数. 把 x_2, y_2, z_2 简写为 x, y, z，则有

$$U=\frac{\partial S}{\partial x},\quad V=\frac{\partial S}{\partial y},\quad W=\frac{\partial S}{\partial z}. \tag{17}$$

现在取一个任意曲面 $T(x, y, z)=0$，并在曲面的每一点 P_1 处选择矢量 (U, V, W) 垂直于曲面. 于是，由(16)式，$dS=0$，所以

$$S(x, y, z)=S_1 \tag{18}$$

在曲面上为常数. 由(13)式中两个(相容的)方程可解出 u 和 v，作为曲面上的函数，

$$u=u(U, V, x, y, z),\quad v=v(U, V, x, y, z). \tag{19}$$

其次，如果解出带有这些边界值的微分方程(14)，则得到本问题的一个特解，即在选定的曲面 $T(x, y, z)=0$ 上 S 有一常数值 S_1 的一个解. 这个解可由函数 S 的单一偏微分方程确定. 将(19)式代入(13)式中余下的那个方程，得到

$$W=W(U, V, x, y, z), \tag{20}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

利用(17)式,上式变为

$$\frac{\partial S}{\partial z}=W\left(\frac{\partial S}{\partial x},\ \frac{\partial S}{\partial y},\ x,\ y,\ z\right); \tag{21}$$

这通称为本问题的哈密顿-雅科毕方程.

在曲面 $T(x, y, z)=0$ 上有一给定值并满足(21)式的函数 $S(x, y, z)$ 代表本问题的一个解. 解出由(13)和(17)式结合得到的以下任意两个(相容的)方程,

$$F_u=\frac{\partial S}{\partial x},\quad F_v=\frac{\partial S}{\partial y},\quad F-uF_u-vF_v=\frac{\partial S}{\partial z}, \tag{22}$$

就能找出使积分与路线无关的两个函数 u, v.

§3 致极曲线场

现在我们在§1和§2讨论过的两个问题之间建立联系. 这就是:

如果 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 是使得(11)式所定义的希耳伯特积分 S 与路线无关的两个函数,则微分方程

$$x'=u(x, y, z),\quad y'=v(x, y, z) \tag{23}$$

具有二参量(∞^2)致极曲线集作为它们的解,即它们是满足"横截"曲面 $S(x, y, z)=S_1$ 这一条件的致极曲线. 这里, 根据"横截性",意味着满足关系式

$$Udx+Vdy+Wdz=0; \tag{24}$$

它表明由(13)式通过 u 和 v 定义的矢量 (U, V, W) 与曲面任一线元 dx, dy, dz 正交.

考虑 x, y, z 空间内的一个区域,这个区域的每一点都有一个连续的并有连续一阶偏微商的矢量 (u, v). 在这个给定区域上定义的这些矢量的集,称为场. 在本文中谈及的是致极曲线场,因而 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ 称为场的斜率函数.

刚才阐述的定理的下述逆定理也成立: 如果 ∞^2 致极曲线场是按它横截给定曲面 $T(x, y, z)=0$ 而构成的, 并且 u 和 v 是(23)式所定义的该场斜率函数, 则(11)式给出的希耳伯特积分 S

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

与路线无关.

在证明这些定理之前，我们注意到下述推论：

设(11)式中的曲线 C 是场的一条致极曲线；则希耳伯特积分(11)式化为变分积分 $I=\int_{z_1}^{z_2} F\,dz$. 因此，在曲面 $S(x,y,z)=S_1$ 和 $S(x,y,z)=S_2$ 上每一对"对应点"之间(即同一条致极曲线横截 S_1 和 S_2 的点之间)得出的这个积分的值，对于所有这样的点对都是相同的(见图 1). 曲面 $S(x,y,z)=$ 常数与 ∞^2 横截线可看作波阵面与几何光学光线的推广.

为了证明第一个定理，考虑一条满足 (23) 式并且横截曲面 $S(x,y,z)=S_1$ 的固定曲线 C，对它运用线性变分，即用 $x+a\xi$ 代替 x，用 $y+b\eta$ 代替 y，其中 a 和 b 是很小的参量，ξ 和 η 是 z 的任意而确定的可微函数，对于 z_1 和 z_2，ξ 和 η 为零. 现在根据前提，因 S 与路线无关，所以

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_0=0, \tag{25}$$

式中下标 0 表示求微商后以 $a=b=0$ 代入.

对 $F[u(x,y,z),\ v(x,y,z),\ x,y,z]$ 求微商，得出

$$\frac{\partial F}{\partial a}=(F_u u_x+F_v v_x+F_x)\xi. \tag{26}$$

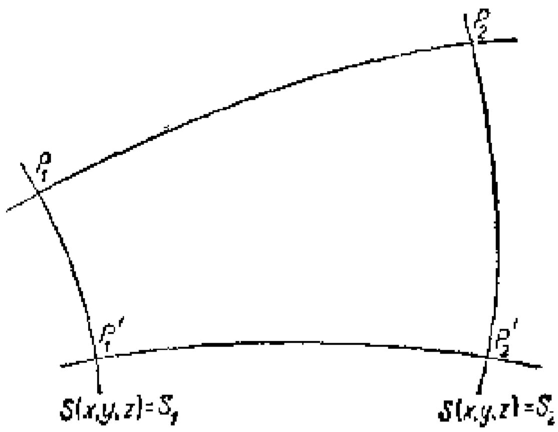


图 1　波阵面与几何光学光线概念的推广图示. 对于所有横截曲面 S_1 和 S_2 的致极曲线，例如 P_1P_2，$P_1'P_2'$，… 变分积分(1)式都具有一常数值

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

利用(26)式，由(11)式得出，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}\Big\{(F_u u_x+F_v v_x+F_x)\xi+(\xi'-u_x\xi)F_u-v_x\xi F_v$$

$$+(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial a}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial a}\Big\}_0 dz. \qquad (27)$$

因假定曲线满足(23)式，所以上式第二行中各项为零。第一行中有些项相消了，得出

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}(F_x\xi+F_u\xi')\,dz, \qquad (28)$$

或者作分部积分，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}\left(F_x-\frac{d}{dz}F_u\right)\xi\,dz, \qquad (28a)$$

同样，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}\left(F_y-\frac{d}{dz}F_v\right)\eta\,dz. \qquad (28b)$$

(28a)和(28b)式右方是 I 的初级变分 [参看 (6a) 和 (6b)式]，(25)式指出它们为零。因此，曲线 C 满足欧勒方程，即它是一条致极曲线，此定理就证明了。

为了证实逆定理，我们组成一个横截一给定曲面 $T(x,y,z)=0$ 的 ∞^2 致极曲线场 f_1，将它与另一个 ∞^2 致极曲线场 f_2 相比较。后一个场按下述方法构成。解哈密顿-雅科毕方程(21)，其边界条件是 $S(x,y,z)$ 在 $T(x,y,z)=0$ 上为常数。如果 u 和 v 由(22)式确定，则其解可用积分(11)式表示。因此，根据刚才证实的定理，(23)式定义了一个横截 $T=0$ 的致极曲线场 f_2。然而，这两个场 f_1 和 f_2 必相同，因为它们满足同样的微分方程及在 $T=0$ 上同样的边界条件。所以，对于给定的场 f_1，积分 S 与路线无关。

§4 从哈密顿-雅科毕方程的解确定全部致极曲线

到目前为止，我们只考虑了哈密顿-雅科毕方程一个 ∞^1 组解 $S(x,y,z)=$ 常数，它们对应于一个 ∞^2 横截致极曲线集。为了

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

得到全部 ∞^4 致极曲线，必须考虑更大的一组解 S，即 ∞^2；这可通过绕一点转动曲面 $T=0$ 并在每一种情形中取 $S(x,y,z)=S_1$ 得到. 假定已经找到(21)式的包含两个参量 α 和 β 的"完全"解 $S(x,y,z,\alpha,\beta)$. 与任一对 α 和 β 值相应的函数 S 可用(11)形式的积分表示，适当选择两个函数 u 和 v：$u=u(x,y,z,\alpha,\beta)$，$v=v(x,y,z,\alpha,\beta)$，则该积分与路线无关. 因此，不仅 S 而且 $\partial S/\partial\alpha$ 和 $\partial S/\partial\beta$ 也都与路线无关. 现在，因 $F=F[u(x,y,z,\alpha,\beta),\ v(x,y,z,\alpha,\beta),x,y,z]$，所以

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=F_u u_\alpha+F_v v_\alpha, \tag{29}$$

由(11)式得出，

$$\left.\begin{aligned}S_\alpha&=\int_{z_1}^{z_2}\left\{(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\alpha}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\alpha}\right\}dz,\\ S_\beta&=\int_{z_1}^{z_2}\left\{(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\beta}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\beta}\right\}dz,\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_u}{\partial\alpha}&=F_{uu}u_\alpha+F_{uv}v_\alpha,\\ \frac{\partial F_v}{\partial\alpha}&=F_{vu}u_\alpha+F_{vv}v_\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

对于其他两个微商，也有类似的表达式.

因积分(30)与路线无关，由此得出表达式

$$\left.\begin{aligned}dS_\alpha&=\left[(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\alpha}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\alpha}\right]dz,\\ dS_\beta&=\left[(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\beta}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\beta}\right]dz\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

是全微分；于是 S_α 和 S_β 只是端点 P_1 和 P_2 的函数，因此，由常数值 S_α 和 S_β 决定的那些曲面存在，即

$$\frac{\partial S(x,y,z,\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=A,\qquad\frac{\partial S(x,y,z,\alpha,\beta)}{\partial\beta}=B, \tag{33}$$

A，B 是常数. 所以这些方程必然代表下列微分方程

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$x' = u(x, y, z, \alpha, \beta), \quad y' = v(x, y, z, \alpha, \beta) \tag{34}$$

的解. 因在(33)式所确定的曲面上, $dS_\alpha = 0$, $dS_\beta = 0$, 由(32)式,只要相伴的行列式不为零,这就意味着(34)式成立. 这时根据(31)式,该行列式可写成以下的形式:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_u}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial F_v}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial F_u}{\partial \beta} & \dfrac{\partial F_v}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{vu} & F_{vv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_\alpha & u_\beta \\ v_\alpha & v_\beta \end{vmatrix}. \tag{35}$$

上式右方第一个因子就是(9)式,已假定它不为零. 而只有在(34)式对 α 和 β 无解的那些点处,换句话说只有场在空间内不唯一的那些点处,第二项才能为零. 如果除去这些情况,(34)式就代表 ∞^2 组微分方程,每一组有 ∞^2 解;因此所有这些合在一起必定与全部 ∞^4 致极曲线相同. 我们已证明了(33)式的解

$$x = x(z, \alpha, \beta, A, B), \quad y = y(z, \alpha, \beta, A, B) \tag{36}$$

正是这 ∞^4 致极曲线的全集;因此,根据(33)和(36)式,只用微分法和消元法就能由哈密顿-雅科毕方程的完全解 $S(x, y, z, \alpha, \beta)$ 得出 ∞^4 致极曲线的全集.

§5 哈密顿正则方程

每一个欧勒方程(7a)和(7b)都是二阶微分方程. 通常用四个一阶微分方程代替这两个二阶方程是方便的. 这可以用多种方法办到. 最对称的方法是给出所谓哈密顿正则方程,求法如下:

将(13)式看作是勒让德变换(见上册 181 页),它用 U, V 代替变量 u, v (保留 x, y, z), 用 $W(U, V, x, y, z)$ 代替函数 $F(u, v, x, y, z)$. 我们可把(13)式中最后一式写成

$$W = F - uU - vV, \tag{37}$$

因此

$$dW = dF - udU - vdV - Udu - Vdv.$$

现在

$$\begin{aligned} dF &= F_u du + F_v dv + F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= U du + V dv + F_x dx + F_y dy + F_z dz, \end{aligned}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

所以

$$dW = -udU - vdV + F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

因 W 可看作 U, V, x, y, z 的函数,由此得出

$$W_U = u, W_V = -v, W_x = F_x, W_y = F_y, W_z = F_z. \quad (38)$$

这时如果考虑一条曲线 $x = x(z), y = y(z)$,它满足下式:

$$x' = u(x, y, z), \quad y' = v(x, y, z), \quad (39)$$

则这两个方程,连同欧勒方程(7),可写成以下的形式:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -W_U, & y' &= -W_V, \\ U' &= W_x, & V' &= W_y. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

(40)式是 x, y, U, V 作为 z 的函数的四个一阶微分方程,称为**哈密顿正则方程**. 它们可看作用函数 $W(U, V, x, y, z)$ 表示的变分积分的欧勒方程. 如果把(37)和(39)式代入(1)式,则积分变成

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \{W(U, V, x, y, z) + x'U + y'V\} dz. \quad (41)$$

如果这里把 U, V, x, y 看作 z 的四个未知函数,并且作出它们各自的欧勒方程,则立即得出(40)式.

§6 被积函数中不显含独立变量时的特殊情况

F 不明显依赖于 z 时的情况值得特别考虑.

对于 $F(x', y', x, y, z)$, 一般有

$$\frac{dF}{dz} = F_{x'}x'' + F_{y'}y'' + F_x x' + F_y y' + F_z.$$

现在假定 $F_z = 0$, 并以欧勒方程(7)代替 F_x, F_y. 这就得出

$$\frac{dF}{dz} = F_{x'}x'' + F_{y'}y'' + x'\frac{d}{dz}F_{x'} + y'\frac{d}{dz}F_{y'}$$

$$= \frac{d}{dz}(x'F_{x'} + y'F_{y'}).$$

所以

$$\frac{d}{dz}(F - x'F_{x'} - y'F_{y'}) = 0,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此

$$F - x'F_{x'} - y'F_{y'} = \text{常数}. \tag{42}$$

这个表达式正是致极曲线上的量 W，它与 z 无关；W 是一个积分常数。由正则方程(40)可直接看出同样的结果，因若 F 不明显依赖于 z，则 W 也与 z 无关，$W_z = 0$，并且

$$\frac{dW}{dz} = W_U U' + W_V V' + W_x x' + W_y y';$$

根据(40)式，上式为零.

在这种情况下，可将变分问题从三维化为二维. 把 y 看作 x 的函数；则 $y' = (dy/dx)x'$，$F(x', y', x, y) = F(x', dy/dx, x, y)$. 用同样的方法，$F_{x'}$，$F_{y'}$ 以及 $F - x'F_{x'} - y'F_{y'}$ 都可看作 $x', dy/dx, x, y$ 的函数. 这时方程

$$F - x'F_{x'} - y'F_{y'} = W \tag{43}$$

可对 x' 求解：

$$\left.\begin{aligned} x' &= \Phi\left(\frac{dy}{dx}, x, y, W\right), \\ y' &= \frac{dy}{dx}\,\Phi\left(\frac{dy}{dx}, x, y, W\right). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

考虑 W 具有某一给定值的所有曲线；因此积分(1)可以用两个积分之差来代替，或者

$$\begin{aligned} J &= \int_{z_1}^{z_2} (F - W)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} (x'F_{x'} + y'F_{y'})\,dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_{x'} + \frac{dy}{dx} F_{y'}\right) dx. \end{aligned}$$

如果这时用缩写符号

$$F_{x'} + \frac{dy}{dx} F_{y'} = f, \tag{45}$$

并且利用(44)式消去 x'，y'，则 f 变为 dy/dx，x，y，W 的函数，并且

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(\frac{dy}{dx}, x, y, W\right) dx. \tag{46}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此，对于每一个 W 值，都有一个少了一维的变分积分[这一简化相当于力学中从哈密顿原理过渡到莫培督原理：见下面(88)式]。如果由与(46)式相应的欧勒方程求出 $y(x)$，则对(44)式积分就得到全部致极曲线。

§7 不连续性

可能出现函数 $F(u, v, x, y, z)$ 并不处处连续的情形。最重要的情形(光学中经常出现)是，对于所有 u, v 值，F 沿一曲面 $\sigma(x, y, z)=0$ 具有有限的不连续性。

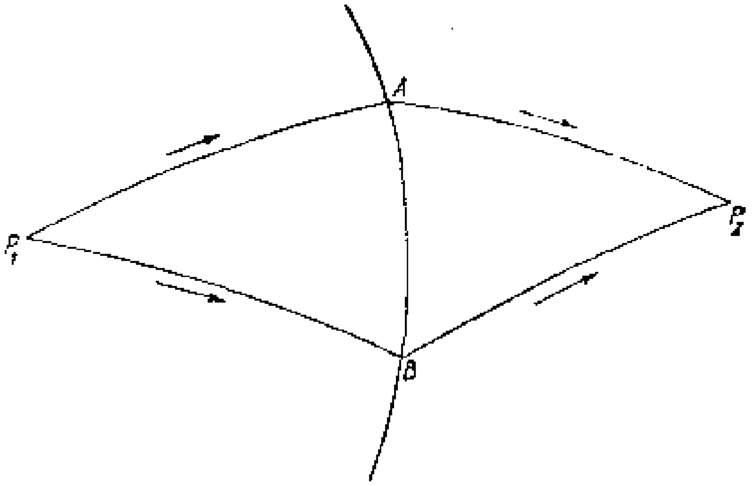


图 2 光学折射定律的变分模拟图示

显然，在曲面外，致极曲线仍是欧勒方程(7)的解；但如果致极曲线穿过曲面，它将具有方向的不连续性(折射)。让我们用附标 1 和 2 区分曲面左方和右方的空间(图 2)。

为了求出"折射定律"，必须确立保证按(11)式定义的希耳伯特积分 S 从曲面左方一点 P_1 延伸到曲面右方一点 P_2 与路线无关的条件。考虑两条路线 P_1AP_2 和 P_1BP_2，A 和 B 是曲面上的两点。因此(用明显的记号)，要求 $S(P_1AP_2)=S(P_1BP_2)$，即

$$S_1(P_1A)+S_2(AP_2)=S_1(P_1B)+S_2(BP_2). \tag{47}$$

这时在曲面左方的闭合路线 P_1ABP_1 上，

$$S_1(P_1A)+S_1(AB)+S_1(BP_1)=0; \tag{48}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在曲面右方的闭合路线上，

$$S_2(P_2B)+S_2(BA)+S_2(AP_2)=0. \tag{49}$$

如果将(48)和(49)式相加，并且用(47)式和关系式 $S(XY)=-S(YX)$，由此得出

$$S_1(AB)=S_2(AB). \tag{50}$$

所以，不管 u, v 取曲面左方的值 u_1, v_1 还是取右方的值 u_2, v_2，沿曲面 $\sigma=0$ 上任一路线求出的积分(11)都有同一数值. 因此，在这两种情形中被积函数必须相等，而折射定律与表达式

$$F+(x'-u)F_u+(y'-v)F_v \tag{51}$$

在曲面 $\sigma=0$ 上连续这一论断是等效的. 根据(13)式，这一条件可表示为以下的形式：

$$(Ux'+Vy'+W)_1=(Ux'+Vy'+W)_2, \tag{52}$$

式中 x', y' 是曲面上任一曲线 $x(z), y(z)$ 的微商. 这还可以表述为矢量 $U_2-U_1, V_2-V_1, W_2-W_1$ 与不连续曲面垂直：

$$(U_2-U_1)dx+(V_2-V_1)dy+(W_2-W_1)dz=0. \tag{53}$$

反射致极曲线的问题与折射致极曲线的问题很类似. 这时必须用一条在一给定曲面 $\sigma(x,y,z)=0$ 上 A 点处有方向不连续性的曲线 P_1AP_2，连接位于 F 是 x, y, z 的连续函数的一个区域内的两点 P_1 和 P_2，这两点 P_1 和 P_2 在 $\sigma=0$ 的同一侧(图3).

显然，P_1A 部分和 AP_2 部分都必须是致极曲线，根据与导出折射定律(53)类似的考虑，得出对入射场(下标1)和反射场(下标2)独立定理有效的条件是反射定律

$$(U_1+U_2)dx+(V_1+V_2)dy+(W_1+W_2)dz=0. \tag{54}$$

独立定理对具有有限次折射或反射不连续的任意场也成立. 下一节将表明，在所有这些情况下，不管连接 P_1 和 P_2 的致极曲线是连续的

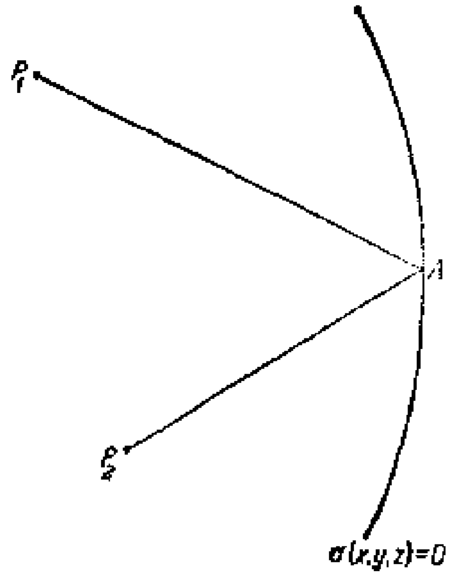


图3 光学反射定律的变分模拟图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

还是具有(方向)不连续性，只要沿此曲线函数 F 满足某些简单条件，都将导致积分(1)有极小值.

§8 维尔斯特拉斯(Weierstrass)条件和勒让德条件(极值的充分条件)

到目前为止，不曾对极大值和极小值加以区别；所考虑的(光滑的或有一"扭折"的)致极曲线甚至可相应于不是真正极值的平稳情况. 现在将推导真实极小值的必要条件.

设 $\bar{x}(z)$, $\bar{y}(z)$ 是嵌入场 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ 内的一条固定的致极曲线 $\bar{C}$, $x(z)$, $y(z)$ 是与 $\bar{C}$ 有相同端点 P_1 和 P_2 也完全嵌入场内的任一邻近曲线 C (图 4). 如果

$$\int_C F(x', y', x, y, z)dz - \int_{\bar{C}} F(\bar{x}', \bar{y}', \bar{x}, \bar{y}, z)dz > 0, \quad (55)$$

则极值是真实的极小值.

根据第 2 节和第 3 节，可将第二个积分替换为一个不沿 $\bar{C}$ 而沿 C 的积分，即

$$\int_C \{F(u, v, x, y, z) + (x' - u)F_u + (y' - v)F_v\} dz;$$

这个积分与路线无关，并且化为 $\int_{\bar{C}} Fdz$，只要所取路线与 $\bar{C}$ 一致. 因此(55)式变为

$$\int_C Fdz - \int_{\bar{C}} Fdz = \int_C \mathscr{E}(x', y', u, v, x, y, z)dz > 0, \quad (56)$$

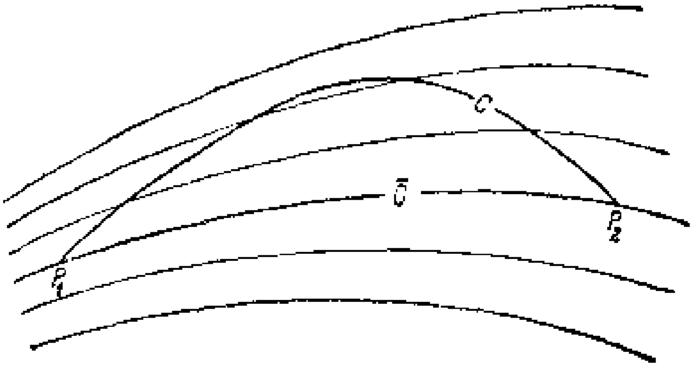


图 4　维尔斯特拉斯 $\mathscr{E}$ 函数定义图示

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$\mathscr{E}(x', y', u, v, x, y, z) = F(x', y', x, y, z) - F(u, v, x, y, z) - (x'-u)F_u - (y'-v)F_v, \quad (57)$$

并且 F_u, F_v 中的自变量与 $F(u, v, x, y, z)$ 中的相同. (57)式所定义的函数称为维尔斯特拉斯$\mathscr{E}$函数(或盈函数, excess function); 自变量 x, y, z, x', y' 指的是曲线 C 上的一点以及它的方向, 而 u, v 指的是通过 x, y, z 点的场致极曲线的方向.

可以看出,在 C 与场致极曲线重合的任何部分,$\mathscr{E}$ 为零. 我们可以把场选择为通过 P_1 的全部 ∞^2 致极曲线的集. 然后作一条特殊的曲线 C, 使得在 P_1 与 A 点之间, 曲线与场的一条致极曲线重合; 从 A 到给定的致极曲线上的 B 点, 它是直线; 从 B 到 P_2, 它与给定的致极曲线重合(图 5). 因此在 P_1A 部分和 BP_2 部分, $\mathscr{E}$ 为零,而剩下

$$\int_A^B \mathscr{E}\,dz > 0.$$

令 A 逼近 B ,可以看出,只当

$$\mathscr{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}', \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) > 0, \quad (58)$$

上述不等式才可能成立;这里 $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 指的是给定的致极曲线 $\bar{C}$ 上一代表点 (B), x', y' 指的是完全任意的 AB 方向. 公式(58)是强极小值的维尔斯特拉斯条件; 它无疑是一个必要条件. 但根据函数 F 对它的所有五个自变量连续 (因此$\mathscr{E}$对它的七个自变量连续)这一假设得出,如果(58)式对于给定的致极曲线上所有各点及任意方向 x', y' 都满足, 则对于 $\bar{C}$ 周围某一区域内有任意方向的任一邻近曲线 C, 不等式(56)必成立. 因此, 条件(58)也是强极小值的充分条件. 当然, 这个极小值只是相对的, 因为可能有几条致极曲线都具有这样

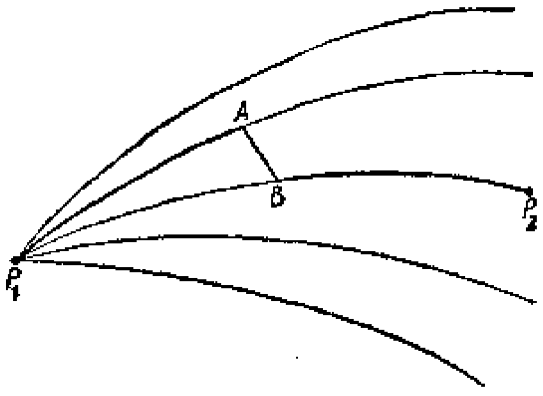


图 5 强极小值的维尔斯特拉斯条件的推导

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

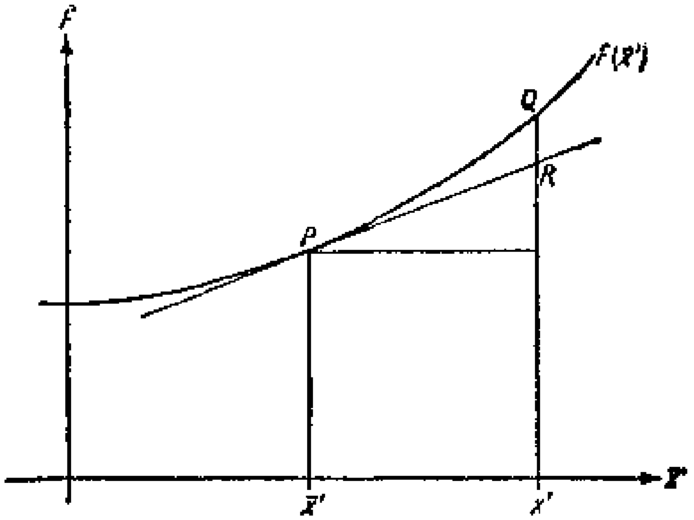


图 6 强极小值的维尔斯特拉斯条件的几何解释

的特性，即与所有邻近曲线相比，给出积分(1)的极小值. 因此用这种方法不能决定其中那一条曲线给出绝对极小值.

不等式(58)有一种简单的几何解释. 对于空间内一固定点 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$，$F$ 只是 $\bar{x}'$，$\bar{y}'$ 的函数；这个函数 $F(\bar{x}', \bar{y}')$ 可用三维 $\bar{x}'$，$\bar{y}'$，F 空间内一个曲面来表示(图 6 中画出二维 $\bar{x}'F$ 截线). 因此，

$$\mathscr{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') = F(x', y') - [F(\bar{x}', \bar{y}') + (x' - \bar{x}')F_{\bar{x}'} + (y' - \bar{y}')F_{\bar{y}'}] \tag{59}$$

显然这是沿 x'，y' 的纵坐标在曲面 $F = F(\bar{x}', \bar{y}')$ 上 Q 点，与 $P(\bar{x}', \bar{y}')$的切平面同这个纵坐标交点 R 之间的距离 QR (见图 6). 所以，如果曲面 F 在 P 点切平面的上方，则 $\mathscr{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') > 0$. 如果这对于所有的 x'，y' 都成立，则有一**强极小值**.

然而，如果(58)式只对 $\xi = x' - \bar{x}'$，$\eta = y' - \bar{y}'$ 的小区间成立，则有一弱极小值；在这种情况下，可将 $\mathscr{E}$ 展开为 ξ, η 的幂级数(如果仍省略自变量 x, y, z)，得出

$$\mathscr{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') = F(x', y') - F(\bar{x}', \bar{y}') - \xi F_{\bar{x}'} - \eta F_{\bar{y}'} + \frac{1}{2}[F_{\bar{x}'\bar{x}'}\xi^2 + 2F_{\bar{x}'\bar{y}'}\xi\eta + F_{\bar{y}'\bar{y}'}\eta^2] + \cdots$$

对于小的 ξ 和 η 值，这些二次项是决定性的，并且对于一极小值，它们显然必是正的. 因此，我们得到**弱极小值的**(必要且充分的)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

勒让德条件：[1]

$$F_{x'x'} > 0, \quad F_{x'x'}F_{y'y'} - F_{x'y'}^2 > 0. \qquad (60)$$

§9　一个端点约束在一曲面时变分积分的极小值

对于所有具有一公共端点 P_1 而另一端点约束在一给定曲面 $\sigma(x, y, z) = 0$ 的曲线，$\mathscr{E}$ 函数提供了一种求其变分积分（1）的极小值问题的简单解法。

这条曲线显然必是通过 P_1 的 ∞^2 致极曲线之一，问题是"其中那一条？"这时在这些 ∞^2 致极曲线中正好有一条[2]横截曲面 $\sigma = 0$，不难看出它代表这个问题的解。为了说明这一点，设 P_2 是这条致极曲线与曲面 $\sigma=0$ 的交点，它被所有横截此曲面的致极曲线的场围绕着。设 P_1Q 是通过 P_1 的任一致极曲线，Q 是它与此曲面的交点（图 7）。于是希耳伯特积分 $S(P_2, Q)$ 为零。因此，沿路线 P_1QP_2 所得的积分 S 等于变分积分 $I(P_1, Q)$。这时，差值 $I(P_1, Q) - I(P_1, P_2)$ 可以按前面一样的方法利用 $\mathscr{E}$ 函数来表示，而且如果满足(58)式，则只要 Q 与 P_1 不重合，这个差值总是正的。

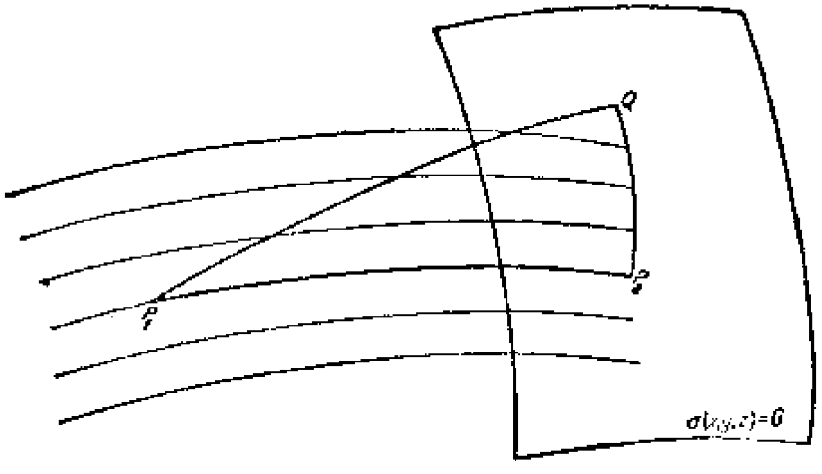


图 7　对于所有具有一固定端点而另一端点约束在一曲面的曲线，确定其变分积分的极小值

1）当不是讨论两个而是讨论更多个（譬如 n 个）变量时，这个条件有一直接推广。为了有一极小值，n 个变量的二次型必是正定的；这意味着相伴的行列式和它的主子式必全是正的。

2）假定 P_1 离曲面足够近，因此排除了有几条这样的致极曲线的情况。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§ 10 极小值的雅科毕判据

如果在一个场中可以嵌入一条致极曲线，并且对于此曲线在 P_1 和 P_2 之间所有各点，都满足勒让德条件，则(1)式所定义的积分 I 无疑是一(弱)极小值．但还要找出这种场存在的判据．

设所有通过 P_1 的 ∞^2 致极曲线由下式给出：

$$x = x(z, \alpha, \beta), \quad y = y(z, \alpha, \beta), \tag{61}$$

并且设给定的致极曲线 C 由 $\alpha = 0, \beta = 0$ 的值表征：

$$x = x(z, 0, 0), \ y = y(z, 0, 0). \tag{62}$$

只要(61)式各曲线中有一条通过一给定点 $P(x, y)$ 并任意地接近 C，即只要 α, β 作为 x, y 的函数时(61)式有唯一的解，则(61)式各曲线构成一个场，其条件为

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta \\ y_\alpha & y_\beta \end{vmatrix} \neq 0. \tag{63}$$

这就是极小值的雅科毕判据．

行列式 Δ 是沿给定致极曲线(62)的 z 的函数．$\Delta = 0$ 的第一个点 $\bar{P}$ 称为 P_1 的共轭点；对于 P_2 位于 P_1 和 $\bar{P}$ 之间的每一个区间 P_1P_2，都有一真实的极小值．

在 $\bar{P}$ 点，给定的致极曲线与一条(无限靠近它的)邻近致极曲线相交，它是线集(61)包络的一点．因此，场的界限由致极曲线集(61)的包络确定．在光学中，这些包络就是焦散面．

§ 11 例一：光学

现在用很少的几个例子说明一般理论．第一个例子是关于通常几何学中的最短线和几何光学中的最短光学长度．

欧几里得几何学以毕达哥拉斯定理为基础，根据这一定理，线元 ds 与它在直角坐标系各轴上的投影 dx, dy, dz 通过下式相联系：

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{64}$$

因此，两点之间的最短线由变分积分

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}\, dz \tag{65}$$

的极小值给出. 几何光学可以建立在这一变分积分问题的推广，即费马最短光程原理的基础上(见§3.3.2)，光程

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{z_1}^{z_2} n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}\, dz, \tag{66}$$

式中 $n(x, y, z)$ 是折射率. 我们只讨论光学情况，因为(65)式是(66)式 $n = 1$ 的特殊情况.

现在有

$$F(x', y', x, y, z) = n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}. \tag{67}$$

因为 $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}\, dz$，所以

$$\left.\begin{aligned} U &= F_{x'} = \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = n\frac{dx}{ds} = ns_x, \\ V &= F_{y'} = \frac{ny'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = n\frac{dy}{ds} = ns_y, \\ W &= F - F_{x'}x' - F_{y'}y' = \frac{n}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} \\ &= n\frac{dz}{ds} = ns_z. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

式中 s_x, s_y 和 s_z 是曲线 $x = x(z)$, $y = y(z)$ 切向单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 的分量. 根据(53)式，在 $n(x, y, z)$ 不连续曲面上折射定律可表示为以下的形式:

$$(n_2\boldsymbol{s}_2 - n_1\boldsymbol{s}_1) \cdot d\boldsymbol{l} = 0, \tag{69a}$$

式中 $d\boldsymbol{l}(dx, dy, dz)$ 是曲面的任一线元. 这个方程意味着 $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ 与曲面法线共面，并且 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 与曲面法线的夹角 θ_1 和 θ_2 有下述关系:

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1, \tag{69b}$$

与折射定律[§ 3.2(19)]一致.

与(66)式相联系的欧勒方程(7)为

$$\frac{\partial n}{\partial x}\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} - \frac{d}{dz}\frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}} = 0,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{\partial n}{\partial y}\sqrt{x'^2+y'^2+1}-\frac{d}{dz}\frac{ny'}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}}=0.$$

或者

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)=\frac{\partial n}{\partial x},\quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)=\frac{\partial n}{\partial y}. \tag{70a}$$

z 的相应方程,即

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right)=\frac{\partial n}{\partial z}, \tag{70b}$$

是一个恒等式,因为它由

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1 \tag{71}$$

得出. (70b)式的推导可进行如下: 首先把(71)式对 s 求微商. 其次用 dn/ds 乘(71)式, 用 n 乘求微商后的方程, 然后两式相加. 最后, 利用(70a)式[1]. 三个标量微分方程(70)与光线的矢量方程§ 3.2(2)一致.

因为 U, V 和 W 这时表示光线矢量的分量[参看§ 4.1(4)式], 由(12)式看出, 属于几何光学场的 S 函数正是哈密顿点特征函数[参看§ 4.1(1)式]. 而且, 按照导出(21)式的步骤, 得出本变分问题的哈密顿-雅科毕方程就是程函方程.

为了研究勒让德条件(60), 必须确定微商 $F_{x'x'}$ 等等. 在目前情况下, 有

$$F_{x'x'}=n\frac{1+y'^2}{(1+x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

$$F_{y'y'}=n\frac{1+x'^2}{(1+x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

$$F_{x'y'}=-n\frac{x'y'}{(1+x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

---

1) (70b)式可用更对称的方法得出, 不过这种方法引入多余的欧勒方程. 把 x, y 和 z 看作一个参量 λ 的函数; 于是有三个欧勒方程, 由一个恒等式相联系, 参量 λ 最终与 S 等同.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因此

$$F_{x'x'}\cdot F_{y'y'}-F_{x'y'}^{2}=\frac{n^{2}}{(1+x'^{2}+y'^{2})^{2}}>0. \qquad (72)$$

所以，如果满足雅科毕条件(63)，则每一条致极曲线给出一弱极小值(976页)。但因对给定的 x, y, z，即对给定的 n，函数 F 对所有的 x', y' 值是凸向下方的，由维尔斯特拉斯条件的几何解释得出，极小值是强的.

还要考虑雅科毕判据. 当 $n=$ 常数时，即在通常的欧几里得几何学中，致极曲线显然是直线；因为过一点 P_1 的一束直线决不会有包络，所以每一条直线任意两点间都给出距离的强极小值。另一方面，在几何光学中，n 一般依赖于 x, y, z (连续或不连续)，来自 P_1 的一束光线产生包络(焦散面). 为了确定极值的性质，必须分别在每一种特定情况中考察这些曲面.

§12 例二：质点系力学

作为第二个例子，考虑质点系力学. 这里，独立变量是时间 t，未知函数是拉格朗日坐标 $q_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots n)$ 和它们的微商即速度 $u_\alpha=\dot{q}_\alpha$.

变分问题由哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2} L(u_1, u_2, \cdots q_1, q_2, \cdots t)dt=\text{极值} \qquad (73)$$

给出，式中 L 是拉格朗日函数. 在通常的非相对论力学中，有 $L=T-\Phi$，式中 T 是动能，是 u_α 的二次型，Φ 是势能；但在更普遍的情况下，有磁力作用时以及考虑到质量的相对论性变化时，(73)式仍成立.

这里，用 $L(u, q, t)$ 代替函数 $F(u, v, x, y, z)$，因此[参看(13)式]，这时 U, V 相当于动量

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial u_\alpha}, \qquad (74)$$

W 相当于 $-H$，此处的 H 是哈密顿函数

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$H = \sum_\alpha u_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} - L = \sum_\alpha u_\alpha p_\alpha - L. \tag{75}$$

如果 $L = T - \Phi$，则(75)式变为

$$H = \sum_\alpha u_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} - T + \Phi.$$

由齐次函数的欧勒定理[1]得出

$$2T = \sum u_\alpha \frac{\partial T}{\partial u_\alpha} \left(= \sum u_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} \right),$$

H 化为总能

$$H = T + \Phi. \tag{76}$$

欧勒方程(7)变为拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0; \tag{77}$$

这时，正则方程(40)为

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \tag{78}$$

式中 H 可看作 p_α，q_α 和 t 的函数。如果 H 与时间 t 无关，则公式(42)表示能量守恒定律，

$$H = \sum_\alpha u_\alpha p_\alpha - L = \text{常数} = E. \tag{79}$$

在这种情况下，哈密顿-雅科毕微分方程(21)变为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = 0. \tag{80}$$

积分得出，

$$S = -Et + S_1(q_\alpha), \tag{81}$$

由于(80)式，上式中 S_1 满足方程

$$H\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E. \tag{82}$$

---

1) 例如，见 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*. Vol. II (Glasgow, Blackie and Son, 1936), p. 109.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由哈密顿-雅科毕方程的解，得出的动量与(17)式一致：

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha}. \tag{83}$$

由此得出线积分

$$\int_{P_1}^{P_2} \sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha \tag{84}$$

与连接 P_1 和 P_2 的路线无关，所以在单连通区域内取一闭合路线时，线积分为零，

$$\oint p_\alpha dq_\alpha = 0. \tag{85}$$

如果函数 p_α 是多值的，就有可能得出沿一闭合路线积分不为零，而是某一常数周期的倍数．这个结果是拉格朗日光学不变式(§ 3.3.1)的推广，是一个庞加莱不变式．它也可表示为以下的形式：

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} = 0. \tag{86}$$

如果H与时间无关，则可按照(45)和(46)式所示的一般方法根据极小值原理消去 t．因此有

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (L + E)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha dt = \int_{P_1}^{P_2} \sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha = \text{极值}. \tag{87}$$

这就是推广到任意 L 的莫培督最小作用原理．它必须通过下述途径来理解：利用纯几何微商（比方说 dq_α/dq_1, $\alpha = 2, \cdots n$，以 q_1 为独立变量）表示时间微商 $u_\alpha = \dot{q}_\alpha$，(79)式就可消去这些时间微商．(87)式代表描述轨道而不是描述运动的纯几何原理，后者可随后由(78)式得出．

如果 $L = T - \Phi$，则 $E = T + \Phi$，并且得出莫培督原来的表达式

$$J = 2\int_{t_1}^{t_2} T\,dt, \tag{88}$$

它可以用同样的方法来理解．由哈密顿原理变为莫培督原理而把

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

运动问题化为轨道问题的一个例子是附录 2 第 2 节中给出的关于电子光学的讨论.

只能对一给定的 L 研究勒让德条件. 如果 $L=T-\Phi$, 并且 T 是 u_α 的二次型, 则该条件显然与 T 为正定的这一公设等效. 于是也满足维尔斯特拉斯条件,并且只要雅科毕条件成立,就有一强极小值. 后者导至动力学的焦点和焦散线的研究, 但在实际上没有多大重要性.

对于相对论性电子,其拉格朗日函数(参看附录 2)为

$$L=-mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}+e\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{A}-\phi\right), \tag{89}$$

由勒让德条件导出矢量 $\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta,\zeta)$ 诸分量中的二次型

$$\frac{m}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}\left\{\boldsymbol{\rho}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\left(\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\right\}, \tag{90}$$

所以勒让德条件总是满足的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录 2　光学，电子光学和波动力学

1831 年哈密顿发现了势场中质点轨线与折射率连续变化的媒质中光线路程二者的类似．“哈密顿类似”由于它在数学上极为优美，在动力学教科书中幸存了差不多一百年，但没有引起任何实际应用，直至 1925 年，那时布什 (Busch) 首先用光学术语解释了电磁场对电子束的聚焦效应．几乎同时，薛定谔由于以他的波方程从粒子的几何光学过渡到粒子的波动光学而将哈密顿类似推进了一步，他在其波动方程中加入了德布罗意在 1923 年首先想到的粒子波长．

从 1928 年起，实用的电子光学迅速发展．到此时，哈密顿类似已广为人知．并促进了发明与光学仪器对应的一些电子光学仪器，例如电子显微镜．虽然二者数学表述一般类似，但这两种技术并不严格类似．某些电子光学仪器，例如阴极射线管和具有弯曲光轴的系统，没有重要的光学对应仪器．在这可资利用的篇幅中，我们将只考虑其光学模拟已在本书前面各章中详细论述过的那些电子光学问题，因此几乎可全部移植其结果，而只作很少修正．可以提起注意，这特别适用于电子光学最难懂的章节：透镜象差的波动理论．

§1　基本形式的哈密顿类似

首先将证明，带电粒子轨线的确定，可通过引入逐点变化的适当折射率而化为一个光学问题．

考虑一个电荷为 e、质量为 m 的粒子(为了简单起见，把它当作一个电子)在稳定静电势场 $\phi(x, y, z)$ 中运动．根据牛顿运动定律，

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} = -e \operatorname{grad} \phi, \tag{1}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $\boldsymbol{p}$ 是动量矢量. 如果动量的牛顿定义 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ 被爱因斯坦定义

$$\boldsymbol{p}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \left(\beta=\frac{v}{c}\right) \tag{2}$$

代替, c 是真空光速,则上述定律对所有的速度 $\boldsymbol{v}$ 都有效.

将运动方程(1)分解为两个方程是方便的,其中一个是轨线方程,而另一个规定电子沿轨线运动所依据的"时间表". 为此,写出 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}$ 是运动方向上的单位矢量. 于是

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{dp}{dt}\boldsymbol{s}+p\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}=\frac{dp}{dt}\boldsymbol{s}+p\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dp}{dt}\boldsymbol{s}+pv\frac{d\boldsymbol{s}}{ds}.$$

现由微分几何,已熟知 $d\boldsymbol{s}/ds$ 是单位主法线 $\boldsymbol{\nu}$ 方向上的矢量,其绝对值等于轨线的曲率 $1/\rho$. 因此

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{dp}{dt}\boldsymbol{s}+\frac{pv}{\rho}\boldsymbol{\nu}.$$

由此式和(1)式得出,瞬时曲率中心位于过切线 $\boldsymbol{s}$ 与电矢量 $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\phi$ 的平面内. 将 $\operatorname{grad}\phi$ 分解在两个方向上,得出

$$\frac{dp}{dt}\boldsymbol{s}+\frac{pv}{\rho}\boldsymbol{\nu}=-e[(\boldsymbol{s}\cdot\operatorname{grad}\phi)\boldsymbol{s}+(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{grad}\phi)\boldsymbol{\nu}]. \tag{3}$$

使两边第一项相等,得一标量方程,它可称为"时间表",因为它最终导至电子在轨线上的位置作为时间的函数. 乘以 $v=ds/dt$ 后,它可积分得出

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=-e\phi+\text{常数}. \tag{4}$$

这是爱因斯坦能量积分. 对于慢运动粒子 $(\beta\ll 1)$, 它过渡到牛顿积分, $\frac{1}{2}mv^2+e\phi=$ 常数.

为了方便起见,现在把问题局限于只考虑具有相同积分常数即具有相同总能量的电子. 如果所有电子已在某一势曲面 ϕ_0 处以零速始发,就是这种情况. 在许多实际问题中,这个曲面可认为与阴极等同. 写出

$$V=\phi-\phi_0,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

即测量以 ϕ_0 为基准的电势 V，这时能量积分表示为以下的形式：

$$mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right]=-eV. \tag{4a}$$

将此式与(2)式结合起来，可将这两个式子表示为有用的双方程的形式，

$$\left(1-\frac{eV}{mc^2}\right)^2=1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2=\frac{1}{1-\beta^2}. \tag{5}$$

因此由

$$mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}-1\right]=-eV(x, y, z) \tag{6}$$

确定这些粒子的动量标量值 p 为位置 x, y, z 的函数.

现在考虑(3)式的第二部分，即垂直于运动方向的分量：

$$\frac{pv}{\rho}=-e[\boldsymbol{\nu}\cdot \operatorname{grad} V]. \tag{7}$$

通过(2)和(6)式用 p 表示 v 和 V，得出简单的定律

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\boldsymbol{\nu}\cdot \operatorname{grad} p}{p}=\boldsymbol{\nu}\cdot \operatorname{grad}(\log p). \tag{8}$$

(8)式与关于折射率 n 与 p 成正比的媒质中光线曲率的 § 3.2 (14) 式一致，因此我们得出电子与光的路线在形式上类似.

必须强调，仅对有一固定总能量的电子，动量绝对值 p 才只是位置的函数；对有一不同能量的电子，它是另一函数，由(6)式给出. 因此折射率取决于电子能量. 这在光学中也有它的模拟，即折射率取决于光的颜色. 下面将看到，这是很恰当的比拟，因为在这两种情况下折射率原来都是波长的函数.

对于慢电子，p 与速度成正比，而这又与 $\sqrt{V}$ 成正比. 我们已用过的相对论性方程的优点在于它们清楚表明，特征量是动量而不是速度. 此外，这些结果立刻使人联想到对一般静电磁场情况的推广. 相对论中已熟知，有磁场存在时，必须用"总"动量

$$\boldsymbol{p}_{总}=\boldsymbol{p}_m+e\boldsymbol{A} \tag{9}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

代替机械动量 $\boldsymbol{p}$（现在把它写成 $\boldsymbol{p}_m$），式中 $\boldsymbol{A}$ 是矢势[1]. 这使人联想到，在静电情况下，折射率是 $\boldsymbol{p}_m$ 在运动方向上的分量；而在一般情况下，它必须用 $\boldsymbol{p}_{总}$ 在同一方向上的分量来代替. 这个推断经证明是正确的，但现在更可取的是把电磁场中的电子光学建立在一个更加坚实和普遍的基础上.

§2 变分形式的哈密顿类似

几何光学的一些定律可由费马原理导出（§ 3.3.2），根据费马原理，光在 P_1 和 P_2 两点之间的路程使得光学长度为一极小值，

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \text{极小}. \tag{10}$$

可以回想起，只有当两个端点彼此充分靠近，即在连接这两点 P_1 和 P_2 的光线上在这两点之间没有 P_1 或 P_2 的象时，费马原理的这一强式才有效. 如果 P_2 是 P_1 的象，则(10)式不是确定连接这两点的一条光线，而是确定连接这两点的一个无限小的光线锥，其中每一条都有相等的光学长度. 如果 P_1 和 P_2 相隔更远，以致在这两点之间出现一个象，则弱式

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = 0 \tag{10a}$$

仍确定一条光线，但这不是如有时说错了那样代表一极大值，而是代表积分的一个平稳值，它既不是极小值，也不是极大值.

附录 1 第11节中用变分法讨论过费马原理的某些推论. 附录 1 第 12 节中已指出，根据哈密顿原理，质点系的运动可用类似的变分形式来描述，对于单个质点的特殊情况，哈密顿原理由下述条件

$$\int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) dt = \text{极小} \tag{11}$$

表示. 这一表述在任一坐标系中都是有效的，但用笛卡儿坐标 x，

---

1) 值得注意的是，在相对论出现前三年，K. Schwarzschild (*Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, **3** (1903), 126) 已发现这个基本结果.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

y, z 就足以说明了. $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 是速度分量, L 是拉格朗日函数. 起点和终点是在四维空时中规定的, 并假定在变分过程中是固定的. 附录 1 中已说明, 拉格朗日形式和哈密顿形式的运动方程如何从哈密顿原理(11)的结果推导出来[附录 1, (77), (78)式].

对于一个具有电荷 e 和静止质量 m 的相对论性电子, 拉格朗日函数为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\left(\phi - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}\right). \qquad (12)$$

这里, $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ 是速度矢量, ϕ 是静电势, $\boldsymbol{A}$ 是磁势或矢势[1]. 将(12)式代入拉格朗日运动方程[附录 1(77)式], 并利用电磁关系式 § 2.1(7)和 § 2.1(5),

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} - \text{grad}\,\phi, \quad \boldsymbol{B} = \text{curl}\,\boldsymbol{A},$$

就能证实拉格朗日函数(12)式. 因此拉格朗日方程表示为下述形式:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right), \qquad (13)$$

它是运动方程的牛顿-洛伦兹形式.

对于电子光学来说, (11)式所表述的哈密顿原理是很普遍的. 它含有时间, 如果场是稳定的, 则对此没有兴趣. 此外, 它代表 ∞^5 致极曲线; 其中 ∞^4 是因为给定总能量时, P_1 和 P_2 两点可在任意两个给定曲面上自由选择, 还有一个无穷大是因为总能量是未定的. 为了减少繁冗的维数, 在电子光学中采取与光学中类似的步骤.

首先, 固定能量常数, 亦即限于讨论单色光或单能电子. 如附录 1 (87)式所示, 这使得本问题的维数减去一维. 现在把哈密顿原理(11)替换为最小作用原理,

$$J = \int_{P_1,\,t_1}^{P_2,\,t_2} (L + E)\,dt = \text{极小}, \qquad (14)$$

---

1) 没有相对论性改正的拉格朗日函数(12)已在 1903 年由 K. Schwarzschild 在上述引文中得出.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 E 是总能量

$$E=\sum \dot{x}p_x-L.$$

(14)式中，时间 t 只是形式上出现，因为代入 E，得出

$$J=\int_{P_1,t_1}^{P_2,t_2}\sum p_x\dot{x}dt=\int_{P_1}^{P_2}\sum p_x dx=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}=\text{极小}. \quad (15)$$

在上式的第二和第三个式子中已去掉 t_1，t_2，因为我们只讨论时间不变场(否则总能量不会保持恒定)，在这种场中，起始时间 t_1 不重要，而经过的时间 t_2-t_1 完全由路程和能量常数确定.

因此，最小作用原理(14)与费马原理(10)完全类似. 如果把**电子光学折射率定义为动量在轨线方向上的分量**，则电子运动的研究就化为一个光学问题. 对于纯静电场，看出这一结果与上一节由更基本的考虑得到的结果等效. 在这种情况下，动量是纯机械的，并与轨线平行，其值由(2)式给出：

$$p_m=\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

有磁场存在时，必须用动量分量的一般定义［附录 1，(74)式］，即作为拉格朗日函数对速度分量的微商. 对于具有拉格朗日函数(12)的单个粒子，动量分量为

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}A_x,$$

等等. 写成矢量形式，

$$\boldsymbol{p}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}. \quad (16)$$

因此，除了一任意常数因子外，一般的电子光学折射率为

$$n=\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{s}, \quad (17)$$

式中 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{s}$ 是矢势在运动方向上的分量. 再一次得知，它必须解释为具有一给定总能量的电子的位置函数.

看来一般情况和纯电场特殊情况之间存在一个重要差别. 在电场中，折射率与机械动量成正比，后者是一个可测的物理量.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在一般表达式(17)中，第二项是矢势分量，它不是一个物理量(physical quantity)，而是一个函数，其旋度等于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$. 由此可见，一般的电子光学折射率本身不是一个物理量，而是一个拉格朗日函数[1]. 但这对纯电场特殊折射率同样成立. 在这两种情况下，都可以加上一个任意位置函数的梯度在运动方向上的分量，而不改变任何物理结果.

上述特殊情况和一般情况之间还有一个更重要的差别，如果进一步仿照光学的简化方法，把轨线场的 ∞^4 簇简化为 ∞^2 簇，则最能说明这一差别. 为此，选择一些从某一曲面 $\mathscr{S}(x, y, z) = \mathscr{S}_0$ 垂直地出发的轨线. 在几何光学中，这一曲面可看作一波阵面，于是可以证明这一维轨线将处处与曲面族 $\mathscr{S}(x, y, z) =$ 常数垂直；这就是马吕斯和杜平定理(§ 3.3.3).

如附录 1 第 2 节和第 3 节所述，在一般情况中还存在某种"横截"性，但它的含义不如马吕斯-杜平定理中那样简单. 这时与曲面族 $\mathscr{S} =$ 常数保持垂直的不是轨线方向上的单位矢量 $\boldsymbol{s}$，而是动量 $\boldsymbol{p}$. 由于只规定矢势适于规范变换，因此存在无限多个横向曲面族，但有磁场存在时，它们用任何规范归一化步骤都不能横截轨线.

用几何学的语言来说，垂直于一曲面族的那些二维曲线锥构成一"法线汇"，不然的话则构成一"斜线汇"(参看 § 3.2.3). 在光学和静电电子光学中，轨线可排成一些法线汇，其横截曲面与"波阵面"等同. 在磁场中，一些通常称为"束"的二维轨线锥构成斜线汇，横截波阵面的概念对此不能适用. 这是电子光学和光学之间的一个相当本质的差别.

§ 3 自由电子的波动力学

爱因斯坦在 1905 年首先推测光有二象性. 光传播时好象它

---

1) W. Ehrenberg 和 R. E. Siday 在 *Proc. Phys. Soc.*, B, **62** (1949), 8 中已特別强调这一点，他们还指出了下述有趣的事实，如果磁场不处处为零，就不可能用一规范变换把 $\boldsymbol{A}$ 归一化，使得磁场为零时它随着也为零.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

是电磁波，而光与物质相互作用时好象它的能量集中于光子，每个光子有一个能量子. 其后不久，光电过程和光化学过程的观察辉煌地证实了爱因斯坦的推测.

实物粒子的二象性概念来自德布罗意，他在 1923 年指出，如果存在一个以相对论性不变的方式与一个具有机械动量 p_m 的粒子相联系的波长，则它只能有下述形式：

$$\lambda = \frac{h}{p_m}, \tag{18}$$

式中 h 是一个具有作用量量纲的普适常数，德布罗意使它等同于普朗克常数.

其后不久，海森伯，玻恩和约旦完全不依赖于德布罗意而发展了量子力学的第一个完整的数学表述，但他们的方法对于讨论自由粒子不如薛定谔的波动力学那样方便，现将简述后者.

薛定谔把德布罗意的概念与哈密顿的概念结合起来，得出了粒子运动的波动描述问题，它与质点动力学的关系就象波动光学与几何光学的关系一样. 薛定谔的历史性探讨当然含有某些猜测成分，正如我们现在所知道的，它只在一定程度上才是正确的，因为尽管几何光学在逻辑上是包含在波动光学之中的，但逆命题不正确.

假定存在一个波场，其强度表示电子密度，就象电磁场强度表示光子密度一样. 而且假定这是一个标量场，其振幅用某一标量函数 $\Psi(x, y, z, t)$ 表示；为了计算它可能具有的类波性，假定它满足波动方程

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{u^2}\ddot{\Psi},$$

u 是波速，一般是位置的函数. 这当然是一个有高度约束性的假设，因为通常具有恒定传播速度的波动方程可用多种不同方法加以推广，这只是其中最简单的一种方法.

用"单色"波代替 Ψ，

$$\Psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{-i\omega t},$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

得到与时间无关的方程

$$\nabla^2\psi = -\left(\frac{\omega}{u}\right)^2\psi$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\psi, \tag{19}$$

其中只出现波长 λ，而不出现波速. 现在假定，如果动量 p_m 用一个粒子根据经典力学在点 x，y，z 所具有的值来代替，该值可由(6)式计算，则 λ 与德布罗意波长相同. 为了简单起见，考虑静电场中的一个慢电子. 在这种情况下，由德布罗意关系式(18)与(6)式结合得出

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - e\phi)}}. \tag{20}$$

将上式代入(19)式得出

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - e\phi)\psi = 0. \tag{21}$$

这是自由粒子在一标量势场中的薛定谔波动方程. 因它是与时间无关的方程，所以可把它解释为描述定态，例如粒子在力场中的周期运动. 但我们可把它同样应用于电子光学所处理的稳定束，其中许多粒子一个接着一个全都在同样条件下出现. 在上述任一种情况下，按照玻恩的统计诠释，看来有理由假定，振幅绝对值平方 $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ 与 x，y，z 点处经过长时间测得的粒子密度成正比；或者在这种情况下，同样地，它与任一时刻在这一点处观察到一个粒子的几率成正比.

(21)式的首次证实是由薛定谔作出的，他证明了如果假定电子束缚在一个与卢瑟福和玻尔的旧原子模型相同的力场中，则(21)式可解释原子光谱. 对目前的场合更有关系的是，在自由电子情况下，由戴维孙和革末以及由汤姆孙独立地在 1927 至 1928 年间发现电子衍射而对(21)式的证实.

对于动能等于 eV 电子伏特的慢电子，德布罗意关系式(18)给出波长近似为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ 埃.}$$

因此在实验室作实验时不难处理的电子波长约为几分之一埃，与X射线有相同的数量级. 所以自由电子的波动性最容易用类似于晶体点阵中X射线衍射的实验来阐明.

X射线分析的术语也适用于电子，这些术语与光学术语稍有区别. 所谓X射线或电子衍射实际上是点阵上或多或少有规则地排列的原子所发射的相干次级子波的干涉. 由比较大的障碍物(其原子结构不起作用)引起的在光学意义上的电子衍射，结果形成非常小的衍射角，1940年博意什（H. Boersch）在电子显微镜中首次观测到这种衍射[1].

§4 光学原理应用于电子光学

对于电子光学几乎所有实际用途来说，波动力学这一段初步和不完整的概述就足够了. 甚至不必把波动力学推广到磁场，因为在电子光学中，从来不必超过衍射问题的基尔霍夫近似. 这种近似所依据的假定在电子光学中完全得到证实. 除了在原子核内部和紧靠原子核近旁的场外，在电子光学所用的电子波长范围内有明显变化的陡变电场是不存在的. 这对于磁场更为真实，可由克莱因-戈登或狄喇克波动方程推知的特殊的磁衍射效应都太小，以致不能用自由电子的实验测出. 因此，记住下面将说明的注意事项，就可放心地应用基尔霍夫衍射理论(§ 8.3)，它的略加推广的形式可概括如下：

I. 按几何光学法则的计算，从光源到障碍物或物体沿光线度量等光学长度作出波阵面.

II. 如果障碍物是一暗屏，则认为波阵面不受阻挡的部分在位相和振幅上都不受干扰，而其余部分被挡掉了. 在部分透明物

---

1) H. Boersch, *Naturwissenschaften*, **28** (1940), 709. Boersch 的衍射照片复制于 W. Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik* (Wien, Springer, 1952), p. 548.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

体的情况下，由几何光学定律描绘出通过物体的光线，位相和强度的变化由它的复折射率确定. 这在所有实际情况中都证明是正确的，因为，例如在显微镜中，所考虑的物体厚度是这样小，以致物体内部的衍射效应可放心地忽略.

III. 为了计算距离很远的某一点处的衍射效应，例如在光学象中，则由几何光学法则计算由物体或障碍物处露出的波阵面上每一面元到这一点的透射，并且计及倾斜因子，对复振幅求和.

如果只存在电场，包括固态物质的原子结构引起的强微观场，它主要也是电场，则如上所概述的基尔霍夫方法可不加修正地运用到电子光学中. 然而，如果存在磁场，就不再能通过沿着轨线画出相等数目的德布罗意波长来确定波阵面. 正如本附录第 3 节末所指出的，磁场中的波阵面不再与轨线正交，而与总动量线即"p 线"正交，后者没有简单的几何光学解释. 从某一给定的波阵面出发，沿 p 线画出光学长度，原则上能确定各波阵面. 实际上这种方法几乎毫无用处，因为它给出位相而不给出振幅. 巧妙地用等效电透镜代替磁透镜成象，除了象的整体有一转动以及象有某种转动畸变外，两种透镜产生同样的象场，这样就能实际上避免上述的复杂性. 忽略在传播过程中这些特殊磁效应，只在最后把它们加上去，就能放心地应用基尔霍夫方法，得出满足所有实际用途的结果.

虽然电子光学与光学有同样的一般数学基础，但其实际结构很不相同. 实际的光学是在把透明或起反射作用的固体媒质研磨和抛光成适当形状表面的技术基础上发展起来的. 在电子光学中只有一种媒质，即电磁场. 当它涉及校正象差时，尤其是当空间电荷和空间电流由于实际原因不能用时，它就存在一些限制. 在电子光学的发展中早已发现，只要人们仅考虑旋转对称场，就不可能作成无球面象差或无色差的发散透镜和系统. 这就导致发展无旋转对称的系统，其中上述这些限制不成立，还导致发展具有弯曲光轴的系统，这种系统在光学中几乎不为人们所知. 因此，光学仪器

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

和设计原理的知识，在电子光学中只就其能提出问题并促进创新而言才是有益的，要付诸实现则必须迥然不同．另一方面，同电子光学在第一个四分之一世纪时一样，基于这两个领域基本类似，光学的思想在今后很可能仍是有益的．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录3 一些积分的渐近逼近

本附录的目的是给正文中所涉及的一些带普遍性的方法提供数学背景，以便得出光学中经常出现的某些类型积分的渐近逼近.

§1 最速下降法

这是求下述类型复积分对于大的 k 值的渐近逼近的方法[1]:

$$\int g(z)e^{kf(z)}dz, \tag{1}$$

式中 $g(z)$ 和 $f(z)$ 与 k 无关.

现在，k 可看作是正实数，下面的讨论中就是这样假定的. 然而事实上所给出的结果对于 k 的复值一般也是正确的，这就需要对一个复变量（如 ζ）函数的渐近展开作几点引述.

首先，根据庞加莱的工作[2]，渐近展开的定义可陈述如下：如果

$$F(\zeta)=\sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{\zeta^m}+R_n(\zeta), \tag{2}$$

式中，对于一个给定区间内的 $\arg\zeta$，当 $\zeta\to\infty$ 时，对所有的 n，$\zeta^n R_n(\zeta)\to 0$，a_0，a_1，$\cdots$ a_n 是常数，则可写成

$$F(\zeta)\sim a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots, \tag{3}$$

(3)式右方称为对于该 $\arg\zeta$ 给定范围的 $F(\zeta)$ 的渐近展开.

如果 $F(\zeta)$ 是两个函数如 $G(\zeta)$ 与 $H(\zeta)$ 的商，则可写成

$$G(\zeta)\sim H(\zeta)\left(a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots\right). \tag{4}$$

---

1) 源出自 P. Debye, *Math. Ann.*, **67** (1909), 535.

2) H. Poincaré, *Acta Math.*, **8** (1886), 295.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

事实上，应着重指出，进一步讨论时，所考虑的展开是按(4)式右方的形式，$H(\zeta)$ 是 $\exp(a\zeta)$，其中 a 是某一常数。

现在扼要陈述渐近展开的某些主要性质[1]。如果 $|\zeta|$ 充分大时，(3)式的级数停止或收敛，则该级数是渐近的；但对于 $|\zeta|$ 的任意值，它常常未能收敛。一般地说，对于给定的 $F(\zeta)$，一种特殊的展开只对 $\arg\zeta$ 的一个特定范围成立；如果它对所有的 $\arg\zeta$ 都成立，则它是收敛的。还有，对于给定的 $F(\zeta)$，在 $\arg\zeta$ 的适当范围内，渐近展开是唯一的，其意义是(3)式中各系数都是唯一的；另一方面，任一函数的渐近展开也属于无穷多个其他函数，例如对于 $-\frac{1}{2}\pi < \arg\zeta < \frac{1}{2}\pi$，$F(\zeta)+e^{-\zeta}$ 与 $F(\zeta)$ 二者的渐近展开相同。两个函数乘积的渐近展开由它们各自的渐近展开相乘得出。最后，(3)式可逐项积分，从而无条件地得出 $F(\zeta)$ 积分的渐近展开；它也可以逐项微分，只要它存在，就得出 $F(\zeta)$ 微分的渐近展开。

一般地说，对于一个给定的(充分大的) $|\zeta|$ 值，(3)式各项的模开头逐项减小到一极小值，随后又增大。粗略地说，如果对展开式求和到最小项前任何项，则误差具有第一个省略项的数量级[2]。显然，$|\zeta|$ 越大，可用的准确度就越高。在物理应用中，通常只用第一项就足够了；借用电磁理论的一个例子来说明，一个有限源分布的辐射场就是完全场按与源距离的逆幂渐近展开的第一项。

得出(1)式按 k 的逆幂渐近展开的方法的根据是将它与下述形式的积分联系起来[3]，

$$\int_0^\infty h(\mu)e^{-k\mu^2}d\mu. \tag{5}$$

---

1) 例如参看 H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1946)，第 17 章；或 A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions* (New York, Dover Publications, 1956).

2) 估算误差的方法见 H. and B. S. Jeffreys, 上述引著，第 17 章.

3) 被积函数的指数中选择 μ^2 而不选择 μ 的一次幂(或其他次幂)并没有很大意义；选偶次幂是方便的，因为常会碰到(1)式的积分路线起点和终点都在无穷远处，这时用 $-\infty$ 代替下限，就可将(1)式变换为(5)式.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

为了能容易地导出(5)式的渐近展开，办法是把 $h(\mu)$ 展开为 μ 的升幂级数，并逐项积分。

最后这一段论述实际上就是沃森（Watson）引理[1]。它可陈述为下述形式，设

$$h(\mu)=\frac{1}{\mu^{\alpha}}\sum_{s=0}^{\infty}c_s\mu^{\beta s}, \tag{6}$$

其收敛半径为 ρ，式中 β 是正实数，并且 α 的实部小于1。设存在一个实数 d，使得对于所有大于 ρ 的实数值 μ，$\mu^{\alpha}e^{-d\mu^2}h(\mu)$ 有界。则(用 Γ 表示伽玛函数)

$$\frac{1}{2k^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}}\left\{c_0\Gamma\left(\frac{-\alpha+1}{2}\right)+c_1\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{k^{\frac{1}{2}\beta}}\right.$$
$$\left.+c_2\Gamma\left(\frac{2\beta-\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{k^{\beta}}+c_3\Gamma\left(\frac{3\beta-\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{k^{\frac{3}{2}\beta}}+\cdots\right\} \tag{7}$$

是(5)式的渐近展开。

在物理上感兴趣的情形中，很可能是 α 为零而 β 为1。正如前已提出的，(7)式第一项也常提供了足够的近似。

为了能改变积分变量，以便用一个或多个(5)式类型的积分来表示(1)式，这就必须用一些线段组成积分路线，沿着其中每一线段，$f(z)$ 的虚部为常数，而 $f(z)$ 的实部单调下降到 $-\infty$。如果情况不是这样，则第一步要适当改变路线。当然，路线的改变由复平面内积分的基本规则所支配；这里将只是说明，怎样才能利用一些具有所需性质的线段使路线闭合，并已假定可尝试用标准方法对任何余下的围道积分求值。

对于下述路线，可作出某些一般性的评述，沿着这些路线，$f(z)$ 的虚部为常数，而不管特定函数的性质如何。它们足以说明复平面内的两点怎样按所要求的方式相连接，尽管当 $f(z)$ 有奇点时，这种方法或许失效。就目前而论，满足

$$\frac{df}{dz}=0 \tag{8}$$

1) G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 2nd ed., 1948)，第8章。也见于 H. and B. S. Jeffreys，上述引著，第17章。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

的那些点起着尤其重要的作用．这些点称为鞍点，因为在这些点处，$f(z)$的实部和虚部对于复平面中的位置是平稳的，不是绝对极大或极小[1]．

现在，如果

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\tag{9}$$

则由柯西-黎曼关系不难证明，沿任一 $v(x,y)=$ 常数的路线，$u(x,y)$的变化率只能在鞍点处为零．换句话说，在不通过鞍点的路线 $v(x,y)=$ 常数上，$u(x,y)$ 始终严格单调；而在通过一个或多个鞍点的路线 $v(x,y)=$ 常数上，$u(x,y)$ 在相邻的鞍点之间以及从始末两头的鞍点到相应的路线端点之间都严格单调．事实上，从任何一点出发，$u(x,y)$ 下降最快的方向就是沿着 $v(x,y)$ 为常数的方向，在这个意义上说，这些路线就是最速下降路线．只要$f(z)$ 是单值的，或者经分支切割而成为单值的，就可得出，从任一点 (x_0,y_0) 出发，可以选取一条路线 $v(x,y)=v(x_0,y_0)$，它在 $u(x,y)$ 减小的方向上总是连续的，并终止于无穷远或奇点处．不难看出，除了那些奇点以外，只有可以被一条路线 $v(x,y)=$ 常数从多于一个方向通过的那些点处，才有 $df/dz=0$；因此，一旦路线 $v(x,y)=v(x_0,y_0)$ 已正确地始发，随着 $u(x,y)$ 减小，如果不遇到鞍点，就不发生改变路线的问题，在遇到鞍点的情况下，至少有一个减小 $u(x,y)$ 的方向可以利用．

现在假定(1)式中给定积分路线的两个端点是 A 和 B，并假定有可能找到由 A 和 B 分别到无穷远的最速下降路线．如果这两条路线在无穷远的终端是在同一积分收敛区域内，则步骤是完备的；但如果无穷远的终端是在不同的收敛区域内，则必须用一条路线 $v(x,y)=$ 常数把它们连接起来，沿着这条路线，$u(x,y)$ 的变化率只改变符号一次(在鞍点处)，或者如有必要，就用几条这样的路线经过无穷远处的一些中间区域．对于所涉及的每一条不同的路线，都可得出在(4)式广义上的一个渐近展开，但原来积分真正的

---

1) 解析函数的实部和虚部在复平面内没有绝对极大或极小．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

渐近展开只不过是在 $u(x, y)$ 达到其最大值的路线上得出的[1]. 当最速下降路线终止于奇点时，类似的说法也适用.

应当指出，有些情形超出了刚才所述方法的精度范围，不过略加修正仍可处理. 作为第一步，注意到用任一正数(与 k 无关)来替换(5)式中的上限，渐近展开式(7)保持不变. 因此，可以处理这种情况，其中含有一条最速下降路线，沿着这条路线，$u(x, y)$ 趋向下降到一有限值而不是 $-\infty$. 还有，可以用一条路线 $v(x, y)$ = 常数通过多个点，在这些点处，$u(x, y)$ 的变化率改变符号.

最速下降法适用的也许是最普通的情况，是其中积分路线 $v(x, y)$ = 常数从一个鞍点到无穷远而 $u(x, y)$ 一路上单调下降的情况[2]. 这时不难导出渐近展开第一项的熟知公式. 因假定鞍点在 z_0 处，并用变换

$$f(z) = f(z_0) - \mu^2 \tag{10}$$

改变(1)式中的积分变量，所以(1)式变为

$$-2e^{kf(z_0)}\int_0^{\infty} \frac{g(z)}{f'(z)} \mu e^{-k\mu^2} d\mu. \tag{11}$$

为了得到(11)式的渐近展开的第一项，需要求出 $\mu = 0(z = z_0)$ 处的 $\mu g(z)/f'(z)$ 的值. 只要 $f''(z_0)$ 不为零，并且 $g(z_0)$ 不为无穷大，不难看出它等于 $g(z_0)/\sqrt{-2f''(z_0)}$，其中平方根的符号必须由考察每一特定情况来确定. 因此，所要求的近似为

$$\sqrt{-\frac{\pi}{2f''(z_0)}}\, g(z_0) \frac{e^{kf(z_0)}}{\sqrt{k}}. \tag{12}$$

关于近似式(12)需要补充或无效的情况，应加上几点说明. 当然，把 $\mu g(z)/f'(z)$ 展开成 μ 的幂级数，并对(11)式逐项积分，

---

1) 当然，可能在多于一条路线上，$u(x, y)$ 达到最大值.

2) 严格地说，最普通的情况是其中路线起点和终点都在无穷远处，而 $u(x, y)$ 从 $-\infty$ 单调上升到鞍点处的极大值再从这一极大值单调下降到 $-\infty$ 的情况. 在这种情况下，只要乘以 2，(12)式仍成立；但对于其后的讨论，更方便的是取一条从鞍点开始的路线. 因为安排积分路线从鞍点开始或通过鞍点的情况是这样寻常，以致最速下降法有时称为**鞍点法**.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

就得出完全的渐近展开．如(7)式所示，渐近展开第一项中出现的 k 的幂是由 $\mu g(z)/f'(z)$ 级数展开第一项 μ 的幂决定的．如果这一级数展开的第一项是 $A\mu^{-p}$，为了积分收敛，其中 p 必须小于 1，则渐近展开的第一项为

$$-A\Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right)\frac{e^{kf(z_0)}}{k^{\frac{1}{2}(1-p)}}. \tag{13}$$

因此，如果 $g(z_0)$ 为无穷大或 $f''(z_0)$ 为零，则(12)式无效，必须用 (13) 式代替．在这些情况下，当 k 趋于无穷大时，因子乘以 $\exp\{kf(z_0)\}$ 趋于零比 $k^{-\frac{1}{2}}$ 趋于零更慢．如果 $g(z_0)=0$ 或 $f''(z_0)$ 为无穷大，(12)式并非不正确，而只是表明，当 k 趋于无穷大时，因子乘以 $\exp\{kf(z_0)\}$ 趋于零比 $k^{-\frac{1}{2}}$ 趋于零更快．

如果积分路线是一条最速下降路线，同前面一样伸到无穷远处，但从不是鞍点的一点开始，则不难看出，渐近展开第一项的非指数部分一般与 k^{-1} 成正比，与(12)式的因子 $k^{-1/2}$ 不同．还有，如果 $g(z)/f'(z)$ 在端点是奇点或零点，则 k 的幂是不同的，取决于奇点或零点的阶．

迄今所述已相当全面地包括了在严格的数学意义上由渐近展开的最速下降法得出的结果，其中允许 k 变得无限大，并假定其他参量具有与 k 无关的规定值．但已证明，渐近逼近的形式取决于特定的条件，例如，最速下降路线是否从鞍点开始．也就是说，它可在下述意义上取决于除 k 以外的一些参量，即这些参量取某些临界值时，它突然变化[1]．因此对于任一给定的 k 值，无论它有多大，只要其他参量的值充分接近于渐近形式将会不同的那些值，则上述公式显然不能提供良好的数值近似．所以对于进一步的表达式有一实际要求，这些表达式要给出从一种渐近形式到另一种渐近形式的光滑过渡．它们自然是比(13)式更复杂的 k 的函数，而值得提到的是三种可满意地处理的情况．在下面扼要的叙述中不言而喻地假定，每一种情况下，唯一的复杂性就是在讨论中具体规

1) 这在本质上是一个非一致收敛的问题．举一个寻常的例子来说明，当 $k\to\infty$ 时，对于 $a\neq 0$，$1/(1+ka)\sim 1/ka$，而对于 $a=0$，$1/(1+ka)\sim 1$．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

定的复杂性.

首先，假定 $f''(z_0)$ 接近于零. 因此(12)式只对于增到很大的 k 值才是良好的近似;并要求有一个表达式,以实现从(12)式过渡到 $f''(z_0)=0$ 时适用的不同形式. 因为 $f''(z_0)$ 几乎为零，所以必须有第二个鞍点,如 z_1，靠近 z_0. 因此,作下述变换:

$$f(z)=\alpha-\beta\mu+\frac{1}{3}\mu^3,$$

式中

$$\alpha=\frac{1}{2}[f(z_1)+f(z_0)],\quad \frac{2}{3}\beta^{3/2}=\frac{1}{2}[f(z_1)-f(z_0)],$$

就可得出所要求的表达式. 这一变换给出在 z_0 和 z_1 的近旁 z 是 μ 的正则函数,并导致用爱里积分及其对自变量 $k\beta$ 的一阶微商表示的渐近展开[1].

其次，假定 $\mu g(z)/f'(z)$ 作为 μ 的幂级数的展开式有一收敛半径,因为 $g(z)$ 有一个一阶极点靠近鞍点，所以收敛半径接近于零. 还有,(12)式只对于增到很大的 k 值才是良好的近似,并要求有一个表达式，以实现从(12)式过渡到极点在鞍点时适用的不同形式. 这种情况已被不同作者讨论过[2]. 想法是把被积函数的非指数部分写成两项之和，一项只含极点，另一项是正则的. 因此，后者可用通常的方法处理，而前者得出一般带有一个复自变量的菲涅耳积分或误差积分.

最后,假定最速下降路线的起点不是鞍点,但很接近鞍点. 在这种情况下,显然仍能用误差积分来连接两种渐近形式[3].

---

1) 爱里积分在这类一致逼近中的作用早已被承认(例如参看 H. and B. S. Jeffreys, 同上引著,第 17 章),但只在较近的时期才充分探讨过这里概述的一种满意的方法[见 C. Chester, B. Friedman, and F. Ursell, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 599].

2) W. Pauli, *Phys. Rev.*, **54** (1938), 925. H. Ott, *Ann. d. Physik* (5), **43** (1943), 393. P. C. Clemmow, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3** (1950), 241; *Proc. Roy. Soc.*, A, **205** (1951), 286. B. L. van der Waerden, *Appl. Sci. Res., Hague*, B, **2** (1952), 33.

3) P. C. Clemmow, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3** (1950), 241.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§2 稳相法

这是不同于最速下降法的另一种方法，虽然二者很类似. 尽管这种方法也许不大常见，在解析上不易立即使人信服，但它常有与物理问题密切联系的长处. 所考虑的积分写成

$$\int g(z)e^{ikf(z)}dz \tag{14}$$

比写成(1)的形式更恰当，在实际问题中，指数部分通常代表行波.

保留(9)式的记法，所用的积分路线为 $v(x, y)=$ 常数；但在(14)式中，这意味着指数的振幅部分沿着此路线为一常数，而位相部分变化极迅速，情况与最速下降法相反. 仍然可以确定，只有邻近鞍点或端点的那些部分路线才对积分有重要的贡献. 但现在是用"位相干涉"(参看上册，§ 8.3，505 页)而不是振幅衰变来对产生这种情况的机制作物理解释.

稳相法首先由开耳芬[1]明确引入. 其后，沃森[2]作出严格的数学处理以证明上面所述；这种处理基于下述事实：如果 $0<m<1$，a 是一个正常数，并且在 $x\geqslant 0$ 的区域内，$F(x)$ 的总涨落有界，则当 $k\to\infty$ 时[3]，

$$k^m\int_0^a x^{m-1}F(x)e^{ikx}dx\to F(0)\Gamma(m)e^{\frac{1}{2}im\pi}.$$

然而沃森的讨论在范围上颇受限制. 特别是看来它不能得出完全的渐近展开. 对于其中 $f(z)$ 是实函数以及积分路线限制在实轴上的情况，这已相当详细地由福克[4]给出. 福克利用中和函数，这是范德考普特 (van der Corput)[5] 较早就提出过的方法.

---

1) W. Thomson, *Proc. Roy. Soc.*, A, **42** (1887), 80.
2) G. N. Watson, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **19** (1918), 49.
3) T. J. I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series* (London, Macmillan, 1908), p. 447 给出的结果.
4) J. Focke, *Ber. Sächs. Ges. (Akad.) Wiss.*, **101** (1954), Heft 3.
5) J. G. van der Corput, *Indag. Math.*, **10** (1948), 201.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

稳相法的推论几乎完全仿照最速下降法的推论. 例如，在(14)式中积分路线从 z_0 处一鞍点出发，沿 $v(x, y)$ = 常数伸至无穷远，且没有遇到其他鞍点的情况下，与(12)式对应的近似式为

$$\sqrt{-\frac{\pi}{2f''(z_0)}}\, g(z_0)\, e^{-\frac{1}{4}i\pi}\, \frac{e^{ikf(z_0)}}{\sqrt{k}}. \tag{15}$$

但应注意两种方法存在某种区别的这一方面. 利用从一鞍点出发而不伸至无穷远的最速下降路线，路线端点对严格渐近展开的贡献与鞍点的贡献相比为零，因它含有附加的指数因子. 另一方面，利用同一类型的稳相路线，路线端点的贡献一般与鞍点的贡献同一数量级，仅除以 $k^{1/2}$；所以，仅当单独保留渐近展开的第一项时，它才被排除在渐近逼近之外.

总之，不管最速下降法和稳相法的数学表达式如何，二者均取决于积分路线的选择，使得由于被积函数的指数因子的缘故，除了在某些临界点近旁外，被积函数对积分的贡献可忽略，这些临界点就是积分路线的鞍点或端点.

§ 3 二重积分

§ 8.3 和 § 9.1 中已表明，场经一开孔衍射的问题导致下述形式的二重积分：

$$\iint g(x, y) e^{ikf(x,y)} dx dy, \tag{16}$$

式中 $g(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 与 k 无关，积分域由该孔确定. 显然，(16)式与(14)式相似，渐近展开同样可提供对于大的 k 值的近似式.

二重积分的渐近展开理论比单重积分自然更为复杂. 复平面上的积分方法只能方便地用于单重积分，因此对于二重积分，看来似乎必须基于与本附录前几页所述稍有不同的方法来着手处理.

福克[1] 广泛地讨论了 $f(x, y)$ 是实函数的情况，他用到中和函

1) J. Focke (上述引文). 又见 D. S. Jones and M. Kline, *J. Math. Phys.*, **37** (1958), 1; N. Chako, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 436, 580, 637; M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965), 第 12 章.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数的概念，在前面引过的论文中已涉及这一概念对单重积分的应用．分析再次表明，对渐近展开的贡献仅来自某些临界点的邻近区域，而不同类的临界点在其各自贡献的首项中引起 k 的不同幂[1]．

有三类临界点．现在扼要讨论它们各自对渐近展开所作贡献的首项，不考虑一个临界点属于不止一类的情况．

第一类临界点是在积分域内的点，在这些点处，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{17}$$

因此在临界点 (x_0,y_0) 附近，

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\alpha(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\beta(y-y_0)^2+\gamma(x-x_0)(y-y_0)+\cdots, \tag{18}$$

式中 $\alpha=\partial^2f/\partial x^2$，$\beta=\partial^2f/\partial y^2$，$\gamma=\partial^2f/\partial x\partial y$，所有的偏微商都在 (x_0,y_0) 处计值．现在选择两个新的积分变量 ξ,η，使得

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\alpha\xi^2+\frac{1}{2}\beta\eta^2+\gamma\xi\eta. \tag{19}$$

因此(16)式所要求的渐近逼近为

$$g(x_0,y_0)e^{ikf(x_0,y_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{1}{2}ik(\alpha\xi^2+\beta\eta^2+2\gamma\xi\eta)}d\xi d\eta$$
$$=\frac{2\pi i\sigma}{\sqrt{|\alpha\beta-\gamma^2|}}g(x_0,y_0)\frac{e^{ikf(x_0,y_0)}}{k}. \tag{20}$$

式中取正的平方根[2]，并且

---

1) J. G. van der Corput 在 *Indag. Math.*, **10** (1948), 201 中，曾扼要提到二重积分的临界点；N. G. van Kampen 在 *Physica*, **14** (1949), 575 中，曾指出它们对光学的定性意义．

2) 平方根号内的项有一种简单的几何解释．考虑曲面 $z=f(x,y)$．设 R_1 和 R_2 是主曲率半径，$K=1/R_1R_2$ 是曲面上一个代表点处的高斯曲率．则[例如见 G. Salmon, *Analytic Geometry of Three Dimensions*, Vol. I, 由 R. A. P. Rogers 修订 (London, Longmans, Green & Co., 5th ed., 1912), p. 411]，

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2},$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\sigma = \begin{cases} +1, & \text{对于 } \alpha\beta > \gamma^2,\ \alpha > 0, \\ -1, & \text{对于 } \alpha\beta > \gamma^2,\ \alpha < 0, \\ -i, & \text{对于 } \alpha\beta < \gamma^2. \end{cases} \tag{21}$$

(20)式是与单重积分渐近逼近式(15)类似的二重积分渐近逼近式.

第二类临界点是积分域周界曲线上的点，在这些点处，$\partial f/\partial s = 0$，式中 ds 是周界曲线的弧元. 对渐近展开作相应贡献的首项非指数部分中 k 的幂是 $k^{-3/2}$，而不是(20)式的因子 k^{-1}.

最后，第三类临界点是积分域周界曲线上的隅角点，即该曲线上斜率不连续的点. 在这种情况下，相应的因子是 k^{-2}.

式中 $f_x = \partial f/\partial x$，$f_{xx} = \partial^2 f/\partial x^2$，等等. 在第一类临界点处，$f_x = f_y = 0$，$f_{xx} = \alpha$，等等. 此式化为

$$K = \alpha\beta - \gamma^2.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录4　狄喇克 δ 函数

本附录的目的是概述 δ 函数[1] 的主要性质，已发现它可用来代表点源，点电荷等．这个函数广泛用于量子力学以及经典应用数学中，它可由下式定义：

$$\left.\begin{aligned} &\delta(x)=0,\ \text{当}\ x\neq 0, &(a)\\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1. &(b)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

显然，$\delta(x)$ 不是寻常数学意义下的函数[2]，因为如果一个函数除在一点外处处为零，而且这个函数的积分存在，则积分值也必然为零．更为恰当的是把 $\delta(x)$ 看作具有某种符号意义的量．

考虑一个函数集 $\delta(x,\ \mu)$，随着 μ 的增大，它们仅在原点周围越来越小的 x 区间上明显不等于零，并且使得对于所有的 μ 值，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,\ \mu)dx=1. \tag{2}$$

函数[见图 8]

$$\delta(x,\ \mu)=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-\mu^2x^2} \tag{3}$$

就是一个例子．

1）亦通称脉冲函数．它因 P. 狄喇克 *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford, Clarendon Press, 1930) 一书而引起重视，但更早得多主要通过 O. Heaviside 的著作已被数学家和物理学家得知．参看 B. van der Pol and H. Bremmer, *Operational Calculus based on the two-sided Laplace Integral* Cambridge University Press, 1950), pp. 62—66.

2）δ 函数理论可用分布的概念从数学上严格得出，如 L. Schwartz 在其 *Théorie des distributions* [Paris, Hermann et Cie., Vol. I (1950), Vol. II (1951)] 中所述．Schwartz 理论的简化形式由 G. Temple, *Proc. Roy. Soc.*, A, 228 (1955), 175 一文导出，其充分阐述见 M. J. Lighthill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions* (Cambridge University Press, 1958).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

把狄喇克 δ 函数解释为这样的一个函数集当 $\mu\to\infty$ 时的极限，这种尝试是很吸引人的，但必须注意到 $\delta(x,\mu)$ 的极限不必对所有的 x 都存在. 然而

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,\mu)dx \tag{4}$$

一定存在，并等于 1. 我们把任何涉及 $\delta(x)$ 的运算理解为：利用适当选择如(3)式那样的集内一个函数 $\delta(x,\mu)$，就可进行这种运算，并在计算之末取极限 $\mu\to\infty$. 利用这种解释，(1b) 式显然成立. 只要函数 $\delta(x,\mu)$ 在原点附近的振荡（即使有也）不太激烈，则 $\delta(x,\mu)$ 的严格选择并不重要.

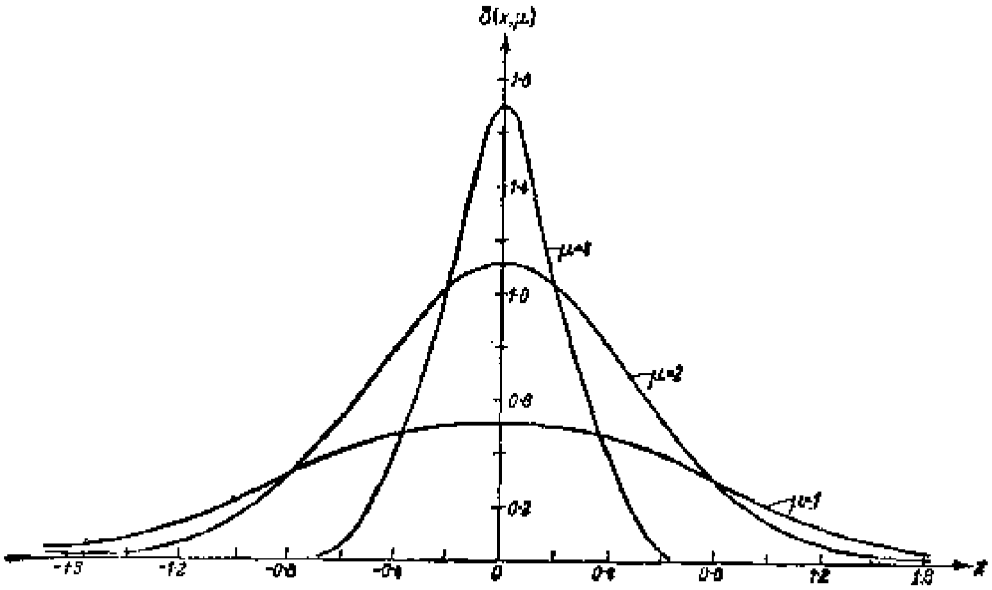


图 8　狄喇克 δ 函数意义的图示　函数 $\delta(x,\mu)=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-\mu^2x^2}$，对于 $\mu=1,2,4$. 每一条曲线下方总面积为 1

狄喇克 δ 函数的一个重要性质是所谓筛选性，由下式表示：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a). \tag{5}$$

式中 $f(x)$ 是 x 的任一连续函数. 如果用 $\delta(x-a,\mu)$ 代替 $\delta(x-a)$，并对大的 μ 值考察积分的特性，就可立即看出(5)式是正确的. 显然，当 μ 很大时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a,\mu)dx \tag{6}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

本质上只取决于 $f(x)$ 在最靠近 $x=a$ 点处的值，取 μ 充分大，用 $f(a)$ 代替 $f(x)$ 的误差就可忽略．利用(1b)式就得出(5)式．这个结果意味着，用 $\delta(x-a)$ 乘一个连续函数并对所有的 x 值积分这一步骤与用 a 代替这个函数的自变量这一步骤等价．实际上，为了使这个结果成立，积分范围不必取从 $-\infty$ 到 $+\infty$．只需把点 $x=a$ 包含在积分域内即可．这个结果也可记作

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a), \tag{7}$$

上式的含义是，当用作积分中的因子时，等式两边给出相同的结果．特别是 $f(x)=x$，$a=0$ 时，(7)式给出

$$x\delta(x)=0. \tag{8}$$

利用类似的解释，不难证明下列关系式：

$$\delta(-x)=\delta(x), \tag{9}$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{10}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(a-x)\delta(x-b)dx=\delta(a-b). \tag{12}$$

例如，为了证明(10)式，我们比较 $f(x)\delta(ax)$ 和 $f(x)\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$ 的积分．则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax)dx=\pm\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{1}{a}dy=\frac{1}{|a|}f(0),$$

式中第二个积分前面取正或负号取决于 $a\gtrless 0$．由于(5)式，还有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{1}{|a|}\delta(x)dx=\frac{1}{|a|}f(0).$$

可见两个积分相等，这就是(10)式的含义．同样地，(12)式意味着，如果等式两边分别乘以一个 a 或 b 的连续函数并对所有的 a 或 b 值积分，则得到一个恒等式．

其次，考虑对于 δ 函数的微商可给以什么解释．利用“近似函

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数" $\delta(x, \mu)$ 并分部积分，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x, \mu)dx = f(\infty)\delta(\infty, \mu) - f(-\infty)\delta(-\infty, \mu) - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x, \mu)dx.$$

当 $\mu \to \infty$ 时求极限，右方前两项为零，得出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x)dx = -f'(0). \tag{13}$$

重复这一步骤，求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0). \tag{14}$$

不难证明下列关系式：

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \tag{15}$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x). \tag{16}$$

利用亥维赛单位函数（又称阶跃函数）$U(x)$ 来表示狄喇克 δ 函数，常常是方便的（例如，参看附录 6），函数 $U(x)$ 定义为

$$\left.\begin{aligned} U(x) &= 0, \quad \text{当 } x < 0 \text{ 时}, \\ &= 1, \quad \text{当 } x > 0 \text{ 时}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

如果同前面一样，用撇号表示对自变量 x 的微商，则由分部积分（$x_1 > 0$, $x_2 > 0$），形式上得出，

$$\begin{aligned} \int_{-x_1}^{x_2} f(x)U'(x)dx &= [f(x)U(x)]_{-x_1}^{x_2} - \int_{-x_1}^{x_2} f'(x)U(x)dx \\ &= f(x_2) - \int_0^{x_2} f'(x)dx \\ &= f(x_2) - f(x_2) + f(0) \\ &= f(0). \end{aligned}$$

如果令 $x = y - a$, $f(x) = f(y-a) = F(y)$，并取极限 $x_1 \to \infty$, $x_2 \to \infty$，则上式变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)U'(y-a)dy = F(a),$$

因此 U' 具有筛选性。特别是令 $F = 1$, $a = 0$，这个关系式变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U'(y)dy = 1,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

它表明 U' 满足 (1b) 形式的关系．而且当 $x \neq 0$ 时，$U'(x) = 0$．因此可认为单位函数的微商与 δ 函数等同：

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} U(x). \tag{18}$$

δ 函数也可利用下述傅里叶积分定理引入：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik(x-a)} dx. \tag{19}$$

如果令

$$K(x-a, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{\mu} e^{-ik(x-a)} dk = \frac{\sin \mu(x-a)}{\pi(x-a)}, \tag{20}$$

并颠倒积分次序，则(19)式可形式上写成

$$f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(x-a) dx, \tag{21}$$

式中 $K(x-a)$ 看作 $\mu \to \infty$ 时 $K(x-a, \mu)$ 的极限．严格地说，当 $x-a \neq 0$ 时，这个极限在通常意义下是不存在的[1]，但(21)式具有与前面所讨论的积分类似的符号意义，即它应理解为

$$f(a) = \lim_{\mu \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(x-a, \mu) dx. \tag{22}$$

因此 K 具有筛选性． 如果在(21)式中令 $f(x) = 1$，则得知 $K(x)$ 对所有的 x 积分等于 1． 因此，得到狄喇克 δ 函数的另一种表示法，即

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk, \tag{23}$$

即 $\delta(x)$ 可看作是 1 的傅里叶变换． 令 $f(x) = e^{ikx}$，$a = 0$，由(21)式得出逆关系式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{ikx} dx = 1. \tag{24}$$

至此，我们只考虑了一维空间，但上述定义不难推广到多维空间．特别是，考虑三维空间．则函数

$$\delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \tag{25}$$

---

1) 如果按 Cesàro 极限的意义解释，则此极限存在，并具有零值[参看 B. van der Pol 和 H. Bremmer，上述引书，pp. 100—104]．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

它通常也表示为 $\delta(\boldsymbol{r})$，其中 $\boldsymbol{r}$ 是分量为 x, y, z 的矢量，显然，它满足类似于(1)式的关系式，即

$$\left.\begin{aligned}&\delta(x, y, z)=0, \quad \text{当}\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0, && \text{(a)}\\ &\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=1. && \text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

筛选性现在用下式表示：

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \delta(x-a, y-b, z-c)\, dx\, dy\, dz=f(a, b, c), \tag{27}$$

并且 $\delta(x, y, z)$ 满足下列傅里叶互逆关系式：

$$\delta(x, y, z)=\frac{1}{(2 \pi)^{3}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\left(k_{x} x+k_{y} y+k_{z} z\right)}\, dk_{x}\, dk_{y}\, dk_{z}, \tag{28}$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z) e^{i\left(k_{x} x+k_{y} y+k_{z} z\right)}\, dx\, dy\, dz=1. \tag{29}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录5 严格推导洛伦兹-洛伦茨定律用到的一个数学引理(§2.4.2)

本附录将建立§2.4中用到的一个引理，根据这一引理，当$a\to 0$时，

$$\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\int_{\sigma}^{\Sigma}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}')G(R)dV'\to\int_{\sigma}^{\Sigma}\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}')G(R)dV'+\frac{8\pi}{3}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}).\tag{1}$$

式中$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r})$是位置的任一矢量函数，$G(R)=e^{ikR}/R$．积分遍及外界面为曲面$\Sigma$而内界面为球面$\sigma$之间的全部体积，该球的半径为$a$，其中心在位置矢量$\boldsymbol{r}(x, y, z)$所规定的P点．$R$表示距离$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，其中矢量$\boldsymbol{r}'(x', y', z')$用来规定某一体积元$dV'$的位置．

设$\boldsymbol{A}$为位置的任一矢量函数．$\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\boldsymbol{A}$的分量为

$$(\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\boldsymbol{A})_x=\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2},$$

等等，因此，

$$\left(\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\int_{\sigma}^{\Sigma}\boldsymbol{Q}G dV'\right)_x=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}Q_y G dV'+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}Q_z G dV'-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\int_{\sigma}^{\Sigma}Q_x G dV'.\tag{2}$$

现在，对于任一可微标量函数$F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$，有

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}F dV'=\int_{\sigma}^{\Sigma}\frac{\partial F}{\partial x}dV'+\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\delta x}\left[\int_{\sigma'}^{\Sigma}F dV'-\int_{\sigma}^{\Sigma}F dV'\right],\tag{3}$$

式中σ'表示半径为a而中心在$T(x+\delta x, y, z)$点的小球面．为了求出(3)式中极限的值，注意到两个积分的差代表图9中用阴影

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

示出的两个区域的贡献．体积元可表示为 $\delta V' = -\delta S' \cdot \delta x \cdot \rho_x$ 的形式，式中 $\delta S'$ 是面元，ρ_x 是从点 P 指向外方的单位径向矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 的 x 分量．因此

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\delta x}\left[\int_{\sigma'}^{\Sigma} F\,dV' - \int_{\sigma}^{\Sigma} F\,dV'\right] = -\int_{\sigma} F\rho_x\,dS'. \qquad (4)$$

由(3)和(4)式，如果令 $F = Q_j(\mathbf{r})G(R)$，其中 $Q_j(j = x, y$ 或 $z)$ 是 $\mathbf{Q}$ 的任一笛卡儿分量，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}(Q_jG)\,dV' = \int_{\sigma}^{\Sigma}\frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\,dV' - \int_{\sigma}(Q_jG)\rho_x\,dS'. \qquad (5)$$

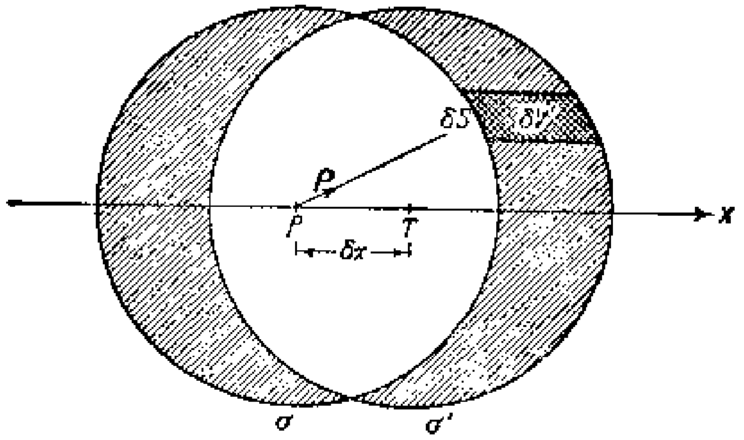


图 9 $\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{1}{\delta x}\left[\int_{\sigma'}^{\Sigma} F\,dV' - \int_{\sigma}^{\Sigma} F\,dV'\right]$ 的求值．

σ 的中心在 $P(x, y, z)$，σ' 的中心在 $T(x+\delta x, y, z)$

其次，考虑二阶偏微商．(5)式对 x 求微分并再次用到(5)式，得出

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\sigma}^{\Sigma}(Q_jG)\,dV' = \int_{\sigma}^{\Sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Q_jG)\,dV' - \int_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\rho_x\,dS' - \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma}(Q_jG)\rho_x\,dS'. \qquad (6)$$

因为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{dG}{dR}\frac{\partial R}{\partial x} = -\rho_x\frac{d}{dR}\frac{e^{ikR}}{R} = \rho_x\left(\frac{1}{R} - ik\right)\frac{e^{ikR}}{R},\\ &\text{和}\\ &dS' = a^2 d\Omega,\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中 $d\Omega$ 是立体角元，由此得出

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\rho_x dS' = \int_\sigma \rho_x Q_j \frac{\partial G}{\partial x} dS' = \int_\Omega \rho_x^2 Q_j e^{ika}(1-iak)d\Omega$$

$$\to \frac{4\pi}{3}Q_j(\boldsymbol{r}),\ 当\ a\to 0\ 时, \qquad (8)$$

Ω 表示单位球的表面. (6)式中最后一个积分随 a 趋于零，因此，当 $a\to 0$ 时，有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_s^\Sigma (Q_jG)dV' \to \int_\sigma^\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Q_jG)dV' - \frac{4\pi}{3}Q_j(\boldsymbol{r}). \qquad (9)$$

混合二阶偏微商可用同样的方法求值，例如有

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int_\sigma^\Sigma (Q_jG)dV' \to \int_\sigma^\Sigma \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(Q_jG)dV'. \qquad (10)$$

现在 $-\frac{4\pi}{3}Q_j(\boldsymbol{r})$ 项不存在，这是因为对应于(8)式的积分为

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\rho_y dS' = \int_\Omega \rho_x\rho_y Q_j(1-iak)d\Omega,$$

而它随 a 趋于零.

将(9)和(10)类型的式子代入(2)式，当 $a\to 0$ 时，求得

$$\left[\text{curl curl}\int_\sigma^\Sigma (\boldsymbol{Q}G)dV'\right]_x \to \left[\int_\sigma^\Sigma \text{curl curl}(\boldsymbol{Q}G)dV'\right]_x + \frac{8\pi}{3}Q_x. \qquad (11)$$

对于 y 和 z 分量也得出类似的表达式. 将这三个表达式合成矢量形式，就得到(1)式.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录6 电磁场中不连续性的传播(§3.1.1)

§ 3.1.1 中曾提到，几何光学的程函方程与严格描述电磁场中不连续性传播的方程是等同的. 更普遍地说,可以证明,支配着与几何光线有关的电磁场性质的四个方程 § 3.1(11*a*)—(14*a*),与联系着一运动的不连续曲面上各个场矢量的方程是等同的. 本附录的目的是论证这种数学上的等价性.

§ 1 联系各个场矢量不连续变化的关系式

§ 1.1.3 中研究过,例如在透镜表面处,由物质参量 ϵ 和 μ 突变而引起的场矢量的不连续性. 不连续场也可以是由完全不同的原因,即由于光源突然开始辐射而引起的. 于是,场传播到光源周围的空间内,并且随着时间增加,充满到越来越大的区域. 在这区域的界面上,场具有不连续性：在这区域内场矢量一般是有限的,而在这区域外则为零. 首先,我们将建立一些在场不连续的任一曲面上均成立的一般关系式. 为了简化起见,假定在时间 $t>0$ 的任一时刻只有一个这样的曲面,而推广到几个不连续曲面(例如,它们可以是由媒质中存在的障碍物上反射引起的)也是不难的.

设 $F(x, y, z, t)=0$ 是至少有一个场矢量在其上不连续的任一曲面. 如果这个曲面在空间是固定的，则 F 当然与 t 无关. 曲面两边的点可分别用不等式 $F<0$ 和 $F>0$ 加以区别. 设 $\mathbf{E}$ 是电矢量,并且设

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}^{(1)}(x, y, z, t), \quad \text{当 } F(x, y, z, t)<0, \\ &= \mathbf{E}^{(2)}(x, y, z, t), \quad \text{当 } F(x, y, z, t)>0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

于是 $\mathbf{E}$ 可写成下述形式:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(1)} U(-F)+\mathbf{E}^{(2)} U(F), \tag{2}$$

式中 U 是亥维赛单位函数[参看附录 4 (17)式].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

采用(2)式表示，推导麦克斯韦方程中 curl $\boldsymbol{E}$，div $\boldsymbol{E}$，$\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ 等量的表达式。为了对含有一个不连续因子的和或积求微分，我们使用通常的微分规则，并利用附录 4 (18)式，

$$\frac{d}{dx} U(x) = \delta(x), \tag{3}$$

式中 δ 是狄喇克 δ 函数。因此，由(2)式得出，例如，

$$\begin{aligned}\text{curl}\, \boldsymbol{E} = & U(-F)\, \text{curl}\, \boldsymbol{E}^{(1)} + U(F)\, \text{curl}\, \boldsymbol{E}^{(2)} \\ & + [\text{grad}\, U(-F)] \times \boldsymbol{E}^{(1)} + [\text{grad}\, U(F)] \times \boldsymbol{E}^{(2)}.\end{aligned} \tag{4}$$

现在

$$\begin{aligned}\text{grad}\, U(-F) = -\text{grad}\, U(F) = -\frac{dU(F)}{dF}\, \text{grad}\, F \\ = -\delta(F)\, \text{grad}\, F,\end{aligned} \tag{5}$$

由(4)和(5)式得出，

$$\begin{aligned}\text{curl}\, \boldsymbol{E} = & U(-F)\, \text{curl}\, \boldsymbol{E}^{(1)} + U(F)\, \text{curl}\, \boldsymbol{E}^{(2)} \\ & + \delta(F)\, \text{grad}\, F \times (\Delta \boldsymbol{E}),\end{aligned} \tag{6}$$

式中

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(2)} - \boldsymbol{E}^{(1)}. \tag{7}$$

用类似的方法求得

$$\begin{aligned}\text{div}\, \boldsymbol{E} = & U(-F)\, \text{div}\, \boldsymbol{E}^{(1)} + U(F)\, \text{div}\, \boldsymbol{E}^{(2)} \\ & + \delta(F)\, \text{grad}\, F \cdot \Delta \boldsymbol{E},\end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = U(-F) \frac{\partial \boldsymbol{E}^{(1)}}{\partial t} + U(F) \frac{\partial \boldsymbol{E}^{(2)}}{\partial t} + \delta(F) \frac{\partial F}{\partial t} \Delta \boldsymbol{E}. \tag{9}$$

电流和电荷可用与场矢量类似的形式表示，但如果物质参量 ε 和 μ 在曲面 $F=0$ 处不连续，则应存在表示面电流密度 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 和面电荷密度 $\hat{\rho}$ 的附加项。它们的贡献由 § 1.1 (17a) 和 (18a) 式给出，总共有

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}^{(1)} U(-F) + \boldsymbol{j}^{(2)} U(F) + \hat{\boldsymbol{j}} |\text{grad}\, F| \delta(F), \tag{10}$$

$$\rho = \rho^{(1)} U(-F) + \rho^{(2)} U(F) + \hat{\rho} |\text{grad}\, F| \delta(F). \tag{11}$$

现在把(6)，(8)，(9)，(10)，(11)和含有其他场矢量的类似表达式代入麦克斯韦方程 § 1.1(1)—(4)。带上标(1)的项抵消了，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

带上标(2)的项也抵消了，这是因为不连续曲面两边的场分别满足麦克斯韦方程。剩余各项给出下列联系各个场矢量不连续变化的关系式：

$$\operatorname{grad} F \times \Delta \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\Delta \boldsymbol{D} = \frac{4\pi}{c}\hat{\boldsymbol{j}}\,|\operatorname{grad} F|, \tag{12}$$

$$\operatorname{grad} F \times \Delta \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\Delta \boldsymbol{B} = 0, \tag{13}$$

$$\operatorname{grad} F \cdot \Delta \boldsymbol{D} = 4\pi\hat{\rho}\,|\operatorname{grad} F|, \tag{14}$$

$$\operatorname{grad} F \cdot \Delta \boldsymbol{B} = 0. \tag{15}$$

注意到下述结果是有趣的：用差值 $\Delta\boldsymbol{E}, \Delta\boldsymbol{H}, \Delta\boldsymbol{D}, \Delta\boldsymbol{B}$ 代替矢量 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$，用 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 和 $\hat{\rho}$ 代替 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ，以及用乘法算符 $\frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \times \frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{1}{|\operatorname{grad} F|}\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{1}{|\operatorname{grad} F|}\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{1}{|\operatorname{grad} F|}\frac{\partial F}{\partial t}$ 代替微分算符 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial t}$，就可在形式上由麦克斯韦方程得出上述这些方程.

设 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是垂直于不连续曲面并由 $F<0$ 区（下标 1）指向 $F>0$ 区(下标 2)的单位矢量，

$$\boldsymbol{n}_{12} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}. \tag{16}$$

又引入不连续曲面前进的速率 v. 对于从不连续曲面 $F(x, y, z, t)=0$ 上一点到邻近的不连续曲面上一点的微小位移 $\delta\boldsymbol{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$，相应的时间变化为 δt，于是

$$\operatorname{grad} F \cdot \delta\boldsymbol{r} + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t = 0. \tag{17}$$

特别是对于沿着法线的位移，$\delta\boldsymbol{r} = \delta s\,\boldsymbol{n}_{12}$，因此速率 v 为

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{|\operatorname{grad} F|}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{18}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由此得出,(12)—(15)式也可以写成下列形式[1]

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\Delta\boldsymbol{H}+\frac{v}{c}\Delta\boldsymbol{D}=\frac{4\pi}{c}\hat{\boldsymbol{j}},\tag{12a}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times\Delta\boldsymbol{E}-\frac{v}{c}\Delta\boldsymbol{B}=0,\tag{13a}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot\Delta\boldsymbol{D}=4\pi\hat{\rho},\tag{14a}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot\Delta\boldsymbol{B}=0.\tag{15a}$$

如果场矢量的不连续性是由在空间固定的曲面 $F(x, y, z)=0$ 上物质参量 ε 和 μ 的突变引起的,则 $v=0$,并且(12a)—(15a) 化为 § 1.1(25),(23),(19)和(15)式.

§ 2 运动的不连续曲面上的场

考虑一个由于存在突然开始辐射的光源而引起的运动的不连续曲面.把这个曲面表示为下述形式:

$$F(x, y, z, t)\equiv\mathscr{S}(x, y, z)-ct=0,\tag{19}$$

式中 c 是真空光速.这个不连续曲面上的场矢量将用小写字母表示,

$$\boldsymbol{e}(x, y, z)=\boldsymbol{E}\left[x, y, z, \frac{1}{c}\mathscr{S}(x, y, z)\right],\tag{20}$$

对于其他的场矢量也有类似的表达式. 现在,在运动曲面之外的

---

1) 这些方程是看来早已为友维赛所知的一组不连续关系式的推广.也见于 A. E. H. Love, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **1** (1904), 56; H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1932), p. 196; T. Levi-Civita, *Caractéristiques des Systèmes Différentiels et Propagation des Ondes* (Paris, Librairie Félix Alcan, 1932), § 10; R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, 油印文稿, Brown University, 1944; 印刷的改写本,出版于 University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964, § 6 and § 7; M. Kline, *Comm. Pure and Appl. Math.* **4** (1951), 239; A. Rubinowicz, *Acta Phys. Polonica*, **14** (1955), 209; M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965), pp. 37–51. 这里采用的推导方法出自 H. Bremmer, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4** (1951), 419.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

区域(假定说，$F(x, y, z, t) > 0$)，场不存在，因此根据(1)和(7)式，$\Delta \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}^{(1)} = -\boldsymbol{e}$，等等。物质方程 § 1.1(10)、(11)给出 $\boldsymbol{d} = \varepsilon \boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b} = \mu \boldsymbol{h}$，如果还令 $\hat{j} = 0$，$\hat{\rho} = 0$，则(12)—(15)式给出

$$\operatorname{grad} \mathscr{S} \times \boldsymbol{h} + \varepsilon \boldsymbol{e} = 0, \tag{21}$$

$$\operatorname{grad} \mathscr{S} \times \boldsymbol{e} - \mu \boldsymbol{h} = 0, \tag{22}$$

$$\operatorname{grad} \mathscr{S} \cdot \boldsymbol{e} = 0, \tag{23}$$

$$\operatorname{grad} \mathscr{S} \cdot \boldsymbol{h} = 0. \tag{24}$$

这些方程在形式上与几何光学的基本方程 [§ 3.1(11a)—(14a)式]相同。因此，在一个运动的不连续曲面上的场矢量与对时谐场作几何光学近似有关的场矢量都严格遵守相同的方程，这个运动的不连续曲面相应于几何波阵面[1]。

显然，运动的不连续曲面必须遵守程函方程

$$\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial z}\right)^2 = n^2, \tag{25}$$

式中 $n^2 = \varepsilon \mu$。这个方程可象以前那样导出。它是(21)和(22)式之间的相容条件，由(21)和(22)式消去 $\boldsymbol{h}$ 或 $\boldsymbol{e}$ 并利用(23)或(24)式就得出此式。根据(18)，(19)和(25)式，不连续曲面以速度 $v = c/n$ 传播。

---

1) 还可证明，$\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 遵守与几何光学场的复振幅矢量相同的输运方程 [§ 3.1 (41)和(42)式]。这个结果首先由 R. K. Luneburg 得到，上述引著，1944，p. 46；上述引著，1964，p. 44。又见 E. T. Copson, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4** (1951), 427；M. Kline and I. W. Kay，上述引著，p. 162.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录 7　泽尼克圆多项式(§9.2.1)

在本附录中，将更充分地研究 § 9.2.1 中曾扼要讨论过的圆多项式. 泽尼克[1] 在他的关于刀口检验和相衬法的重要论文中引入并最早研究过这些多项式；他和布林克曼 (Brinkman)[2]，以及奈波尔[3] 又进一步加以研究. 其后巴蒂亚和沃耳夫[4] 只根据正交性和不变性的要求就导出了这些多项式；我们将大体上仿照他们的处理.

§ 1　某些一般考虑

不难证明，存在无限多个带两个实变量 x，y 的多项式的全集，这些多项式在单位圆内相互正交，即它们满足正交条件

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} V^*_{(\alpha)}(x, y)V_{(\beta)}(x, y)dxdy = A_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

式中 $V_{(\alpha)}$ 和 $V_{(\beta)}$ 表示该集内两个典型多项式，星号表示复共轭，δ 是克朗内克符号，$A_{\alpha\beta}$ 是以后选择的归一化常数. 利用某些简单的不变性可以把泽尼克圆多项式与其他多项式集区分开，这些不变性用群论最能说明. 然而，利用一种归一化，有可能避免群论的抽象形式. 首先认为这样的集是相对于各轴绕原点的转动"形式不变"的. 这种不变性的意思是，作任意转动

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\phi + y\sin\phi, \\ y' &= -x\sin\phi + y\cos\phi, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

1) F. Zernike, *Physica*, **1** (1934), 689.

2) F. Zernike and H. C. Brinkman, *Verh. Akad. Wet. Amst.* (Proc. Sec. Sci.), **38** (1935), 11.

3) B. R. A. Nijboer, 论文 (University of Groningen, 1942).

4) A. B. Bhatia and E. Wolf, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50** (1954), 40.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

时，每一个多项式 $V(x, y)$ 变换为相同形式的多项式，即 V 经变换(2)后满足下述关系式：

$$V(x, y) = G(\phi)V(x', y'), \tag{3}$$

式中 $G(\phi)$ 是转角 ϕ 具有周期 2π 的连续函数，并且 $G(0) = 1$.

现在，两次接连转过角 ϕ_1 和 ϕ_2 与一次转过角 $\phi_1 + \phi_2$ 等效。因此，由(3)式得出，G 必须满足函数方程

$$G(\phi_1)G(\phi_2) = G(\phi_1 + \phi_2). \tag{4}$$

这个方程具有周期 2π 的通解是熟知的，就是[1]

$$G(\phi) = e^{il\phi}. \tag{5}$$

式中 l 是任何正、负或零整数．把(5)式代入(3)式，取 $x' = \rho$，$y' = 0$，并用(2)式，得出 V 必为下述形式：

$$V(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = R(\rho)e^{il\phi}, \tag{6}$$

式中 $R(\rho) = V(\rho, 0)$ 只是 ρ 的函数．其次，把 $e^{il\phi}$ 按 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 的幂展开．假设 V 是变量 $x = \rho\cos\phi$ 和 $y = \rho\sin\phi$ 的 n 次多项式；则由(6)式得出，$R(\rho)$ 是 ρ 的 n 次多项式，其中不含 ρ 低于 $|l|$ 次的幂．而且显然，$R(\rho)$ 是偶或奇多项式随 l 是偶数或奇数而定．泽尼克圆多项式集与所有其他这样的集的区别是由于下述性质：对于每一对 n（次）和 l（依赖于角）的允许值，即对于 n 和 l 的整数值，满足 $n \geq 0$，$l \gtreqless 0$，$n \geq |l|$，并且 $n - |l|$ 为偶数时，该集内都有一个多项式．这个集的典型多项式用

$$V_n^l(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = R_n^l(\rho)e^{il\phi} \tag{7}$$

表示．

由(1)和(7)式得出，径向多项式 $R_n^l(\rho)$ 满足关系式

$$\int_0^1 R_n^l(\rho)R_{n'}^l(\rho)\rho d\rho = a_n^l\delta_{nn'}, \tag{8}$$

式中

$$a_n = \frac{A_n^l}{2\pi}. \tag{9}$$

对于任一给定的 l 值，下标 n 只能取值 $|l|$，$|l| + 2$，$|l| + 4$，

---

1) 例如，见 M. Born, *Natural Philosophy of Cause and Chance* (Oxford, Clarendon Press, 1949, p. 153; Dover Publications, New York, 1964), p. 153.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\cdots$. 相应的序列 $R^l_{|l|}(\rho)$, $R^l_{|l|+2}(\rho)$, $R^l_{|l|+4}(\rho)\cdots$, 可通过在区间 $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ 上带有权重因子 ρ 将幂

$$\rho^{|l|},\ \rho^{|l|+2},\ \rho^{|l|+4},\ \cdots \tag{10}$$

正交化而得出. 而且,因为(10)中只出现 l 的绝对值,所以

$$R_n^{-l}(\rho) = \beta_n^l R_n^l(\rho), \tag{11}$$

式中 β_n^l 是一个只取决于两个多项式 R_n^{-l} 和 R_n^l 归一化的常数. 特别是,对于所有的 l 和 n, 可令 $\beta_n^l = 1$ 以归一化,则

$$V_n^{\pm m}(\rho\cos\phi,\ \rho\sin\phi) = R_n^m(\rho)e^{\pm im\phi}, \tag{12}$$

式中 $m = |l|$ 是非负的整数.

这个圆多项式集含有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个线性无关的次数 $\leqslant n$ 的多项式. 因此,每个单项 $x^i y^j$($i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, 均为整数),以及每个 x, y 的多项式,都可以表示为有限多个圆多项式 V_n^l 的线性组合. 因此,由维尔斯特拉斯近似定理[1)]得出,这个集是完备的.

§2 径向多项式 $R_n^{\pm m}(\rho)$ 的显式

因为 $R_n^{\pm m}(\rho)$ 是 ρ 的 n 次多项式,其中不含 ρ 低于 m 次的幂,而且它是偶或奇多项式随 n 是偶数或奇数而定,由此得出,R 可表示为下述形式:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = t^{\frac{m}{2}} Q_{\frac{n-m}{2}}(t), \tag{13}$$

式中 $t = \rho^2$, $Q_{\frac{n-m}{2}}(t)$是 t 的 $\frac{1}{2}(n-m)$ 次多项式. 根据(8)式,Q 多项式必须满足关系式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^1 t^m Q_k(t)Q_{k'}(t)\,dt = a_n^{\pm m}\delta_{kk'}, \\ &\text{式中}\quad k = \frac{1}{2}(n-m),\quad k' = \frac{1}{2}(n'-m). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

1) 例如,见 R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 (New York, Interscience Publishers, 1st English edition, 1953), p. 65.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由此得知，多项式 $Q_0(t), Q_1(t), \cdots, Q_k(t), \cdots$ 可通过在区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上带有权重因子 $w(t) = t^m$ 将自然幂序列

$$1, t, t^2, \cdots, t^k, \cdots \tag{15}$$

正交化而得出. 现在，人们熟知的雅科毕(或超几何)多项式[2]

$$G_k(p, q, t) = \frac{(q-1)!}{(q+k-1)!} t^{1-q}(1-t)^{q-p} \times \frac{d^k}{dt^k}[t^{q-1+k}(1-t)^{p-q+k}] \tag{16}$$

$$= \frac{k!(q-1)!}{(p+k-1)!}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s \times \frac{(p+k+s-1)!}{(k-s)!s!(q+s-1)!} t^s, \tag{17}$$

$(k \geqslant 0,\ q > 0,\ p-q > -1)$，可定义为通过在区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上带有更为一般的权重函数

$$w(t) = t^{q-1}(1-t)^{p-q}$$

将 (15) 正交化而得出的函数. 它们的正交和归一化性质由下式给出[2]

$$\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-q} G_k(p, q, t) G_{k'}(p, q, t) dt = b_k(p, q)\delta_{kk'}, \tag{18}$$

式中

$$b_k(p, q) = \frac{k![(q-1)!]^2[p-q+k]!}{[q-1+k]![p-1+k]![p+2k]}. \tag{19}$$

[按 b_k 的这种选择，对于所有的 k，$G_k(p, q, 0) = 1$]. 比较(18)和(14)式，得出[3]

$$Q_k(t) = \sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1, m+1)}}\, G_k(m+1, m+1, t). \tag{20}$$

由(13)和(20)式得出用雅科毕多项式表示的径向多项式的下述表达式:

---

1) R. Courant and D. Hilbert, 上述引著, Vol. I, p. 90.
2) E. Kemble, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics* (New York, McGraw-Hill, 1937), p. 594.
3) (20)式右边平方根的符号由后面(26)式确定.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$R_n^{\pm m}(\rho)=\sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1,m+1)}}\rho^m G_k(m+1,m+1,\rho^2),$$

$$\left[k=\frac{1}{2}(n-m)\right]. \tag{21}$$

仿照泽尼克，选择归一化使得对于所有的 n 和 m，有

$$R_n^{\pm m}(1)=1. \tag{22}$$

因此，由(21)和(22)式得出，

$$\sqrt{\frac{b_k(m+1,m+1)}{2a_n^{\pm m}}}=G_k(m+1,m+1,1). \tag{23}$$

$G_k(m+1,m+1,1)$ 的值可由雅科毕多项式的生成函数得出[1]。我们有

$$\frac{[z-1+\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}]^m}{(2z\rho^2)^m\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\binom{m+s}{s}G_s(m+1,m+1,\rho^2)z^s. \tag{24}$$

对于 $\rho=1$，左边化为 $(1+z)^{-1}$，将它展开为幂级数，并与右边比较，得出：

$$G_s(m+1,m+1,1)=\frac{(-1)^s}{\binom{m+s}{s}}. \tag{25}$$

由(25)和(23)式得出，

$$\sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1,m+1)}}=(-1)^{\frac{n-m}{2}}\binom{\frac{1}{2}(n+m)}{\frac{1}{2}(n-m)}, \tag{26}$$

并且利用(16)，(17)和(26)式，最后由(21)式得到径向多项式的下述表达式：

1) 参看 R. Courant and D. Hilbert，上述引著，Vol. I，p. 91.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$R_n^{\pm m}(\rho)=\frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\rho^m}\left\{\frac{d}{d(\rho^2)}\right\}^{\frac{n-m}{2}}\left\{(\rho^2)^{\frac{n+m}{2}}(\rho^2-1)^{\frac{n-m}{2}}\right\} \tag{27}$$

$$=\sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(n-m)}(-1)^s\frac{(n-s)!}{s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!}\times\rho^{n-2s}. \tag{28}$$

头几个多项式的显式已在 612 页的表 21 中给出.

由(26)和(19)式得出归一化常数 $a_n^{\pm m}$:

$$a_n^{\pm m}=\frac{1}{2n+2}. \tag{29}$$

为了得到径向多项式的生成函数，在(21)和(26)式中用 s 代替 $k=(n-m)/2$，用 $m+2s$ 代替 n，再代入(24)式，由此得出

$$\frac{[1+z-\sqrt{1+2z(1-2\rho^2)+z^2}]^m}{(2z\rho)^m\sqrt{1+2z(1-2\rho^2)+z^2}}=\sum_{s=0}^{\infty}z^sR_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \tag{30}$$

最后计算积分

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho d\rho$$

的值，如第九章所示，它在泽尼克-奈波尔象差衍射理论中起着重要的作用. $R_n^m(\rho)$ 用(27)式代入，贝塞耳函数 J_m 用它的级数展开代入[1]. 所得的表达式可写成

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{2\left(\frac{n-m}{2}\right)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s+m)!}\left(\frac{v}{2}\right)^{m+2s}\times f\left(s,\frac{n-m}{2},\frac{n+m}{2},\frac{n-m}{2}\right), \tag{31}$$

---

1) R. Courant and D. Hilbert, 上述引著, Vol. I. P. 484.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$f(s,p,q,r)=\int_0^1 u^s\left(\frac{d}{du}\right)^p\{u^q(u-1)^r\}du, \tag{32}$$

p, q, r, s 都是非负的整数. 对(32)式分部积分，由此得出，

$$f(s,p,q,r)=\left\{u^s\left(\frac{d}{du}\right)^{p-1}[u^q(u-1)^r]\right\}_0^1$$

$$-s\int_0^1 u^{s-1}\left(\frac{d}{du}\right)^{p-1}\{u^q(u-1)^r\}du. \tag{33}$$

现在，如果 $r\geqslant p$ 和 $s+q-p\geqslant 0$，则右方第一项为零，因此

$$f(s,p,q,r)=-sf(s-1,p-1,q,r). \tag{34}$$

我们分别考虑 $s\geqslant p$ 和 $s<p$ 的情况.

当 $s\geqslant p$ 时，应用(34)式 p 次，则有

$$\begin{aligned}f(s,p,q,r)&=(-1)^p s(s-1)(s-2)\cdots\\&\quad\times(s-p+1)f(s-p,0,q,r)\\&=\frac{(-1)^{p+r}s!}{(s-p)!}\int_0^1 u^{s+q-p}(1-u)^r du.\end{aligned} \tag{35}$$

(35)式中的积分是第一类欧勒积分(β 函数)，其值为[1] $(s+q-p)!r!/(s+q+r-p+1)!$. 因此，对于 $s\geqslant p$，

$$f(s,p,q,r)=(-1)^{p+r}\frac{s!(s+q-p)!r!}{(s-p)!(s+q+r-p+1)!}. \tag{36}$$

其次，考虑 $s<p$ 的情况. 应用(34)式 s 次，得出

$$\begin{aligned}f(s,p,q,r)&=(-1)^s s(s-1)\cdots f(0,p-s,q,r)\\&=(-1)^s s!\left\{\left(\frac{d}{du}\right)^{p-s-1}[u^q(u-1)^r]\right\}_0^1\\&=0.\end{aligned} \tag{37}$$

现在把(36)和(37)式代入(31)式，引入一个新变量 l，使得 $s=\frac{1}{2}(n-m)+l$. 由此得出

---

1) R. Courant and D. Hilbert, 上述引书, Vol. I, p. 483.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(v\rho)\rho d\rho = \frac{(-1)^{3(n-m)/2}}{v} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l+1)!} \times \left(\frac{v}{2}\right)^{n+2l+1}. \tag{38}$$

认出右方的级数就是 $J_{n+1}(v)$ 的展开。因为 $n-m$ 是偶数，因子 $(-1)^{3(n-m)/2}$ 可用 $(-1)^{(n-m)/2}$ 代替，最后得出

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(v\rho)\rho d\rho = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{J_{n+1}(v)}{v}. \tag{39}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录 8　一个不等式的证明(§10.7.3)

设 $f(\tau)$ 和 $g(\tau)$ 是实变量 τ 的任意两个(一般是复的)函数，并设 λ 是一个实参量．则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f+\lambda g^*|^2 d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}(f+\lambda g^*)(f^*+\lambda g)d\tau\geqslant 0, \tag{1}$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty}ff^*d\tau+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^*g^*)d\tau+\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}gg^*d\tau\geqslant 0. \tag{2}$$

这个 λ 的二次式的极小值由微分得出：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^*g^*)d\tau+2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}gg^*d\tau=0. \tag{3}$$

此式的根 $\lambda=\lambda_{极小}$ 为

$$\lambda_{极小}=-\frac{1}{2}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^*g^*)d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty}gg^*d\tau}. \tag{4}$$

如果将此值代入(2)式，则得

$$4\left(\int_{-\infty}^{+\infty}ff^*d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}gg^*d\tau\right)\geqslant\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^*g^*)\,d\tau\right]^2. \tag{5}$$

设

$$f=\tau\psi(\tau),\quad g=\frac{d\psi^*(\tau)}{d\tau}. \tag{6}$$

则

$$fg+f^*g^*=\tau\left(\psi\frac{d\psi^*}{d\tau}+\psi^*\frac{d\psi}{d\tau}\right)=\tau\frac{d}{d\tau}(\psi\psi^*), \tag{7}$$

如果把(7)式代入(5)式右方再分部积分，并假定[1] $\tau\to\pm\infty$ 时，

---

1) 事实上，每当(8)式左方各个积分收敛时，这个条件就满足[参看 H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, 译自德文 (London, Methuen, 1931; 又, New York, Dover Publications, Inc.), pp. 393—394].

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$\tau\phi\phi^* \to 0$，则(5)式变为

$$4\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2\phi\phi^* d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi^*}{d\tau}d\tau\right) \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\phi^* d\tau\right)^2. \tag{8}$$

这就是所要求的不等式

仅当(1)式中等号成立时，(8)式中的等号才能成立；这只有在$f = -\lambda g^*$时，或者利用(6)式，只有在

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{1}{\lambda}\tau\phi \tag{9}$$

时，才是可能的．这个微分方程的通解为

$$\phi(\tau) = Ae^{-\tau^2/2\lambda}, \tag{10}$$

式中A是一个常数．只有$\lambda \geqslant 0$的解才适用，因为不然的话，$\phi(\tau)$在无穷大处不为零．所以，当且仅当ϕ是高斯函数时，(8)式才变成等式．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

附录 9　计算两个积分的值(§12.2.2)[1]

在本附录中，我们将计算 § 12.2(8)和(9)式两个积分

$$\mathscr{I}_1 = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V_1}\left\{e^{i(px_1+qy_1)}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right\}dx_1dy_1dz_1, \tag{1}$$

$$\mathscr{I}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\iiint\limits_{V_1}\left\{e^{i(px_1+qy_1)}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right\}dx_1dy_1dz_1 \tag{2}$$

的值，式中

$$R = +\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \tag{3}$$

并且 $\omega^2 > c^2p^2$. 我们对两种情况感兴趣，即:

(a)　$0 < y < d$，式中 y 和 d 都是常数，积分体积 V_1 是 $-\infty < x_1 < \infty$，$-y \leqslant y_1 \leqslant d-y$，$-\infty < z_1 < \infty$ 的平板，除去在原点 $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ 周围半径趋于零的小球以外.

(b)　$y > d$ 或 $y < 0$，现在积分体积 V_1 是 $-\infty < x_1 < \infty$，$-y \leqslant y_1 \leqslant d-y$，$-\infty < z_1 < \infty$ 的全部区域.

为了计算 $\mathscr{I}_1$ 的值，应用高斯定理，其形式为

$$\iiint\limits_{V_1}\operatorname{div}\mathbf{G}dV_1 = \iint\limits_{S_1}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}dS_1, \tag{4}$$

式中 $\mathbf{G}$ 是位置的任意矢量函数，$\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ 是包围体积 V_1 的曲面 S_1 的单位外向法线. 取

$$G_{x_1} = G_{y_1} = 0,\ G_{z_1} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{e^{i(px_1+qy_1+\omega R/c)}}{R}\right], \tag{5}$$

由(1)和(4)式得出

$$\mathscr{I}_1 = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}n_{z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{e^{i(px_1+qy_1+\omega R/c)}}{R}\right)dS_1. \tag{6}$$

---

1) 引自 C. G. Darwin, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **23** (1924), §§ 6 和 8.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

因 n_{z_1} 在平板两个面 ($y_1 = -y$ 和 $y_1 = d - y$) 上为零，所以在情况 (b) 中，积分 $\mathscr{J}_1$ 为零[1]. 在情况 (a) 中，还必须包括在原点周围的小球面 σ_1 的贡献. 如果 a 是该小球的半径，则有 $n_z = -z_1/a$，并且其贡献为

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_1}\left(\frac{z_1}{a}\right)^2 e^{i(px_1+qy_1+\omega a/c)}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{i\omega}{ac}\right)d\sigma_1 \to \frac{1}{3}, \text{ 当 } a\to 0 \text{ 时}, \tag{7}$$

因此，总共有

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{J}_1 &= \frac{1}{3}, \text{ 当 } 0<y<d \text{ 时},\\ &= 0, \text{ 当 } y<0 \text{ 或 } y>d \text{ 时}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

在计算 $\mathscr{J}_2$ 以前，我们注意到，因为被积函数只含有一个 $1/R$ 阶的奇点，所以对整个在原点周围小到趋于零的球上积分将不作出贡献. 因此现在情况 (a) 同情况 (b) 一样，可对平板的全部体积积分:

$$\mathscr{J}_2 = \frac{\omega^2}{4\pi c^2}\int_{-y}^{d-y} e^{iqy_1}\mathscr{L}(y_1)dy_1, \tag{9}$$

式中

$$\mathscr{L}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(px_1+\omega R/c)}}{R}dx_1dz_1. \tag{10}$$

在(10)式中，采用由下式定义的新变量 ρ 和 χ，

$$px_1+\frac{\omega}{c}R = \rho\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}, \tag{11a}$$

$$z_1 = \sqrt{\rho^2-y_1^2}\sin\chi, \tag{11b}$$

在每一种情况中均取正平方根. 在 x_1z_1 平面上，ρ 恒定的曲线为椭圆，χ 作为偏心角. $\rho = |y_1|$ 时，椭圆退化为一点. 因此，如果 ρ 和 χ 遍取 $|y_1| \leqslant \rho \leqslant \infty$，$0 \leqslant \chi \leqslant 2\pi$ 的值，则整个 x_1z_1 平面被覆盖. 所以

---

1) 严格地说，曲面 S_1 应当是闭合的，因此也应当考虑遥远边缘的贡献. 不过，这些贡献根据物理上的理由可舍去，因为它们需要无限长的时间才到达正考虑其影响的点.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\mathscr{L}(y_1)=\int_0^{2\pi}\int_{|y_1|}^{\infty}\frac{e^{i\rho\sqrt{(\omega^2/c^2)-p^2}}}{R}\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(\rho,\chi)}d\rho d\chi, \tag{12}$$

式中

$$\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(\rho,\chi)}=\frac{\partial x_1}{\partial\rho}\frac{\partial z_1}{\partial\chi}-\frac{\partial x_1}{\partial\chi}\frac{\partial z_1}{\partial\rho} \tag{13}$$

是上述变换的雅科毕式。由(11a)和(3)式得出，

$$\frac{\partial x_1}{\partial\rho}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}{p+\frac{\omega}{c}\frac{x_1}{R}},\quad \frac{\partial x_1}{\partial\chi}=0, \tag{14a}$$

由(11b)式得出，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial\rho}&=\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-y_1^2}}\sin\chi,\\ \frac{\partial z_1}{\partial\chi}&=\sqrt{\rho^2-y_1^2}\cos\chi=\sqrt{\rho^2-y_1^2-z_1^2}.\end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

还有一个恒等式，

$$\left(pR+\frac{\omega}{c}x_1\right)^2-\left(px_1+\frac{\omega}{c}R\right)^2=\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2\right][x_1^2-R^2],$$

或用(3)和(11a)式，

$$\left(pR+\frac{\omega}{c}x_1\right)=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}\cdot\sqrt{\rho^2-y_1^2-z_1^2}. \tag{15}$$

由(13)，(14)和(15)式得出，

$$\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(\rho,\chi)}=R. \tag{16}$$

把(16)式代入(12)式。对 χ 的积分直接得出值为 2π。对 ρ 的积分也简单，由此得出，

$$\mathscr{L}(y_1)=\frac{2\pi i e^{i|y_1|\sqrt{(\omega/c)^2-p^2}}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}, \tag{17}$$

式中，根据同前面一样的物理论证，已舍去无穷远处的振荡贡献。

现在把(17)式代入(9)式，并计算其结果的积分值，得出：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{J}_y &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{e^{-igy}}{2g\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}}\{e^{igd} - 1\}, \text{ 当 } y > d \text{ 时,} \\
&= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{e^{-ihy}}{2h\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}}\{e^{ihd} - 1\}, \text{ 当 } y < 0 \text{ 时,} \\
&= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left\{\frac{1}{gh} - \frac{e^{-igy}}{2g\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{e^{-ih(y-d)}}{2h\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}}\right\}, \text{ 当 } 0 < y < d \text{ 时,}
\end{aligned}\right\} \quad (18)
$$

式中

$$
g = q - \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}, \quad h = q + \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - p^2}. \qquad (19)
$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn